118. *Sur l'unicite de la solution d'un système d'équations différentielles ordinaires.*

Par Masuo HUKUHARA.
Institut de mathématiques, l'université de Hokkaidô, Sapporo.
(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., Nov. 12, 1935.)

1. Soit donné un système d'équations différentielles

$$(1)\qquad \frac{dz_j}{dx}=g_j(x, z_1, \ldots\ldots, z_n) \qquad (j=1, 2, \ldots\ldots, n),$$

dont les seconds membres sont des fonctions continues dans le domaine

$$(2)\qquad 0\leqq x\leqq a, \quad |z_1|\leqq hx, \quad \ldots\ldots, \quad |z_n|\leqq hx$$

et s'annulant pour $z_1=\cdots\cdots=z_n=0$. Considérons, d'autre part, n fonctions $\varphi_j(x, z_1, \ldots\ldots, z_n)$ $(j=1, 2, \ldots\ldots, n)$ satisfaisant aux conditions suivantes.

(A) Elles sont continues dans le domaine (2) et admettent les dérivées partielles du premier ordre.

(B) Elles s'annulent pour $z_1=\cdots\cdots=z_n=0$, et inversement $\varphi_1=\cdots\cdots=\varphi_n=0$ entraînent $z_1=\cdots\cdots=z_n=0$.

(C) On a

$$(3)\qquad \sum_{j=1}^{n}\left\{\frac{\partial\varphi_j^2}{\partial x}+\sum_{k=1}^{n}g_k\frac{\partial\varphi_j^2}{\partial z_k}\right\}\leqq 0$$

dans le domaine (2).

Si l'on porte dans $\sum\varphi_j^2$ une solution quelconque de (1), on obtient, d'après (C), une fonction décroissante de x. Si donc $z_j=z_j(x)$ $(j=1, 2, \ldots\ldots, n)$ est une solution de (1) s'annulant pour $x\to+0$ et continue dans $0\leqq x\leqq\delta$, on a

$$\sum_{j=1}^{n}\varphi_j\big(x, z(x)\big)^2\leqq\sum_{j=1}^{n}\varphi_j\big(x_0, z(x_0)\big)^2 \quad \text{pour} \quad x_0\leqq x\leqq\delta.$$

En faisant $x_0\to+0$, on obtient, d'après (A) et (B),

$$\sum_{j=1}^{n}\varphi_j\big(x, z(x)\big)^2=0 \quad \text{pour} \quad 0\leqq x\leqq\delta,$$

ce qui entraîne d'après (B), $z_j(x)=0$ $(j=1, 2, \ldots\ldots, n)$ pour $0\leqq x\leqq\delta$. Par conséquent,[1] *s'il existe n fonctions $\varphi_j(x, z)$ satisfaisant aux conditions (A), (B) et (C), le système différentiel* (1) *n'admet pas de solution non identiquement nulle et s'annulant pour $x\to+0$.*

2. Considérons ensuite le système différentiel

$$(4)\qquad \frac{dy_j}{dx}=f_j(x, y_1, \ldots\ldots, y_n) \qquad (j=1, 2, \ldots\ldots, n),$$

1) Dans le cas de $n=1$, cette condition suffisante d'unicité est en même temps nécessaire. Voir H. Okamura: Sur l'unicité de la solution de $\frac{dy}{dx}=f(x, y)$ (Mem. Col. Sc., Kyoto Imp. Univ. Ser. A, 1934).

dont les seconds membres sont des fonctions continues dans le domaine

$$(5)\qquad 0\leqq x\leqq a_1\,,\qquad |y_1-a_1x|\leqq h_1x\,,\qquad \ldots\ldots,\qquad |y_n-a_nx|\leqq h_1x\,,$$

$a_1, \ldots\ldots, a_n$ désignant les valeurs de $f_1, \ldots\ldots, f_n$ à l'origine. Le système différentiel (4) admet au moins une solution s'annulant pour $x\to+0$. Désignons par $y_j=y_j(x)$ $(j=1, 2, \ldots\ldots, n)$ cette solution. Si l'on pose $y_j=z_j+y_j(x)$ $(j=1, 2, \ldots\ldots, n)$, on obtient (1) où

$$g_j(x, y)=f_j\big(x, z+y(x)\big)-f_j\big(x, y(x)\big)\,,$$

Si l'on pose

$$\varphi_j(x, z)=\Phi_j\big(x, y(x), z\big)\qquad (j=1, 2, \ldots\ldots, n)\,,$$

l'inégalité (3) devient

$$(6)\qquad \sum_{j=1}^{n}\left\{\frac{\partial\Phi_j^2}{\partial x}+\sum_{k=1}^{n}f_k(x, y)\frac{\partial\Phi_j^2}{\partial y_k}+\sum_{k=1}^{n}\Big[f_k(x, y+z)-f_k(x, y)\Big]\frac{\partial\Phi_j^2}{\partial z_k}\right\}\leqq 0\,.$$

On arrive donc à cette conclusion.[1] *S'il existe n fonctions $\Phi_j(x, y, z)$ satisfaisant aux conditions suivantes (A′), (B′) et (C′) le système différentiel* (4) *n'admet qu'une solution s'annulant pour* $x\to+0$.

(A′) Elles sont continues dans le domaine

$$(7)\qquad 0\leqq x\leqq a_1\,,\qquad |y_j-a_jx|\leqq h_1x\,,\qquad |y_k+z_k-a_kx|\leqq h_1x$$
$$(j, k=1, 2, \ldots\ldots, n)$$

et admettent les dérivées partielles du premier ordre.

(B′) Elles s'annulent pour $z_1=\cdots\cdots=z_n=0$ et inversement $\Phi_1=\cdots\cdots=\Phi_n=0$ entraînent $z_1=\cdots\cdots=z_n=0$.

(C′) On a (6) dans le domaine (7).

3. Du théorème établi ci-dessus on peut déduire le théorème suivant.

Si les nombres $a_1, \ldots\ldots, a_n$ sont tous positifs et s'il existe une fonction continue $F(t)$ telle que

$$(8)\qquad |f_j(x, y+z)-f_j(x, y)|\leqq\sum_{k=1}^{n}\Big\{F(y_k+|z_k|)-F(y_k)\Big\}$$
$$(j=1, 2, \ldots\ldots, n)\,,$$

le système différentiel (4) *n'admet qu'une solution s'annulant pour* $x\to+0$.

La conclusion reste la même si l'on remplace les inégalités (8) par les suivantes :[2]

$$(9)\qquad |f_j(x, y+z)-f_j(x, y)|\leqq F(|y|+|z|)-F(|y|)$$
$$(j=1, 2, \ldots\ldots, n)\,.$$

En effet, pour obtenir (8) ou (9), il suffit de poser

$$\Phi_j(x, y, z)^2=\sum_{k=1}^{n}\int_{y_k}^{y_k+|z_k|}[F(\delta)-F(t)]dt$$

ou

1) Cf. H. Okamura: loc. cit.

2) $|y|$ désigne la quantité $\sqrt{y_1^2+\cdots\cdots+y_n^2}$.

$$\Phi_j(x, y, z)^2 = \int_{|y|}^{|y|+|z|} [F(\delta) - F(t)]dt .$$

De la condition d'unicité (9), on peut déduire le théorème suivant.

Si $f(x, z)$ est une fonction continue dans le domaine

$$0 \leqq x \leqq a , \qquad |y - \alpha x| \leqq hx \qquad \left(\alpha = f(0, 0) \neq 0\right)$$

et régulière par rapport à z, l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y^{\frac{1}{m}}) ,$$

où m désigne un entier positif, admet m solutions et m seules s'annulant pour $x \to +0$.

Si l'on suppose la régularité de f relative à x, ce théorème résulte de ce que la solution s'annulant pour $x=0$ est une fonction régulière de $x^{\frac{1}{m}}$.