PAPERS COMMUNICATED

36. *Beweis eines Satzes in der Darstellungstheorie.*

Von Masaru OSIMA.

Mathematical Institute, Osaka Imperial University.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., May 12, 1937.)

Es sei K ein algebraisch-abgeschlossener Körper, $\mathfrak{G}$ eine endliche Gruppe von der Ordnung g. Ist die Charakteristik von K gleich Null oder eine Primzahl, die in g nicht aufgeht, so ist die Anzahl der verschiedenen irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{G}$ in K gleich der Anzahl der Klassen konjugierter Elemente von $\mathfrak{G}$. In ihrer Arbeit[1] haben T. Nakayama und K. Shoda diesen wohlbekannten Satz folgendermassen verallgemeinert: Es sei $\mathfrak{H}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Die Anzahl der verschiedenen Darstellungen von $\mathfrak{G}$ in K, die durch absolut irreduzible Darstellungen von $\mathfrak{H}$ induziert werden, ist gleich der Anzahl der in $\mathfrak{H}$ enthaltenen Klassen der in $\mathfrak{G}$ konjugierten Elemente. Nach Anregung von K. Shoda untersuche ich im Folgenden den Fall, wo die Charakteristik p von K in g aufgeht, und ich erhalte den folgenden

Satz. *Es sei $\mathfrak{H}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$, dessen Index zu p teilerfremd ist. Die Anzahl der verschiedenen Darstellungen von $\mathfrak{G}$ in K, die durch absolut irreduzible Darstellungen von $\mathfrak{H}$ induziert werden, ist gleich der Anzahl der in $\mathfrak{H}$ enthaltenen Klassen der in $\mathfrak{G}$ konjugierten Elemente, in denen die Ordnung der Elemente zu p teilerfremd ist.*

Es sei $\mathfrak{H}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$, dessen Index zu p teilerfremd ist, und

$$\mathfrak{G}=\mathfrak{H}+\mathfrak{H}G_1+\cdots\cdots+\mathfrak{H}G_{t-1} \qquad t\not\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod.}\ p)$$

eine Zerlegung von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{H}$. Dann erhalten wir unmittelbar

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{h}G_1+\cdots\cdots+\mathfrak{h}G_{t-1},$$

wo $\mathfrak{g}$ bzw. $\mathfrak{h}$ der Gruppenring von $\mathfrak{G}$ bzw. $\mathfrak{H}$ ist.

Hilfssatz 1. Ist $\mathfrak{n}$ das Radikal von $\mathfrak{h}$, so ist $\bar{\mathfrak{n}}=\mathfrak{n}+\mathfrak{n}G_1+\cdots\cdots+\mathfrak{n}G_{t-1}$ das Radikal von $\mathfrak{g}$.

Beweis. $\bar{\mathfrak{n}}$ ist ersichtlich ein nilpotentes Ideal von $\mathfrak{g}$, und es gilt

$$\mathfrak{g}/\bar{\mathfrak{n}}\cong\mathfrak{h}/\mathfrak{n}+\mathfrak{h}/\mathfrak{n}G_1+\cdots\cdots+\mathfrak{h}/\mathfrak{n}G_{t-1}.$$

Daraus folgt $\bar{d}=(t^a d)^t\not\equiv 0$ (mod. p), wobei d, bzw. $\bar{d}$, die Diskriminante von $\mathfrak{h}/\mathfrak{n}$ bezüglich der reduzierten Darstellung $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{h}/\mathfrak{n}$, bzw. die Diskriminante von $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ bezüglich der durch $\mathfrak{D}$ induzierten Darstellung von $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ ist und a den Rang von $\mathfrak{h}/\mathfrak{n}$ bedeutet.

Aus Hilfssatz 1 folgt

Hilfssatz 2. Die Darstellungen von $\mathfrak{G}$ in K, die durch absolut irreduzible Darstellungen von $\mathfrak{H}$ induziert werden, sind vollständig reduzibel.

1) T. Nakayama und K. Shoda, Über die Darstellung einer endlichen Gruppe durch halblineare Transformationen, Jap. Journ. of Math. **12** (1936).

Bezeichnet man die absolut irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{G}$ bzw. $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{D}_1^*, \mathfrak{D}_2^*, \ldots\ldots$, bzw. $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots\ldots$, deren Charaktere $\chi_1^*, \chi_2^*, \ldots\ldots$, $\chi_1, \chi_2, \ldots\ldots$ sind, so gilt nach Levitzki[1]

$$\text{(1)} \qquad \chi_\lambda^*(R)=\sum_i \gamma_{i\lambda}\chi_i(R) \qquad R\in\mathfrak{H},$$

$$\psi_{\chi_i}(R)=\sum_\lambda \gamma_{i\lambda}\chi_\lambda^*(R) \qquad R\in\mathfrak{G},$$

wobei ψ_{χ_i} den Charakter der durch $\mathfrak{D}_i$ induzierten Darstellung von $\mathfrak{G}$ bedeutet. Da in unserem Falle $\mathfrak{H}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$ ist, so gilt ferner

$$\text{(2)} \qquad \gamma_{i\lambda}=\frac{\chi_\lambda^*(E)}{s_i\chi_i(E)} \not\equiv 0 \qquad (\text{mod. } p),$$

wo s_i die Anzahl der mit $\mathfrak{D}_i$ in $\mathfrak{G}$ konjugierten Darstellungen von $\mathfrak{H}$ ist. Es gilt also

$$\text{(3)} \qquad \chi_\lambda^*(R)=\frac{\chi_\lambda^*(E)}{s_i\chi_i(E)}\sum_j \chi_i^{(j)}(R)$$

wo $\chi_i^{(j)}$ auf alle Charaktere der mit $\mathfrak{D}_i$ in $\mathfrak{G}$ konjugierten Darstellungen durchläuft.

Bezeichnet man mit $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots\ldots, \mathfrak{D}_l$ die einander nicht in $\mathfrak{G}$ konjugierten, irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{H}$, so sind die Charaktere ψ_{χ_i} $(i=1, 2, \ldots\ldots, l)$ der durch $\mathfrak{D}_i$ induzierten, nicht äquivalenten Darstellungen Γ_i von $\mathfrak{G}$ linear unabhängig. Im Folgenden beschränken wir uns auf solche Darstellungen Γ von $\mathfrak{G}$, welche durch die Darstellungen von $\mathfrak{H}$ induziert werden. Wir bezeichnen mit ψ_χ den Charakter von Γ.

Hilfssatz 3. Verschwindet $\psi_\chi(R)$ für alle Elemente R von $\mathfrak{H}$, deren Ordnung zu p teilerfremd ist, so verschwindet $\psi_\chi(R)$ für alle Elemente R von $\mathfrak{G}$.

Beweis. Da $\psi_\chi(R)$ ersichtlich für die in $\mathfrak{H}$ nicht enthaltenen Elemente R verschwindet, so verschwindet es für alle Elemente R von $\mathfrak{G}$, deren Ordnung zu p teilerfremd ist. Daraus folgt wie bei R. Brauer,[2] dass $\psi_\chi(R)=0$ für alle Elemente R von $\mathfrak{G}$.

Es sei die in $\mathfrak{H}$ enthaltenen Klassen der in $\mathfrak{G}$ konjugierten Elemente, in denen die Ordnungen der Elemente zu p teilerfremd sind, wie $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots\ldots, \mathfrak{C}_k$ numeriert. Dann erhalten wir $l\leqq k$. Wir zeigen jetzt, dass es k verschiedene Darstellungen Γ_i gibt.[3] Es sei $l<k$. Dann kann man Grössen $\eta_\varkappa$ aus K auf nichttriviale Weise so bestimmen, dass $\sum_\varkappa \eta_\varkappa\psi_{\chi_i}^\varkappa=0$ und folglich für alle Charaktere

$$\text{(4)} \qquad \sum_\varkappa \eta_\varkappa\psi_\chi^\varkappa=0$$

ist, wobei $\psi_{\chi_i}^\varkappa$ bzw. $\psi_\chi^\varkappa$ den Wert von ψ_{χ_i} bzw. ψ_χ für die Elemente der Klasse $\mathfrak{C}_\varkappa$ bedeutet. Wir wollen (4) als unmöglich nachweisen und

1) J. Levitzki, Über vollständig reduzible Ringe und Unterringe, Math. Zeitschr. **33** (1931).

2) R. Brauer, Über die Darstellung von Gruppen in Galoisschen Feldern, Actualités scientifiques et industrielles **195** (1935).

3) In Bezug auf die Folgenden vgl. R. Brauer a. a. O.

nehmen dazu an, dass die Unmöglichkeit der entsprechenden Aussagen für Gruppen kleinerer Ordnung bereits nachgewiesen sei.

Es sei Q ein Element von $\mathfrak{H}$, dessen Ordnung q zu p teilerfremd ist. Wir betrachten die Gruppe der mit Q vertauschbaren Elemente von $\mathfrak{H}$, und wir suchen in ihr eine zu p gehörige Sylowgruppe $\mathfrak{P}$ von der Ordnung etwa p^μ. Dann erzeugen Q und $\mathfrak{P}$ eine Untergruppe K von der Ordnung qp^μ von $\mathfrak{H}$. Ist $\mathfrak{U}$ die durch Q erzeugte Untergruppe von $\mathfrak{H}$, so stimmt K mit dem direkten Produkt $\mathfrak{U} \times \mathfrak{P}$ überrein. Es sei $P_1, P_2, \ldots\ldots, P_n$ ein vollständiges rechtsseitiges Restsystem von $\mathfrak{H}$ nach $\mathfrak{K}$, $\psi(R)$ ein beliebiger Charakter von $\mathfrak{K}$. Setzt man für die in $\mathfrak{K}$ nicht enthaltenen Elemente S von $\mathfrak{H}$ $\psi(S)=0$, so stellt

$$\sum_{\nu=1}^{n} \psi(P_\nu R P_\nu^{-1}) = \chi(R) \qquad (R \in \mathfrak{H}) \tag{5}$$

einen Charakter von $\mathfrak{H}$ dar. Wir erhalten aus (5) für die Elemente R von der zu p teilerfremden Ordnung

$$\chi(R) = \sum_{\lambda=1}^{q} z_\lambda \psi(Q^\lambda)\,, \tag{6}$$

wobei z_λ bei festem λ die Anzahl der P_ν bezeichnet, für die $P_\nu R P_\nu^{-1} = Q^\lambda$ gilt. Nach Konstruktion von $\mathfrak{P}$ ergibt sich

$$z_1 \not\equiv 0 \qquad (\text{mod. } p) \qquad (\text{für } R=Q)\,. \tag{7}$$

Ist R nicht zu Q konjugiert in $\mathfrak{H}$, so folgt $z_1=0$, also für die in $\mathfrak{G}$ nicht zu Q konjugierte Elemente R gilt es offenbar

$$z_1 = 0 \qquad (R \text{ nicht zu } Q \text{ konjugiert in } \mathfrak{G})\,. \tag{8}$$

Setzt man für die in $\mathfrak{H}$ nicht enthaltenen Elemente S von $\mathfrak{G}$ $\chi(S)=0$, so stellt $\sum_i \chi(G_i R G_i^{-1}) = \psi_\chi(R)$ einen Charakter von $\mathfrak{G}$ dar. Die Gesamtheit derartigen Elemente G von $\mathfrak{G}$, dass $G\,Q G^{-1}$ zu Q in $\mathfrak{H}$ konjugiert sind, bildet eine $\mathfrak{H}$ enthaltende Untergruppe von $\mathfrak{G}$, deren Ordnung wir mit rh bezeichnen. Es gilt offenbar $r \not\equiv 0$ (mod. p). Wegen (6) ist

$$\psi_\chi(Q) = \sum_{\lambda=1}^{q} r z_\lambda \psi(Q^\lambda)\,. \tag{9}$$

Für den eben konstruierten Charakter ψ_χ von $\mathfrak{G}$ muss (4) gelten; wir denken uns dabei die Klasse $\mathfrak{C}_a$ so gewählt, dass $\eta_a \neq 0$ ist; Q wählen wir als Element der Klasse $\mathfrak{C}_a$; wegen $a \leqq k$ ist dann tatsächlich die Ordnung q von Q zu p teilerfremd. Wegen (6) und (9) geht (4) in eine Formel der Gestalt

$$\sum_{\lambda=1}^{q} \omega_\lambda \psi(Q^\lambda) = 0 \tag{10}$$

über. Da ein Glied $\psi(G)$ dabei wegen (8) nur von der Klasse $\mathfrak{C}_a$ herrühren kann, so folgt $\omega_1 = r z_1 \eta_a \neq 0$. Die Relation (10) muss für alle Charaktere von $\mathfrak{K}$ gelten. Offenbar ist sie für die Gruppe $\mathfrak{K}$ von derselben Gestalt wie (4) für $\mathfrak{G}$. Schliesslich verschwinden nicht alle ω_a, es war ja $\omega_1 \neq 0$. Da wir aber bereits als bewiesen annehmen, dass für Gruppen von kleinerer Ordnung eine Relation dieser Form nicht bestehen kann, so bleibt nur der Fall $\mathfrak{G}=\mathfrak{H}=\mathfrak{K}$. In diesem Fall wählen wir für ψ einen linearen Charakter von $\mathfrak{U}$. Wegen $\mathfrak{K}=\mathfrak{P}\times\mathfrak{U}$ können wir ψ dann auch als Charakter von $\mathfrak{K}$ auffassen; es gilt daher (10). Multipliziert man die Gleichung (10) mit $\psi(Q^{-1})$ und addiert man über alle linearen Charaktere, so ergibt sich $q\omega_1=0$. Wegen $q \not\equiv 0$ (mod. p), $\omega_1 \not\equiv 0$ ergibt dies einen Widerspruch, $l<k$ ist damit als unmöglich erkannt.