75. *Die Geometrie des Integrals* $\int (a_i a_j x''^i x''^j + 2ba_i x''^i + c)^{\frac{1}{p}} dt.$

Von Shisanji HOKARI.

Geometrisches Seminar, Hokkaido Kaiserliche Universität, Sapporo.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., Oct. 12, 1936.)

Herr Prof. E. Cartan[1] hat neulich die Geometrie des Integrals $\int F(x, y, y', y'')dx$ gegenüber der Gruppe aller Berührungstransformationen der Ebene entwickelt. Allein seine Methode ist nicht auf die allgemeine n-dimensionale Mannigfaltigkeit anwendbar, in der die Grundlegung der Geometrie des Integrals $\int F(x, x', x'')dt$ sehr schwer ist. Daher ist dieses Problem noch ungelöst. Kürzlich jedoch hat Herr Prof. A. Kawaguchi[2] den speziellen Fall, in dem die Potenz F^p in bezug auf x''^i linear ist, behandelt. In dieser Arbeit möchte ich mich mit dem Falle des Integrals $\int (a_i a_j x''^i x''^j + 2ba_i x''^i + c)^{\frac{1}{p}} dt$ befassen[3].

1. In der speziellen Kawaguchischen Mannigfaltigkeit[4], wo die Potenz F^p gleich $a_i a_j x''^i x''^j + 2ba_i x''^i + c$ ist, wird das Integral

$$s = \int_{t_1}^{t_2} (a_i a_j x''^i x''^j + 2ba_i x''^i + c)^{\frac{1}{p}} dt \tag{1}$$

auf jeder in ihr enthaltenen Kurve $x^i = x^i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots\ldots, n)$ als *Bogenlänge* erklärt und s als *Invariante* definiert. Damit die Bogenlänge s bei der Transformation vom Parameter t sich nicht verändert, müssen die a_i, b und c den folgenden Bedingungen genügen[5]:

$$a_i x'^i (a_j x''^j + b) = 0\,, \tag{2}$$

$$4a_i x''^i (a_j x''^j + b) + x'^i \Big\{ (a_j a_k)_{(1)i} x''^j x''^k + 2x''^j (a_j b)_{(1)i} + c_{(1)i} \Big\} \tag{3}$$
$$= p(a_i a_j x''^i x''^j + 2ba_i x''^i + c)\,,$$

wobei $$a_{i(1)j} = \frac{\partial a_i}{\partial x'^j}\,, \qquad a_{i(0)j} = \frac{\partial a_i}{\partial x^j} \qquad \text{usw.}$$

Aus (2) ergibt sich $a_i x'^i = 0$ oder $a_j x''^j + b = 0$. Im letzteren Falle können wir das gegebene Integral in $\int c^{\frac{1}{p}} dt$ umformen. Dieses aber

1) E. Cartan, La géométrie de l'intégrale $\int F(x, y, y', y'')dx$, Journal de mathématiques pures et appliqués, **15** (1936), S. 42–69.

2) Siehe A. Kawaguchi, Die Geometrie des Integrals $\int (A_i x''^i + B)^{\frac{1}{p}} dt$, Proc. **12** (1936), S. 205–208.

3) a_i, b und c dürfen die Funktionen von x^i und x'^i sein.

4) H. V. Craig, American Journal of Mathematics, **57** (1935), S. 456–462.

5) Siehe A. Kawaguchi, Proc. **12** (1936), S. 149 oder H. V. Craig, a. a. O. S. 461.

hält nicht x''^i in sich. Deshalb schliessen wir den Fall aus, dass $a_j x''^j + b = 0$ ist: also folgt immer $a_i x'^i = 0$.

Weiterhin erhalten wir aus (3) die drei folgenden Gleichungssysteme:

$$(a_i a_j)_{(1)k} x'^k = (p-4) a_i a_j \,, \tag{4}$$

$$(a_i b)_{(1)k} x'^k = (p-2) a_i b \,, \tag{5}$$

$$c_{(1)k} x'^k = pc \,. \tag{6}$$

Aus (4) und (5) entnehmen wir

$$a_{i(1)k} x'^k = \left(\frac{p}{2} - 2\right) a_i \,, \qquad b_{(1)k} x'^k = \frac{p}{2} b \,, \tag{7}$$

d. h. die Funktionen a_i, b bzw. c sind in den x'^i homogen von $\left(\frac{p}{2}-2\right)$-ter, $\frac{p}{2}$-ter bzw. p-ter Dimension.

2. Wir können ohne Schwierigkeit die Beziehungen

$$\bar{a}_\alpha = A^i_\alpha a_i \,, \tag{8}$$

$$\bar{b} = b + a_i A^i_{\alpha\beta} x'^\alpha x'^\beta \,, \tag{9}$$

$$\bar{c} = c + a_i a_j A^i_{\alpha\beta} A^j_{\gamma\delta} x'^\alpha x'^\beta x'^\gamma x'^\delta \tag{10}$$

bei der Transformation $x^i \to x^\alpha$ berechnen, wobei $A^i_\alpha = \dfrac{\partial x^i}{\partial x^\alpha}$ und $A^i_{\alpha\beta} = \dfrac{\partial^2 x^i}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}$ sind. Infolge (8) wissen wir, dass a_i die Bestimmungszahlen eines Vektors sind. Auf Grund von (8), (9) und (10) haben wir auch die beiden Skalaren $\varphi = a_i x''^i + b$, $\psi = c - b^2$. Die letztere hängt nur von x^i und x'^i ab und ist in den x'^i homogen von p-ter Dimension. Benutzend diese Funktion ψ, können wir allen homogenen Grössen in den x'^i sowohl die Vermehrung als auch die Verminderung deren Grade ausführen. Wenn aber b^2 und c gleich sind, so verschwindet ψ identisch. Da φ und ψ beide Skalaren sind, so folgt daraus, dass $f = \varphi + (\varepsilon\psi)^{\frac{1}{2}}$ auch ein Skalar ist. Damit nun f reell sei, müssen wir entweder $\varepsilon = +1$ oder $\varepsilon = -1$ setzen.

3. Die oben erhaltene Funktion f spielt eine wichtige Rolle bei der Erklärung der Parallelübertragung in unserer allgemeinen Mannigfaltigkeit.

Um zur Parallelübertragung zu gelangen, bilden wir zunächst die beiden folgenden Grössen:

$$\begin{aligned} \xi_i &= \sum_{\lambda=1}^{2} (-1)^\lambda \binom{\lambda}{1} f_{(\lambda)i}^{\cdot\,\cdot(\lambda-1)} \\ &= (2a_{i(1)j} - a_{j(1)i}) x''^j + 2a_{i(0)j} x'^j - b_{(1)i} - (\varepsilon\psi)^{\frac{1}{2}}{}_{(1)i} \,, \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \eta_i &= \sum_{\lambda=0}^{2} (-1)^\lambda f_{(\lambda)i}^{\cdot\,\cdot(\lambda)} \\ &= (a_{i(1)j} - a_{j(1)i}) x'''^j + (a_{i(1)j(1)k} - a_{j(1)i(1)k}) x''^j x''^k + (a_{j(0)i} - a_{j(1)i(0)k} x'^k \\ &\quad - b_{(1)i(1)j} + a_{i(0)j} + a_{i(0)k(1)j} x'^k + a_{i(1)j(0)k} x'^k - (\varepsilon\psi)^{\frac{1}{2}}{}_{(1)i(1)j}) x''^j \\ &\quad + a_{i(0)j(0)k} x'^j x'^k - b_{(1)i(0)j} x'^j + b_{(0)i} + (\varepsilon\psi)^{\frac{1}{2}}{}_{(0)i} - (\varepsilon\psi)^{\frac{1}{2}}{}_{(1)i(0)j} x'^j \,. \end{aligned} \tag{12}$$

ξ_i und η_i sind beide die Bestimmungszahlen je eines Vektors und verändern sich bei der Transformation $t \to t^*$ des Parameters t

$$\overset{*}{\xi}_i = \left(\frac{dt}{dt^*}\right)^{\frac{p}{2}-1} \xi_i + (p-3)\left(\frac{dt}{dt^*}\right)^{\frac{p}{2}-3} \frac{d^2t}{dt^{*2}} a_i ,$$

$$\overset{*}{\eta}_i = \left(\frac{dt}{dt^*}\right)^{\frac{p}{2}} \eta_i + \left(\frac{p}{2}-1\right)\left(\frac{dt}{dt^*}\right)^{\frac{p}{2}-2} \frac{d^2t}{dt^{*2}} \xi_i$$

$$+\left(\frac{p}{2}-1\right)\left(\frac{dt}{dt^*}\right)^{\frac{p}{2}-4} \left\{\frac{dt}{dt^*}\frac{d^3t}{dt^{*3}} + \left(\frac{p}{2}-3\right)\left(\frac{d^2t}{dt^{*2}}\right)^2\right\} a_i .$$

4. Schreiben wir der Kürze halber G_{ij} anstatt $2a_{i(1)j} - a_{j(1)i}$, so sind G_{ij} die Bestimmungszahlen 2-ter Stufe, und die Determinante $|G_{ij}|$ ist im allgemeinen für $p \neq 0, 3$ nicht gleich Null. So ergibt sich ein einziger kontravarianter Tensor G^{ik}, so dass:

$$G_{ij} G^{ik} = \delta_j^k .$$

Wir erhalten dann aus (11)

$$\xi_j G^{ji} = x''^i + 2\Lambda^i , \tag{13}$$

wobei

$$\Lambda^i = \frac{1}{2} G^{ji} \left\{ 2a_{j(0)k} x'^k - b_{(1)j} - (\varepsilon\psi)^{\frac{1}{p}}{}_{(1)j} \right\} .$$

Die Gleichungen (13) geben uns eine Grundübertragung. Λ^i hängt nur von x^i und x'^i ab. Dazu ist diese Funktion in den x'^i homogen von 2-ter Dimension. Da Λ^i höchstens x^i und x'^i enthält und (13) uns die Grundübertragung gibt, so dürfen wir setzen, dass alle Grössen unserer Mannigfaltigkeit nur von x^i und x'^i abhängig sind. Z. B. sind die Bestimmungszahlen v^i eines kontravarianten Vektors die Funktionen von x^i und x'^i, d. h. $v^i = v^i(x, x')$.

Die Übertragung längs der gegebenen Kurve und solche nach willkürlicher Richtung werden ohne Schwierigkeit so gegeben, dass sie bei der Transformation des Parameters t unabhängig sind, d. h.

$$\frac{\delta v^i}{dt} = \frac{dv^i}{dt} + \Lambda^i_{(1)j} v^j , \tag{14}$$

$$\delta v^i = dv^i + \Lambda^i_{(1)j(1)k} v^j dx^k . \tag{15}$$

Aus (15) ergeben sich die kovarianten Ableitungen:

$$\nabla_j v^i = \frac{\partial v^i}{\partial x^j} - \frac{\partial v^i}{\partial x'^k} \Lambda^k_{(1)j} + \Lambda^i_{(1)k(1)j} v^k , \qquad \overset{1}{\nabla}_j v^i = \frac{\partial v^i}{\partial x'^j} .$$

Wenn wir b^2 gleich c und $2p$ anstatt p annehmen, so ist die oben erwähnte Übertragung mit der Kawaguchischen vollständig identisch. Dann gilt der

Satz. *Ein Integral* $\int (a_i a_j x''^i x''^j + 2ba_i x''^i + c)^{\frac{1}{p}} dt$ *sei gegeben. Wenn die Determinante* $|G_{ij}|$ *nicht gleich Null ist, so können wir eine Übertragung unserer Mannigfaltigkeit, die als speziellen Fall die Kawaguchische Übertragung enthält, geben.*

5. Auf dieselbe Weise ergibt sich auch durch den Vektor η_i eine Übertragung. Bezüglich dieser Tatsache mit allen seinen Einzelheiten

kann man in der Kawaguchischen Arbeit, bei der die Potenz F^p in bezug auf x''^i linear ist, nachschlagen.

Zum Schlusse sei noch erwähnt, dass ich die Theorie auf die allgemeine Massbestimmung $\int\left\{\sum_{\lambda=0}^{m} a_x^{m-\lambda} b_\lambda\right\}^{\frac{1}{p}} dt$ erweitern konnte, wobei gesetzt ist: $a_x = a_i x''^i$.