26. *Eine Ergänzung zur Torsentheorie im Laguerreschen Raume.*

Von Tsurusaburo TAKASU.

Mathematical Institute, Tohoku Imperial University, Sendai.

(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., Mar. 12. 1935.)

Den Fundamentalsatz der Torsentheorie im Laguerreschen Raume habe ich[1] zuerst aufgestellt. Hier möchte ich den genannten Fundamentalsatz mit Benutzung des L-Liebmannschen Parameters[2] auf zwei Weisen beweisen.

1. *Methode I.* Es seien (η) die Laguerre-geometrischen Kugelkoordinaten der orientierten Dualschmiegungskugel einer L-Torse:

$$(1)\qquad \mathrm{u}=\mathrm{u}(\theta)\,, \qquad \big((\mathrm{uu})_4=0\big)\,,$$

$$(2)\qquad \eta=\eta(\theta)\,, \qquad \big(\bar{\eta}_5=1,\ (d\eta\, d\eta)_4=d\theta^2\big)\,.$$

Dann ist

$$(3)\qquad \frac{d\eta}{d\theta} \quad \left(\frac{d\bar{\eta}_5}{d\theta}=0\right)$$

der unendlich ferne Kreis, in welchen der durch das homozentrische System $l\eta+m\dfrac{d\eta}{d\theta}$ umgehüllte L-Kegel die unendlich ferne Ebene schneidet.

Nun habe ich bewiesen[3]:

$$(4)\qquad \rho\cdot\mathrm{u}=\frac{d^2\eta}{d\theta^2}+\Xi\,, \qquad \big(\eta_5\equiv-\tfrac{1}{2}\{(\eta\eta)_4-1\},\ \Xi=0,0,0,0,1\big)\,.$$

Daher ist

$$d\rho\cdot\mathrm{u}_i+\rho\cdot d\mathrm{u}_i=\frac{d^3\eta_i}{d\theta^3}d\theta\,, \qquad (i=1,2,3,4)\,,$$

so dass

$$\rho=\sqrt{\left(d\frac{d^2\eta}{d\theta^2}\,d\frac{d^2\eta}{d\theta^2}\right)_4}:\sqrt{(d\mathrm{u}\,d\mathrm{u})_4}$$

---

1) T. Takasu: Natural Equations of Curves under Circular Point-Transformation Groups and their Duals. Tôhoku Math. Journ., 25 (1925). Auszug: Jap. Journ. Math., (1924).

2) Diesen Parameter habe ich selber gefunden, T. Takasu: Fundamentalsatz der Kurventheorie in den „euklidischen" tetrazyklischen, pentasphärischen und Laguerreschen Räume. Tôhoku Math. Journ., 26 (1925), S. 66. Aber ich habe diesen Parameter bei seiner Benennung Herrn Prof. H. Liebmann gewidmet, T. Takasu: Differentialkugelgeometrie, XIV, Tôhoku Sci. Rep., 22 (1933), S. 1036. Diese Note ist eine Ergänzung zum folgenden Artikel, T. Takasu: Differentialkugelgeometrie, Art. XII. 10, ebenda.

Diese Untersuchung ist durch die Stiftung „Saitô-Hôönkwai" unterstützt.

3) T. Takasu: Differentialkugelgeometrie, XIV, a. a. O., S. 1020, Formel (49).

ist. Also lässt sich die Formel (4) wie folgt schreiben:

$$(5)\qquad \boxed{\mathfrak{u}=\pm\frac{\sqrt{(d\mathfrak{u}\,d\mathfrak{u})_4}}{\sqrt{\left(d\frac{d^2\eta}{d\theta^2}\,d\frac{d^2\eta}{d\theta^2}\right)_4}}\left(\Xi+\frac{d^2\eta}{d\theta^2}\right),\qquad \begin{array}{l}\eta_5=-\frac{1}{2}\{(\eta\eta)_4-1\}\,,\\ \Xi=0,0,0,0,1\,.\end{array}}$$

Die Dualschmiegungskugel η ist dadurch charakterisiert, dass

$$(6)\qquad \boxed{\left(\frac{d^2\eta}{d\theta^2}\frac{d^2\eta}{d\theta^2}\right)_4=0}$$

ist.[1]

Der L-Liebmannsche Parameter t lässt sich wie folgt darstellen:

$$(7)\qquad \boxed{dt^2=\frac{|\mathfrak{u}\,d\mathfrak{u}\,d^2\mathfrak{u}\,d^3\mathfrak{u}|}{(d\mathfrak{u}\,d\mathfrak{u})_4^2}=\frac{|dy\,d^2y\,d^3y\,d^4y|}{(d^2y\,d^2y)_4^2}\,,}$$

wobei *für fünf Komponenten*

$$(8)\qquad \boxed{\frac{d\eta}{d\theta}\equiv y}$$

ist, so dass

$$(9)\qquad \boxed{\left|\mathfrak{u}\frac{d\mathfrak{u}}{dt}\,\frac{d^2\mathfrak{u}}{dt^2}\,\frac{d^3\mathfrak{u}}{dt^3}\right|=\left(\frac{d\mathfrak{u}}{dt}\,\frac{d\mathfrak{u}}{dt}\right)_4^2}$$

wird.

Normieren wir nun $\mathfrak{u}$ so um, dass

$$(10)\qquad \boxed{\tilde{\mathfrak{u}}=\frac{dt}{\sqrt{(d\mathfrak{u}\,d\mathfrak{u})_4}}\mathfrak{u}}$$

wird, so gilt die folgende Beziehung:

$$(11)\qquad \boxed{\left(\frac{d\tilde{\mathfrak{u}}}{dt}\,\frac{d\tilde{\mathfrak{u}}}{dt}\right)_4=1\,.}$$

Ich habe bewiesen, dass

$$(12)\qquad \boxed{\frac{dy}{dt}\equiv\frac{d^2\eta}{dt\,d\theta}=\tilde{\mathfrak{u}}}$$

ist.[2]

Setzen wir $\left(\frac{d^r\tilde{\mathfrak{u}}}{dt^r}\,\frac{d^s\tilde{\mathfrak{u}}}{dt^s}\right)_4\equiv(rs)$, so erhalten wir die folgende Tabelle skalarer Produkte:

1) Ebenda, S. 1024, Formel (56).
2) T. Takasu: Differentiälkugelgeometrie, I. Tôhoku Sci. Rep., vol. 17 (1928), S. 234, Formel (108)′.

$$
(13)\qquad
\begin{array}{llllll}
(00)=0, & (01)=0, & (02)=-1, & (03)=0, & (04)=\varphi, & (05)=\frac{5}{2}\varphi', \\
 & (11)=1, & (12)=0, & (13)=-\varphi, & (14)=-\frac{3}{2}\varphi', & (15)=-2\varphi''+f, \\
 & & (22)\equiv\varphi, & (23)=\frac{1}{2}\varphi', & (24)=\frac{1}{2}\varphi''-f, & (25)=\frac{1}{2}\varphi'''-\frac{3}{2}f', \\
 & & & (33)\equiv f, & (34)=\frac{1}{2}f', & (35)=\frac{1}{2}f''-\psi, \\
 & & & & (44)\equiv\psi, & (45)=\frac{1}{2}\psi'.
\end{array}
$$

Folglich wird (9) zu:

$$
(14)\qquad \boxed{\left|\tilde{\mathfrak{u}}\frac{d\tilde{\mathfrak{u}}}{dt}\frac{d^2\tilde{\mathfrak{u}}}{dt^2}\frac{d^3\tilde{\mathfrak{u}}}{dt^3}\right|^2\equiv\varphi^2-f=1\,.}
$$

Wir setzen das Koordinatensystem so voraus, dass

$$
(15)\qquad \boxed{\left|\tilde{\mathfrak{u}}\frac{d\tilde{\mathfrak{u}}}{dt}\frac{d^2\tilde{\mathfrak{u}}}{dt^2}\frac{d^3\tilde{\mathfrak{u}}}{dt^3}\right|=1}
$$

wird. Weiter gelten die folgenden Beziehungen:

$$
\begin{cases}
\eta_1=|\tilde{\mathfrak{u}}_2\tilde{\mathfrak{u}}_3'\tilde{\mathfrak{u}}_4''\tilde{\mathfrak{u}}_5'''|, & \text{usw.},\\
\eta_5=1=|\tilde{\mathfrak{u}}_1\tilde{\mathfrak{u}}_2'\tilde{\mathfrak{u}}_3''\tilde{\mathfrak{u}}_4'''|\,;
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\eta_m'=|\tilde{\mathfrak{u}}\,\tilde{\mathfrak{u}}'\,\tilde{\mathfrak{u}}''\,\tilde{\mathfrak{u}}^{IV}|, & (m=1,2,3,4)\,,\\
\eta_5'=0\,;
\end{cases}
$$

$$
(16)\qquad
\begin{gathered}
(\eta\tilde{\mathfrak{u}})_5=(\eta\tilde{\mathfrak{u}}')_5=(\eta\tilde{\mathfrak{u}}'')_5=(\eta\tilde{\mathfrak{u}}''')_5=0\,;\\
\begin{cases}
(\eta\tilde{\mathfrak{u}}^{IV})_5\equiv-(\eta'\tilde{\mathfrak{u}}''')_5=|\tilde{\mathfrak{u}}\,\tilde{\mathfrak{u}}'\,\tilde{\mathfrak{u}}''\,\tilde{\mathfrak{u}}'''\,\tilde{\mathfrak{u}}^{IV}|\,,\\
(\eta\tilde{\mathfrak{u}}^{V})_5\equiv-(\eta'\tilde{\mathfrak{u}}^{IV})_5=|\tilde{\mathfrak{u}}\,\tilde{\mathfrak{u}}'\,\tilde{\mathfrak{u}}''\,\tilde{\mathfrak{u}}'''\,\tilde{\mathfrak{u}}^{V}|\,.
\end{cases}
\end{gathered}
$$

Setzt man von (13) und (14) in

$$
\begin{vmatrix}
\tilde{\mathfrak{u}}^{IV} & \tilde{\mathfrak{u}}''' & \tilde{\mathfrak{u}}'' & \tilde{\mathfrak{u}}' & \tilde{\mathfrak{u}}\\
\tilde{\mathfrak{u}}_1^{IV} & \tilde{\mathfrak{u}}_1''' & \tilde{\mathfrak{u}}_1'' & \tilde{\mathfrak{u}}_1' & \tilde{\mathfrak{u}}_1\\
\tilde{\mathfrak{u}}_2^{IV} & \tilde{\mathfrak{u}}_2''' & \tilde{\mathfrak{u}}_2'' & \tilde{\mathfrak{u}}_2' & \tilde{\mathfrak{u}}_2\\
\tilde{\mathfrak{u}}_3^{IV} & \tilde{\mathfrak{u}}_3''' & \tilde{\mathfrak{u}}_3'' & \tilde{\mathfrak{u}}_3' & \tilde{\mathfrak{u}}_3\\
\tilde{\mathfrak{u}}_4^{IV} & \tilde{\mathfrak{u}}_4''' & \tilde{\mathfrak{u}}_4'' & \tilde{\mathfrak{u}}_4' & \tilde{\mathfrak{u}}_4
\end{vmatrix}
\cdot
\begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & \tilde{\mathfrak{u}}_1''' & \tilde{\mathfrak{u}}_1'' & \tilde{\mathfrak{u}}_1' & \tilde{\mathfrak{u}}_1\\
0 & \tilde{\mathfrak{u}}_2''' & \tilde{\mathfrak{u}}_2'' & \tilde{\mathfrak{u}}_2' & \tilde{\mathfrak{u}}_2\\
0 & \tilde{\mathfrak{u}}_3''' & \tilde{\mathfrak{u}}_3'' & \tilde{\mathfrak{u}}_3' & \tilde{\mathfrak{u}}_3\\
0 & \tilde{\mathfrak{u}}_4''' & \tilde{\mathfrak{u}}_4'' & \tilde{\mathfrak{u}}_4' & \tilde{\mathfrak{u}}_4
\end{vmatrix}
=0
$$

ein, so erhält man die Differentialgleichung

$$
(17)\qquad \boxed{\tilde{\mathfrak{u}}^{IV}+\varphi\tilde{\mathfrak{u}}''+\tfrac{3}{2}\varphi'\tilde{\mathfrak{u}}'+(\tfrac{1}{2}\varphi''+1)\tilde{\mathfrak{u}}=0\,,}
$$

welcher die vier Komponenten von $\tilde{\mathfrak{u}}$ genügen müssen. Durch Multiplikation von (17) mit $\tilde{\mathfrak{u}}^{IV}$, erhält man nach (14):

$$
(18)\qquad \boxed{\psi\equiv\varphi^3-\varphi\varphi''+\tfrac{9}{4}\varphi'^2-2\varphi\,,}
$$

welche ψ mittels der φ allein darstellen lässt.

Setzt man weiter von (13), (14), (15), (16) und (18) in

$$\begin{vmatrix} \tilde{\mathfrak{u}}^{\mathrm{V}} & \tilde{\mathfrak{u}}^{\mathrm{IV}} & \tilde{\mathfrak{u}}''' & \tilde{\mathfrak{u}}'' & \tilde{\mathfrak{u}}' & \tilde{\mathfrak{u}} \\ \tilde{\mathfrak{u}}_1^{\mathrm{V}} & \tilde{\mathfrak{u}}_1^{\mathrm{IV}} & \tilde{\mathfrak{u}}_1''' & \tilde{\mathfrak{u}}_1'' & \tilde{\mathfrak{u}}_1' & \tilde{\mathfrak{u}}_1 \\ \tilde{\mathfrak{u}}_2^{\mathrm{V}} & \tilde{\mathfrak{u}}_2^{\mathrm{IV}} & \tilde{\mathfrak{u}}_2''' & \tilde{\mathfrak{u}}_2'' & \tilde{\mathfrak{u}}_2' & \tilde{\mathfrak{u}}_2 \\ \tilde{\mathfrak{u}}_3^{\mathrm{V}} & \tilde{\mathfrak{u}}_3^{\mathrm{IV}} & \tilde{\mathfrak{u}}_3''' & \tilde{\mathfrak{u}}_3'' & \tilde{\mathfrak{u}}_3' & \tilde{\mathfrak{u}}_3 \\ \tilde{\mathfrak{u}}_4^{\mathrm{V}} & \tilde{\mathfrak{u}}_4^{\mathrm{IV}} & \tilde{\mathfrak{u}}_4''' & \tilde{\mathfrak{u}}_4'' & \tilde{\mathfrak{u}}_4' & \tilde{\mathfrak{u}}_4 \\ \tilde{\mathfrak{u}}_5^{\mathrm{V}} & \tilde{\mathfrak{u}}_5^{\mathrm{IV}} & \tilde{\mathfrak{u}}_5''' & \tilde{\mathfrak{u}}_5'' & \tilde{\mathfrak{u}}_5' & \tilde{\mathfrak{u}}_5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\mathfrak{u}}_1''' & \tilde{\mathfrak{u}}_1'' & \tilde{\mathfrak{u}}_1' & \tilde{\mathfrak{u}}_1 & \eta_1 \\ 0 & \tilde{\mathfrak{u}}_2''' & \tilde{\mathfrak{u}}_2'' & \tilde{\mathfrak{u}}_2' & \tilde{\mathfrak{u}}_2 & \eta_2 \\ 0 & \tilde{\mathfrak{u}}_3''' & \tilde{\mathfrak{u}}_3'' & \tilde{\mathfrak{u}}_3' & \tilde{\mathfrak{u}}_3 & \eta_3 \\ 0 & \tilde{\mathfrak{u}}_4''' & \tilde{\mathfrak{u}}_4'' & \tilde{\mathfrak{u}}_4' & \tilde{\mathfrak{u}}_4 & \eta_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ein, so erhält man die Differentialgleichung

$$\boxed{\begin{vmatrix} \tilde{\mathfrak{u}}^{\mathrm{V}} & \tilde{\mathfrak{u}}^{\mathrm{IV}} & \tilde{\mathfrak{u}}''' & \tilde{\mathfrak{u}}'' & \tilde{\mathfrak{u}}' & \tilde{\mathfrak{u}} \\ 2\phi\phi''-\phi^3-\frac{5}{4}\phi'^2+2\phi & \phi\phi' & \phi^2-1 & \frac{1}{2}\phi' & -\phi & 0 \\ \frac{1}{2}\phi'''-3\phi\phi' & \frac{1}{2}\phi''-\phi^2+1 & \frac{1}{2}\phi' & \phi & 0 & -1 \\ -2\phi''+\phi^2-1 & -\frac{3}{2}\phi' & -\phi & 0 & 1 & 0 \\ \frac{5}{2}\phi' & \phi & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \Phi'(t) & \Phi(t) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,} \tag{19}$$

welcher die *fünf* Komponenten von $\tilde{\mathfrak{u}}$ genügen müssen. Dabei ist die letzte Zeile $(\tilde{\mathfrak{u}}^{\mathrm{V}}\eta)_5$, $(\tilde{\mathfrak{u}}^{\mathrm{IV}}\eta)_5$, $(\tilde{\mathfrak{u}}'''\eta)_5$, $(\tilde{\mathfrak{u}}''\eta)_5$, $(\tilde{\mathfrak{u}}'\eta)_5$, $(\tilde{\mathfrak{u}}\eta)_5$ und ist

$$\boxed{(\eta\tilde{\mathfrak{u}}^{\mathrm{IV}})_5 \equiv \left| \tilde{\mathfrak{u}} \frac{d\tilde{\mathfrak{u}}}{dt} \frac{d^2\tilde{\mathfrak{u}}}{dt^2} \frac{d^3\tilde{\mathfrak{u}}}{dt^3} \frac{d^4\tilde{\mathfrak{u}}}{dt^4} \right| \equiv \Phi(t)} \tag{20}$$

gesetzt. Also *sind die zwei Gleichungen* (20) *und*

$$\boxed{\left(\frac{d^2\tilde{\mathfrak{u}}}{dt^2} \frac{d^2\tilde{\mathfrak{u}}}{dt^2} \right)_4 = \phi(t)} \tag{21}$$

für dreimal stetig differenzierbare Funktion $\Phi(t)$ und einmal stetig differenzierbare Funktion $\Phi(t)$ als natürliche Gleichungen der L-Torse $\tilde{\mathfrak{u}}=\tilde{\mathfrak{u}}(t)$ brauchbar, wobei (20) *durch uneigentliche Laguerresche Transformation ihr Vorzeichen umkehrt.*

Es lässt sich beweisen:

$$\boxed{i\left(\frac{dp}{dt}\right)^{10} = \Phi(t), \qquad idp^5 = \frac{|\mathfrak{u}\, d\mathfrak{u}\, d^2\mathfrak{u}\, d^3\mathfrak{u}\, d^4\mathfrak{u}|}{(d\mathfrak{u}\, d\mathfrak{u})_5^{\frac{1}{2}}}.} \tag{22}$$

Die Formel (10) wird zu:

$$\boxed{\tilde{\mathfrak{u}} = \frac{dt}{d\sigma}\mathfrak{u},} \tag{23}$$

wonach die Gleichung (7) wegen der Formeln[1] (17) und (19) in die folgende übergeht[2]:

$$\boxed{\left(\frac{dt}{d\sigma}\right)^2 = -i\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{P}\right).} \tag{24}$$

1) Tôhoku Sci. Rep., 22 (1933), S. 1005.

2) Die Formel (94) ebenda soll nach (24) berichtigt werden und die dortige Formel (95) ist ein Analogon.