57. *Invariantentheorie des Integrals* $\int F(x, y, y', y'', y''')dx$.

Von Hitoshi HOMBU.

Mathematisches Seminar, Hokkaido Kaiserliche Universität, Sapporo.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., June 12, 1936.)

Kürzlich hat Herr Prof. E. Cartan die Theorie des Integrals $\int F(x, y, y', y'')dx$ gegenüber der Gruppe aller Berührungstransformationen der Ebene entwickelt. Seine eigene Methode in diesem Problem liegt darin, vier invarianten Pfaffschen Ausdrücke zu herleiten. Im Folgenden möchte ich mich mit dem Fall des Integrals $\int F(x, y, y', y'', y''')dx$ beschäftigen.

Von den fünf invarianten Pfaffschen Ausdrücken assoziert zu dem Integral, die wir auffinden möchten, setzen wir vier in der Gestalt voraus:

$$\text{(1a)}\qquad \begin{cases} \omega = Fdx + \alpha\delta y'' + \beta\delta y' + \gamma\delta y\,, \\ \omega_1 = \lambda\delta y\,, \\ \omega_2 \equiv \mu\delta y' \quad (\text{mod. } \delta y)\,, \\ \omega_3 \equiv \nu\delta y'' \quad (\text{mod. } \delta y, \delta y')\,, \end{cases}$$

wobei

$$\delta y'' = dy'' - y'''dx\,, \qquad \delta y' = dy' - y''dx\,, \qquad \delta y = dy - y'dx$$

gesetzt sind. Von den fünften Pfaffschen Ausdruck ω_4 fordern wir, dass die Relation

$$\text{[I]}\qquad \omega' \equiv [\omega_3\omega_4] \quad (\text{mod. } \omega_1, \omega_2)$$

besteht, dadurch erhalten wir

$$\text{(2)}\qquad \alpha = F_{y'''}\,,$$

$$\text{(1b)}\qquad \omega_4 \equiv \frac{1}{\nu}\Big[-dF_{y'''} + (F_{y''} - \beta)dx\Big] \quad (\text{mod. } \omega_1, \omega_2, \omega_3)\,.$$

Aus den neuen Forderungen [II], [III], [IV]

$$\text{[II]}\qquad \omega_1' \equiv [\omega\omega_2] + a[\omega_2\omega_3] \quad (\text{mod. } \omega_1)\,,$$

$$\text{[III]}\qquad \omega_2' \equiv [\omega\omega_3] \quad (\text{mod. } \omega_1, \omega_2)\,,$$

$$\text{[IV]}\qquad \omega_3' \equiv \varepsilon[\omega\omega_4] \quad (\text{mod. } \omega_1, \omega_2, \omega_3)\,,$$

wo a eine passend gewählte Invariante ist und $\varepsilon = +1$ oder -1, ergeben sich

$$\lambda = \mu F\,, \qquad \mu = \nu F\,, \qquad \nu^2 = -\varepsilon F F_{y'''y'''}\,, \qquad \alpha = a\nu\,,$$

somit, unter der Bedingung $F_{y'''y'''} \neq 0$,

$$\text{(3)}\qquad \begin{aligned} &\lambda = F^2(-\varepsilon F F_{y'''y'''})^{\frac{1}{2}}\,, \qquad \mu = F(-\varepsilon F F_{y'''y'''})^{\frac{1}{2}}\,, \\ &\nu = (-\varepsilon F F_{y'''y'''})^{\frac{1}{2}}\,, \qquad a = F_{y'''}(-\varepsilon F F_{y'''y'''})^{-\frac{1}{2}}\,. \end{aligned}$$

Man darf $\varepsilon = \pm 1$ so bestimmen, dass ν reel sei.

1) E. Cartan, La géométrie de l'intégrale $\int F(x, y, y', y'')dx$, Journal de Mathématiques pures et appliquées, (9) **15** (1936), S. 42-69.

Die Pfaffschen Ausdrücke $\omega-\omega_4$ sind bis auf die Transformationen von der folgenden Gestalt bestimmt:

$$(4)\qquad \begin{cases} \overline{\omega}=\omega+u\omega_1+v\omega_2\,, & \overline{\omega}_1=\omega_1\,,\\ \overline{\omega}_2=\omega_2+w\omega_1\,, & \overline{\omega}_3=\omega_3+r\omega_1+s\omega_2\,,\\ \overline{\omega}_4=\omega_4+p\omega_1+q\omega_2+m\omega_3-v\omega\,, \end{cases}$$

wobei die Koeffizienten von $\omega-\omega_3$ beliebige Invarianten sein dürfen. Unter der Zugrundlegung eines Systems von solchen $\omega-\omega_4$ haben wir wegen [II]

$$\omega_1'=[\omega-a\omega_3,\ \omega_2]+[\omega_1,\ b\omega+b_2\omega_2+b_3\omega_3]+k[\omega_1\omega_4]\,,$$

$$\left(k=\frac{(-\varepsilon FF_{y'''y'''})^{\frac{1}{2}}}{2F_{y'''y'''}}\left\{\frac{F_{y'''y'''y'''}}{F_{y'''y'''}}+5\frac{F_{y'''}}{F}\right\}\right).$$

Da die rechte Seite der letzten Gleichung sich folgendermassen umschreiben lässt:

$$[(\omega+b\omega_1)-a\omega_3,\ \omega_2-b\omega_1]+(b_3+ab)[\omega_1\omega_3]+k[\omega_1\omega_4]\,,$$

so kennen wir, dass mittels einer Transformation (4) die Gleichung in die Form

$$[\mathrm{II}']\qquad \omega_1'=[\omega\omega_2]+a[\omega_2\omega_3]+k[\omega_1\omega_4]+k'[\omega_1\omega_3]\quad (k' \text{ unbestimmt})$$

gebracht wird. Durch die Forderung [II′] sind $\omega-\omega_4$ bis auf die Transformationen (4) bestimmt, für welche

$$(5)\qquad \begin{gathered} w=-kv\,,\qquad \overline{k}'-k'=-aw-km\,,\\ (u-ar)-w(v-as)+kq+\overline{k}'s=0 \end{gathered}$$

bestehen. Aus [III] erhalten wir

$$\omega_2'\equiv[\omega\omega_3]+[\omega_2,\ c\omega+c_3\omega_3]+l[\omega_2\omega_4]\quad (\mathrm{mod.}\ \omega_1)\,,$$

welche durch eine neue Transformation in die Form

$$[\mathrm{III}']\qquad \omega_2'\equiv[\omega\omega_3]+l[\omega_2\omega_4]+l'[\omega_2\omega_3]\quad (\mathrm{mod.}\ \omega_1)$$

$$\left(l=\frac{(-\varepsilon FF_{y'''y'''})^{\frac{1}{2}}}{2F_{y'''y'''}}\left\{\frac{F_{y'''y'''y'''}}{F_{y'''y'''}}+3\frac{F_{y'''}}{F}\right\};\ l' \text{ unbestimmt}\right)$$

übergeführt wird. Für die Transformationen, die die Gestalt von [III′] erhalten, haben wir

$$(6)\qquad s=-(k+l)v\,,\qquad \overline{l}'-l'=aw-v-lm\,.$$

Durch eine der noch zulässigen Transformationen verwandelt die Forderung [IV] sich in

$$[\mathrm{IV}']\qquad \omega_3'\equiv\varepsilon[\omega\omega_4]+l[\omega_3\omega_4]\quad (\mathrm{mod.}\ \omega_1,\ \omega_2)\,,$$

und für die zugehörigen Transformationen besteht

$$(7)\qquad \varepsilon m=-(k+2l)v\,.$$

Da nach (5), (6), (7)

$$aw-v-lm=-v\{ak+1-\varepsilon l(k+2l)\}\,,\qquad -aw-km=v\cdot k\{a+\varepsilon(k+2l)\}\,,$$

so können wir v so bestimmen, dass $\overline{l}'$ oder $\overline{k}'$ verschwinde, je nachdem $ak+1-\varepsilon l(k+2l)\neq 0$ oder $ak+1-\varepsilon l(k+2l)=0$, $k\{a+\varepsilon(k+2l)\}\neq 0$.

Wenn wir die Fälle, wo $ak+1-\varepsilon l(k+2l)$, $k\{a+\varepsilon(k+2l)\}$ beide verschwinden, d. h. entweder F^2 oder F^3 y''' linear enthält, ausschliessen, so sind $\omega-\omega_4$ wegen [I], [II′], [III′], [IV′] (k' oder $l'=0$) bis auf die Transformation bestimmt:

$$
(4') \qquad \bar{\omega}=\omega+u\omega_1, \quad \bar{\omega}_1=\omega_1, \quad \bar{\omega}_2=\omega_2, \quad \bar{\omega}_3=\omega_3+r\omega_1, \\
\bar{\omega}_4=\omega_4+p\omega_1+q\omega_2 \qquad (u-ar+kq=0),
$$

da $v=0$ und also nach (5), (6), (7) $w=s=m=0$. Um $\omega-\omega_4$ völlig zu bestimmen, dürfen wir die Forderungen

$$
[\mathrm{III}''] \qquad \omega_2'=[\omega\omega_3]+l[\omega_2\omega_4]+l'[\omega_2\omega_3]+\sum_{i=2}^{4} l_i[\omega_1\omega_i],
$$

$$
[\mathrm{IV}''] \qquad \omega_3'=\varepsilon[\omega\omega_4]+l[\omega_3\omega_4]+\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=i+1}^{4} m_{ij}[\omega_i\omega_j]
$$

aufstellen. Nun erreichen wir an den

Satz. *Sei ein Integral* $\int F(x, y, y', y'', y''')dx$ *gegeben. Wenn weder* F, F^2 *noch* F^3 *bezüglich* y''' *linear sind, so können wir durch die Relationen [I], [II′], [III″], [IV″] fünf Pfaffschen Ausdrücke, die gegenüber aller Berührungstransformationen der Ebene invariant sind, bestimmen; dabei tritt nur die Unbestimmtheit des Faktors* ± 1 *überall auf* ω_1, ω_2, ω_3 *ein. Wenn die äusseren Ableitungen von* $\omega-\omega_4$ *sich durch dieselben ausdrücken lassen, so sind die Koeffizienten die fundamentalen Invarianten, und bilden zusammen mit deren sukzessiven kovarianten Ableitungen das vollständiges System der Invarianten.*

H sei eine von x, y, y', y'', y''' abhängige Invariante. Wir drücken das totale Differential dH durch $\omega-\omega_4$ aus:

$$
dH=H_0\omega+H_1\omega_1+H_2\omega_2+H_3\omega_3+H_4\omega_4\,;
$$

die Koeffizienten H_0, H_1, H_2, H_3, H_4 werden kovariante Ableitungen von H genannt.

Zum Schluss berichte ich, dass ich die Theorie auf die allgemeine Massbestimmung $\int F(x, y, y', \cdots\cdots, y^{(m)})dx$ der Ebene erweitern konnte.

Dieses Problem wurde an dem Herrn Prof. A. Kawaguchis Seminar diskutiert.