90. *Bemerkung über den M. Moriyaschen Aufbau der Klassenkörpertheorie über Algebraischen Funktionenkörpern.*

Von Yukiyosi KAWADA.

Mathematisches Institut der Kaiserlichen Universität, Tokyo.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Nov. 12, 1937.)

Neulich hat M. Moriya die Klassenkörpertheorie über algebraischen Funktionenkörpern K in einer Unbestimmten mit endlichem Konstantenkörper rein arithmetisch-algebraisch konstruiert.[1] Daran anschliessend beweise ich in der vorliegenden Note den folgenden

Satz. *Es sei Z eine endliche separable zyklische Erweiterung vom Grade n über K. Es sei h der Index der Z zugeordnete Takagische Divisorengruppe*[2] *mod. $\mathfrak{f}$ in K. Dann ist*

$$h=n\big(\mathfrak{B}(A):\mathfrak{A}^{1-s}(A)\big)\,(\eta^*:\varepsilon_\nu)\,.$$

Dabei ist

$\mathfrak{f}$	der Führer[3] von Z/K,
s	ein erzeugender Automorphismus von Z/K,
$\mathfrak{A}$ bzw. A	die Gruppe aller Divisoren bzw. Elemente ($\neq 0$) aus Z,
$\mathfrak{B}(A)$	die Gruppe der Divisorenklassen des Hauptgeschlechtes,
η^* bzw. ε_ν	die Gruppe der Einheiten aus K, die Relativnorm eines Elementes aus Z bzw. Normenrest mod. $\mathfrak{f}$ sind.

Wie bei Chevalley[4] folgt aus diesem Satz der von Moriya ohne Hilfe der Analysis bewiesenen Satz:[1]

Es gibt in K einen Divisor, dessen Artin-Symbol vom Einselement der galoisschen Gruppe von Z/K verschieden ist.

Nachdem die volle Klassenkörpertheorie nach der Moriyaschen Methode aufgebaut und damit $h=n$ festgestellt wird, gewinnen wir wie bei der algebraischen Zahlentheorie *den Hauptgeschlechtsatz und Normensatz für relativzyklische Erweiterungen.*

Da all dies ohne Hilfe der Analysis bewiesen wird, so lässt sich die ganze Theorie der R. Brauerschen Algebrenklassengruppe über K, die Witt[5] mit Hilfe der Z-Funktion im Hyperkomplexen konstruierte, unter Zuhilfenahme vom Tsenschen Satze,[6] analog wie bei Hasse,[7] rein arithmetisch-algebraisch aufbauen.

---

1) M. Moriya, Rein arithmetisch-algebraischer Aufbau der Klassenkörpertheorie über algebraischen Funktionenkörpern in einer Unbestimmte mit endlichem Konstantenkörper. Proc. **13** (1937), 180–182.

2) Vgl. C. Chevalley, Sur la théorie du corps de classes dans les corps finis et les corps locaux. Jour. of Fac. of Sci. Tokyo, Sect. 1. Vol. II: **9** (1933), 425.

3) Vgl. H. Hasse, Die Struktur der R. Brauerschen Algegrenklassengruppe über einem algebraischen Zahlkörper. Math. Ann., **107** (1933), 755.

4) C. Chevalley, loc. cit. (2), 442.

5) E. Witt, Riemann-Rochscher Satz und Z-Funktion im Hyperkomplexen. Math. Ann., **110** (1935).

6) C. Tsen, Divisorenalgebren über Funktionenkörpern. Gött. Nach., 1933.

7) H. Hasse, loc. cit. (3).

Um den am Anfang erwähnten Satz zu beweisen, führe ich die folgenden Bezeichnungen ein:

$\mathfrak{a}$ bzw. a,	Die Gruppe aller Divisoren bzw. Elemente ($\neq 0$) aus K,
α,	Der Strahl mod. $\mathfrak{f}$ aus K,
ν,	Die Gruppe der Normenreste mod. $\mathfrak{f}$ aus K,
$\mathfrak{D}$ bzw. $\mathfrak{D}^*$,	Die Gruppe der schwach- bzw. stark ambigen Divisoren aus Z,
E bzw. H,	Die Gruppe aller Einheiten aus Z bzw. derjenigen Einheiten aus Z, deren Relativnormen in K gleich 1 sind,
ε bzw. η,	Die Gruppe aller Einheiten aus K bzw. derjenigen Einheiten aus K, die die Relativnormen von E sind,
$\mathfrak{b}$,	Die durch $\mathfrak{b}$ erzeugte zyklische Gruppe, wobei $\mathfrak{b}$ ein bestimmter Divisor aus K mit positivem Grade ist.

Unter $\mathfrak{a}_\mathfrak{f}$ u.s.w. verstehen wir die Gruppe aller Elemente aus $\mathfrak{a}$ u.s.w., die mit $\mathfrak{f}$ teilerfremd sind. N bedeutet immer die Relativnorm in Z/K.

Nach der Definition ist $h=\big(\mathfrak{a}_\mathfrak{f} : N\mathfrak{A}_\mathfrak{f}(a)\big)$. Aus den bekannten homomorphen Zuordnungen ergibt sich also

$$\big(\mathfrak{A} : \mathfrak{b}\mathfrak{B}(A)\big)=\big(N\mathfrak{A}_\mathfrak{f}(\alpha) : \mathfrak{b}^n(NA_\mathfrak{f})(\alpha)\big)=\frac{1}{h}\big(\mathfrak{a}_\mathfrak{f} : (NA_\mathfrak{f})\mathfrak{b}^n(\alpha)\big)$$

$$=\frac{1}{h}\big(\mathfrak{a}_\mathfrak{f} : \mathfrak{b}(NA_\mathfrak{f})(\alpha)\big)(\mathfrak{b} : \mathfrak{b}^n)=\frac{n}{h}\big(\mathfrak{a} : \mathfrak{b}(a)\big)\frac{(a_\mathfrak{f} : \nu)}{(\varepsilon : \varepsilon_\nu)}\,.$$

Daraus folgt

$$h=n\big(\mathfrak{B}(A) : \mathfrak{A}^{1-s}(A)\big)\frac{(a_\mathfrak{f} : \nu)\big(\mathfrak{a} : \mathfrak{b}(a)\big)}{(\varepsilon : \varepsilon_\nu)\big(\mathfrak{A} : \mathfrak{b}\mathfrak{A}^{1-s}(A)\big)}\,. \tag{1}$$

Wie bei der algebraischen Zahlentheorie ergibt sich ählicherweise

$$\big(\mathfrak{A} : \mathfrak{b}\mathfrak{A}^{1-s}(A)\big)=\big(\mathfrak{D} : \mathfrak{a}(A)\big)\big(\mathfrak{a}(A) : \mathfrak{b}(A)\big)\,,$$

$$\big(\mathfrak{D} : \mathfrak{a}(A)\big)=\big(\mathfrak{D}^{1-s} : (A)^{1-s}\big)(\mathfrak{D}^* : \mathfrak{a})\frac{1}{\big(\mathfrak{a}(\varDelta) : \mathfrak{a}\big)}\,,$$

wobei $(\varDelta)=\mathfrak{D}\cap(A)$ bedeutet. Daher ist

$$\frac{\big(\mathfrak{a} : \mathfrak{b}(a)\big)}{\big(A : \mathfrak{b}A^{1-s}(A)\big)}=\frac{\big((\varDelta) : (a)\big)}{\big(\mathfrak{D}^{1-s} : (A)^{1-s}\big)(\mathfrak{D}^* : \mathfrak{a})}=\frac{(H : E^{1-s})}{(\eta^* : \eta)(\mathfrak{D}^* : \mathfrak{a})}\,, \tag{2}$$

denn $\big((\varDelta) : (a)\big)=(H : E^{1-s})$, $\big(\mathfrak{D}^{1-s} : (A)^{1-s}\big)=(\eta^* : \eta)$ sind.

Aus (1) und (2) folgt

$$h=n\big(\mathfrak{B}(A) : \mathfrak{A}^{1-s}(A)\big)(\varepsilon_\nu : \eta^*)\frac{(H : E^{1-s})(a_\mathfrak{f} : \nu)}{(\varepsilon : \eta)(\mathfrak{D}^* : \mathfrak{a})}\,. \tag{3}$$

Unser Satz wird erledigt, wenn $(a_\mathfrak{f} : \nu)=(\mathfrak{D}^* : \mathfrak{a})$ und $(\varepsilon : \eta)=(H : E^{1-s})$ dargetan werden. Aber die erste Tatsache $(a_\mathfrak{f} : \nu)=(\mathfrak{D}^* : \mathfrak{a})$ wird nach dem bekannten Paradigma erledigt. Also kommt es darauf an, die zweite Tatsache $(H:E^{1-s})=(\varepsilon:\eta)$ zu beweisen.

Die Galoisfelder k, k' seien die Konstantenkörper von K bzw. Z. $K'=K\cdot k'$ ist dann ein Unterkörper von Z. Es seinen ferner $r=(k':k)=(K':K)$, $n=mr$, $m=m_0m_1$, $m_0=(m,\,q-1)$, wo q die Anzahl der Elemente aus k, σ ein erzeugendes Element von $E=\{\sigma\}$ bedeutet. Alsdann ist

$$(\varepsilon:\eta)=(\varepsilon:NE)=(\varepsilon:\varepsilon^m)=m_0\,.$$

Anderseits ist, wegen $\sigma^s=\sigma^q$, $E^{1-s}=\{\sigma^{q-1}\}$. Aus $N\sigma^j=1$, nämlich $\sigma^{mj(1+q+\cdots+q^{r-1})}=1$ ergibt sich ferner

$$jm\frac{q^r-1}{q-1}\equiv 0 \pmod{q^r-1}\,,\quad j\equiv 0 \left(\operatorname{mod.}\ \frac{q-1}{m_0}\right);$$

folglich $H=\{\sigma^{\frac{q-1}{m_0}}\}$. Daher ist $(H:E^{1-s})=m_0=(\varepsilon:\eta)$, w. z. b. w.