PAPERS COMMUNICATED

1. *Dualvierscheitelsatz im Laguerreschen Raume.*

Von Tsurusaburo TAKASU.
Mathematical Institute, Tohoku Imperial University, Sendai.

(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., Jan. 12. 1935.)

Ich habe einen „Dualvierscheitelsatz" im Laguerreschen Raume bewiesen.[1] Aber die dort betrachtete L-Torsenklasse $\mathfrak{K}$ scheint aus den folgenden Gründen ziemlich eng zu sein:

(i) Die angenommene Stetigkeit der K-Dualkrümmung $\frac{1}{P}\equiv\frac{d\omega}{d\theta}$ hat die Tatsache $d\theta\neq 0$ zur Folge, wobei θ der L-Torsionswinkel ist. Nun hat nach Carathéodory,[2] Mohrmann[3] und mir[4] eine ziemlich weite Klasse von geschlossenen Torsen wenigstens vier stationäre Schmiegungsebenen ($d\theta=0$). In der Tat ist der L-Torsionswinkel $d\theta$ bis auf einen unwesentlichen Faktor dem gewöhnlichen Torsionswinkel proportional ist.

(ii) Herr W. Fenchel hat bewiesen, dass Tangentenbilder geschlossener Raumkurven jedenfalls nicht sphärisch-konvex sein können.[5]

Im folgenden möchte ich den „Dualvierscheitelsatz" für L-Torsen für etwas erweiterte L-Torsenklasse $\mathfrak{K}^*$ beweisen.[6] Die Idee schliesst sich an den von mir[7] und Fog[8] erweiterten Vierscheitelsatz in der konformen Ebene (also auf der Kugelfläche) an.

1) T. Takasu: Differentialkugelgeometrie, XI. Vierscheitelsatz in der konformen und Laguerreschen Geometrie. Jap. Journ. Math., X (1933), S. 47–51. Auch T. Takasu: Differentialkugelgeometrie, XIV. Laguerre-geometrische Verallgemeinerung der Kurventheorie im Raume. Tôhoku Sci. Rep., vol. 22 (1933), S. 1102. Wegen der bewegungsgeometrischen Behandlungsweise, vgl. auch: T. Takasu: Vierscheitelsatz für Raumkurven. Tôhoku Math. Journ., vol. 39 (1934). T. Takasu: Vierscheitelsatz für Raumkurven, 2. Dieselbe Zeitung, unter der Presse.

2) W. Blaschke: Vorlesungen über Differentialgeometrie, I (1930), S. 49.

3) H. Mohrmann: Die Minimalzahl der stationären Ebenen eines räumlichen Ovals. Sitz.-Ber. Bayer. Akad. Wiss., (1917), S. 1–3.

4) T. Takasu: Vierscheitelsatz im konformen Raume, Proc. Phys.-Math. Soc. Japan, (1934).

5) W. Fenchel: Über Krümmung und Windung geschlossener Raumkurven. Math. Ann., Bd. 101 (1929), S. 238-252. Auch M. Fujiwara: Tôhoku Sci. Rep. (1915).

6) Diese Untersuchung ist durch die Stiftung „Saitô-Hôônkwai" unterstützt.

7) T. Takasu: Vierscheitelsatz in der Lieschen höheren Kreisgeometrie, Tôhoku Math. Journ., vol. 38 (1933), S. 294 und S. 298.

8) D. Fog: Über den Vierscheitelsatz und seine Verallgemeinerungen, Sitz.-Ber. d. Preuss. Akad. d. Wiss., (1933), S. 251-254.

Definition. Eine Stelle einer L-Torse heisst ein *Dualscheitel*, wenn die entsprechende L-Dualkrümmung[1] P^{-1} eine Extrem hat.

Hilfssatz 1°. *Geschlossene L-Torsen und ihre sphärischen Bilder (als die Hüllgebilde der Durchschnittsgrosskreise auf der Bildkugelfläche) ihrer orientierten Ebenen haben Dualscheiteln entsprechend.*

Dieser Satz ist ohne weiteres geometrisch einzusehen.

Eine Kurvenklasse $\mathfrak{K}_2$ auf der Kugelfläche. Im folgenden wollen wir *diejenige Kurvenklasse $\mathfrak{K}_2$ von sphärischen Kurven samt einer ihrer Scharen von orientierten Tangentialkreisen betrachten, deren Kurven einfachgeschlossen, überall mit Dual-K-Dualkrümmung*[2] $P^{-1}\equiv -R$ *sowie mit ihrer stetigen Ableitung* $\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{P}\right)$ *(wo $d\theta$ der Dual-K-Kontingenzwinkel ist) versehen sind, ausgenommen höchstens an einer endlichen Anzahl von Dual-K-Dualeckstellen und an einer endlichen Anzahl von Daul-K-Spitzen.* Dabei verstehen wir unter den *Dual-K-Dualeckstellen*, diejenigen Stellen $\mathfrak{k}$ der Kurve, in denen der in Betracht kommmende progressive orientierte Tangentialkreis $\mathfrak{x}$, der eine Dual-K-Verallgemeinerung des Kurvenpunktes ist, von dem in Betracht kommenden regressiven orientierten Tangentialkreis verschieden ist und diese beiden (d.h. der grogressive und der regressive) orientierten Tangentialkreise sich nicht berühren. *Die Dual-K-Dualeckstellen rechnen wir zu den Dualscheiteln.* Diejenige Stelle $\mathfrak{k}$ einer Kurve, an welcher der orientierte Krümmungskreis (der sich selbst dual ist) mit dem in Betracht kommenden orientierten Tangentialkreise $\mathfrak{x}$ zusammenfällt, wollen wir dabei, in Analogie mit den gewöhnlichen Spitzen, *Dual-K-Spitze* nennen. *In jeder Dual-K-Spitze verschwindet die Dual-K-Dualkrümmung* $\frac{1}{P}\equiv -R$, da der betreffende orientierte Tangentialkreis $\mathfrak{x}$ (der mit dem Krümmungskreis zusammenfällt) dort dualstationär ist. *Die Dual-K-Spitzen sind im allgemeinen keine Dualscheitel.*

Hilfssatz 2°. *Die Mindestzahl der Dualscheitel einer sphärischen Kurve der Klasse $\mathfrak{K}_2$ ist vier.*[3]

Eine L-Torsenklasse $\mathfrak{K}^*$. *Diejenige Klasse von einfachgeschlos-*

1) T. Takasu: Differentialkugelgeometrie, XIV. Laguerre-geometrische Verallgemeinerung der Kurventheorie im Raume. Tôhoku Sci. Rep., vol. 22 (1933), S. 1009.

2) „Dual-K-" ist die Abkürzung von „Dual-konform-" und hinweisst die N. E. Laguerre-geometrischen Sachen.

3) T. Takasu: Vierscheitelsatz in der Lieschen höheren Kreisgeometrie. Tôhoku Math. Journ., vol. 38 (1933), S. 295-298.

senen L-Torsen, bei denen die sphärischen Bilder (als die Hüllgebilde der Durchschnittsgrosskreise auf der Bildkugel) ihrer orientierten Ebenen zur Klasse $\mathfrak{K}_2$ *gehören, wollen wir mit* $\mathfrak{K}^*$ *bezeichnen.*

Dualvierscheitelsatz im Laguerreschen Raume. *Jede L-Torse der Klasse* $\mathfrak{K}^*$ *besitzt* $2n$ *Dualscheitel, wobei die natürliche Zahl* $n \geqq 2$ *ist.*

Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge der beiden Hilfssätze 1° und 2°.