PAPERS COMMUNICATED

101. *Über die Algebren über einem Körper von der Primzahlcharakteristik.*

Von Tadasi NAKAYAMA.
Mathematisches Institut der Kaiserlichen Universität zu Osaka.
(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Oct. 12, 1935.)

Es sei K ein Körper von der Primzahlcharakteristik p und $\mathfrak{A}$ eine normale einfache Algebra über K, deren Index *eine Potenz von* p ist. Wir beweisen

1. $\mathfrak{A}$ *besitzt stets Zerfällungskörper endlichen Grades, der vollständig zweiter Art über* K *ist.* Insbesondere: 1′. *Ist* K *vollkommen, so muss* $\mathfrak{A}\sim K$ *sein.*[1]

2. *Ist der Grad* $(K^{p^{-1}}:K)$ *von* $K^{p^{-1}}$ *über* K *endlich und zwar gleich* p^n, *so ist die* n*-te Potenz des Exponenten von* $\mathfrak{A}$ *durch ihren Index teilbar, wo* $K^{p^{-i}}$ *nach Steinitz*[2] *den Körper bedeutet, der aus den* p^i*-ten Wurzeln aller Elemente von* K *besteht.*

3. *Ist* $(K^{p^{-1}}:K)=p$, *so ist der Exponent von* $\mathfrak{A}$ *gleich ihrem Index und die zu* $\mathfrak{A}$ *ähnliche Divisionsalgebra besitzt einen maximalen Unterkörper, der vollständig von zweiter Art über* K *ist.*

Beweis: Es gibt nach Albert, Köthe, Noether, Zorn[3] einen galoisschen Zerfällungskörper L erster Art von $\mathfrak{A}$. Dann lässt sich die Algebrenklasse von $\mathfrak{A}$ als ein verschränktes Produkt darstellen:

$$\mathfrak{A}\sim(a_{R,S},L/K,\mathfrak{G}),$$

wo $\mathfrak{G}$ die galoissche Gruppe von L/K bedeutet.

Es gilt nun $L\cap K^{p^{-1}}=K$, da $K^{p^{-1}}/K$ keinen separablen Zwischenkörper besitzt. Es ist also $(LK^{p^{-1}}:K^{p^{-1}})=(L:K)$ und man kann $\mathfrak{G}$ als die galoissche Gruppe von $LK^{p^{-1}}/K^{p^{-1}}$ betrachten. In diesem Sinne gilt bekanntlich

$$\mathfrak{A}_{K^{p^{-1}}}\sim(a_{R,S},LK^{p^{-1}}/K^{p^{-1}},\mathfrak{G}).$$

Hier ist aber $LK^{p^{-1}}=L^{p^{-1}}$. Denn, wenn man zu jedem Element z von L seine (eindeutig bestimmte) p-te Wurzel zuordnet, so erhält man einen Isomorphismus von L mit $L^{p^{-1}}$, und dabei entspricht K zu $K^{p^{-1}}$. Also ist $(L^{p^{-1}}:K^{p^{-1}})=(L:K)$. Da aber $(L:K)=(LK^{p^{-1}}:K^{p^{-1}})$ ist, so muss $L^{p^{-1}}=LK^{p^{-1}}$ sein, da $L\subseteqq L^{p^{-1}}$ und $K^{p^{-1}}\subseteqq L^{p^{-1}}$, also $LK^{p^{-1}}\subseteqq L^{p^{-1}}$ ist. Daher gilt

1) 1′ findet sich schon in A. Albert: Normal division algebras over a modular field, Trans. Amer. Math. Soc. **36** (1934), S. 388–394.

2) E. Steinitz: Algebraische Theorie der Körper, Journal für Math. **137** (1910), S. 167–309.

3) G. Köthe: Über Schiefkörper mit Unterkörpern zweiter Art über dem Zentrum, Journal für Math. **166** (1932), S. 182–184; E. Noether: Nichtkommutative Algebra, Math. Zeits. **37** (1933), S. 514–541; A. Albert, a. a. O.

$$\mathfrak{A}_{K^{p^{-1}}} \sim (a_{R,S}, L^{p^{-1}}/K^{p^{-1}}, \mathfrak{G}).$$

Wie man leicht sieht, kann man nun den obigen Isomorphismus von $L^{p^{-1}}$ auf L zum Isomorphismus[4] von $(a_{R,S}, L^{p^{-1}}/K^{p^{-1}}, \mathfrak{G})$ auf $(a^p_{R,S}, L/K, \mathfrak{G})$ erweitern.[5] Da aber $\mathfrak{A}^p \sim (a^p_{R,S}, L/K, \mathfrak{G})$ ist, so sind die Indizen bzw. Exponenten von $\mathfrak{A}_{K^{p^{-1}}}$ und $\mathfrak{A}^p$, also allgemein die Indizen bzw. Exponenten von $\mathfrak{A}_{K^{p^{-\nu}}}$ und $\mathfrak{A}^{p^\nu}$ zueinander gleich.

Bedeutet p^a bzw. p^b den Index bzw. den Exponenten von $\mathfrak{A}$ $(a \geqq b \geqq 0)$,[6] so gilt $\mathfrak{A}_{K^{p^{-b}}} \sim K^{p^{-b}}$, da $\mathfrak{A}^{p^b}$ zerfällt. Es gibt also einen Unterkörper K' von $K^{p^{-b}}$ derart, dass K' über K endlich ist, und dass $\mathfrak{A}_{K'}$ zerfällt. Da aber K'/K ersichtlich vollständig von zweiter Art ist, so ist die Behauptung 1 bewiesen.

Ist $K^{p^{-1}}/K$ endlich und zwar $(K^{p^{-1}}:K)=p^n$, so gilt bekanntlich $p^n=(K^{p^{-(i+1)}}:K^{p^{-i}})$ für jedes i. Also ist $(K^{p^{-b}}:K)=p^{nb}$. Da aber $K^{p^{-b}}$ ein Zerfällungskörper von $\mathfrak{A}$ ist, so muss p^{nb} durch den Index p^a teilbar sein. Damit ist 2 bewiesen.

Es sei schliesslich $(K^{p^{-1}}:K)=p$, nämlich $n=1$. Dann ist p^b durch p^a teilbar, also $p^b=p^a$. Daher ist $K^{p^{-b}}=K^{p^{-a}}$ ersichtlich ein maximaler Unterkörper der zu $\mathfrak{A}$ ähnlichen Divisionsalgebra. Damit ist 3 bewiesen.

---

4) Dabei bedeutet der Isomorphismus nicht Operatorisomorphismus.

5) Man bemerke, dass $\sqrt[p]{z^R}=(\sqrt[p]{z})^R$ $(z \in L,\ R \in \mathfrak{G})$ ist.

6) Dass der Index einer Algebrenklasse durch ihren Exponent teilbar ist, wurde von R. Brauer erstens für Algebrenklassen über vollkommenen Körpern bewiesen. Aber dasselbe gilt auch für Algebrenklassen über unvollkommenen Körpern, da sie, wie oben angegeben, stets als verschränkte Produkte dargestellt werden. Vgl. hierzu die in der Anmerkung 1) zitierte Arbeit von A. Albert.