# 11. Die Projektive Theorie der "paths" 3-ter Ordnung $x^{(3)i}+H^i(x, x^{(1)}, x^{(2)})=0$.

Von Hitoshi HOMBU.

Geometrisches Seminar, Kaiserliche Hokkaido Universität, Sapporo.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., Feb. 12, 1938.)

1. In einer $n$-dimensionalen Mannigfaltigkeit, welche auf die Koordinaten $(x^i)$ bezogen ist, trägt ein System der verallgemeinerten "paths" 3-ter Ordnung, deren Gleichungen

$$x^{(3)i}+H^i(x, x^{(1)}, x^{(2)})=0 \tag{1}$$

($x^{(m)i}=d^m x^i/dt^m$, $m=1, 2, 3$) sind, den Parameter $t$ als *projektiv*, wenn die Beziehungen

$$\text{(2)} \qquad \text{(a)}\quad H^i_{(1)j}x^{(1)j}+2H^i_{(2)j}x^{(2)j}=3H^i, \qquad \text{(b)}\quad H^i_{(2)j}x^{(1)j}=-3x^{(2)i}$$

gelten.[1] Dann wird die *projektive* (oder *bahntreue*) Transformation, die (1) in ein anderes System der "paths" $x^{(3)i}+\tilde{H}^i(x, x^{(1)}, x^{(2)})=0$ überführt, einfach so geschrieben:

$$\tilde{H}^i(x, x^{(1)}, x^{(2)})=H^i(x, x^{(1)}, x^{(2)})+\rho(x, x^{(1)}, x^{(2)})x^{(1)i} \;{}^{1)} \tag{3}$$

Umgekehrt: *wenn ein System $x^{(3)i}+\check{H}^i=0$ und jedes mit ihm projektiv verwandte System $x^{(3)i}+\tilde{H}^i=0$ sich auf die Relation von der Gestalt wie (3) beziehen, so ist das System $x^{(3)i}+\check{H}^i=0$ mit einem* (nicht einzigem) *System $x^{(3)i}+H^i=0$, das den projektiven Parameter $t$ trägt, projektiv verwandt.*[2] (Der Beweis ist nicht schwierig.)

In dem Fall, wo in (3) nicht nur das ursprüngliche System sondern auch das transformierte System die projektiven Parameter tragen, haben wir sogleich

$$\text{(4)} \qquad \text{(a)}\quad \rho_{(1)j}x^{(1)j}+2\rho_{(2)j}x^{(2)j}=2\rho, \qquad \text{(b)}\quad \rho_{(2)j}x^{(1)j}=0.$$

Im folgenden möchten wir die Eigenschaften, welche von der Transformation (3) (mit der Bedingung (4)) nicht zerstört werden, untersuchen. Dadurch können wir nach dem oben erklärten Satz die Eigenschaften der grössten projektiven Klasse erkennen, von der je zwei Systeme sich auf eine Relation (3)[3] beziehen.

2. Aus (4) leiten wir her

$$\tilde{H}^i_{(1)j}=H^i_{(1)j}+\rho_{(1)j}x^{(1)i}+\rho\delta^i_j, \qquad \tilde{H}^l_{(i)l}=H^l_{(1)l}+\rho_{(1)l}x^{(1)l}+n\rho, \tag{5}$$

$$\tilde{H}^i_{(2)j}=H^i_{(2)j}+\rho_{(2)j}x^{(1)i}, \qquad \tilde{H}^l_{(2)l}=H^l_{(2)l}. \tag{6}$$

---

1) H. Hombu, Projektiver Parameter der verallgemeinerten "paths," Proc. **13** (1937), (4) bzw. (9).

2) Diese Systeme haben die kennzeichnende Eigenschaft, dass durch ein beliebiges Linienelement 2-ter Ordnung einzige Integralkurve jedes Systems existiert.

3) Dabei ist (4) nicht bedingt.

Nach (3), (5), (6) sind die Grössen $\mathfrak{H}^i$ und $\mathfrak{L}^{ij}_k$

$$(7)\qquad \begin{cases} \mathfrak{H}^i = H^i - \dfrac{1}{n-1}\left(H^l_{(1)l}x^{(1)i} - H^i_{(1)l}x^{(1)l}\right), \\[2ex] \mathfrak{L}^{ij}_k = \dfrac{1}{2}\left(H^i_{(2)k}x^{(1)j} - H^j_{(2)k}x^{(1)i}\right) \end{cases}$$

projektiv invariant, d. h. bei der Transformation (3) sind $\tilde{\mathfrak{H}}^i = \mathfrak{H}^i$, $\tilde{\mathfrak{L}}^{ij}_k = \mathfrak{L}^{ij}_k$. Umgekehrt, *wenn die Grössen $\mathfrak{H}^i$ und $\mathfrak{L}^{ij}_k$ zweier Systeme der "paths," die die Parameter als projektiv tragen, identisch sind, so überdecken die beiden Kurvensysteme einander.* Setzen wir nämlich $\tilde{H}^i - H^i = \rho^i$, so ergeben sich aus $\tilde{\mathfrak{H}}^i = \mathfrak{H}^i$, $\tilde{\mathfrak{L}}^{ij}_k = \mathfrak{L}^{ij}_k$

$$\text{(a)}\quad (n-1)\rho^i - \left(\rho^l_{(1)l}x^{(1)i} - \rho^i_{(1)l}x^{(1)l}\right) = 0\,, \qquad \text{(b)}\quad \rho^i_{(2)k}x^{(1)j} = \rho^j_{(2)k}x^{(1)i}.$$

Nach (b) nimmt $\rho^i$ die Gestalt $\rho x^{(1)i} + \sigma^i$ an, wo $\sigma^i$ von $x^{(2)j}$ unabhängig ist. Wegen $\rho^i_{(1)j}x^{(1)j} + 2\rho^i_{(2)j}x^{(2)j} = 3\rho^i$ können $\rho$ und $\sigma^i$ so gewählt werden, dass $\sigma^i$ in bezug auf $x^{(1)j}$ homogen von 3-ter Ordnung ist. Aus (a) haben wir dann $(n+2)\sigma^i = \sigma^l_{(1)l}x^{(1)i}$. Somit ist $\rho^i$ von der Gestalt $\rho x^{(1)i}$.

Wir können $\mathfrak{H}^i$ und $\mathfrak{L}^{ij}_k$ zusammen als Bestimmungszahlen eines geometrischen Objekts ansehen, da unter Koordinatentransformation

$$\begin{aligned} A^\lambda_i \mathfrak{H}^i = \mathfrak{H}^\lambda &+ \frac{4}{n-1}\mathfrak{L}^{\lambda\nu}_\mu A^l_\nu A^{(1)\mu}_l + \frac{3n}{n-1}A^\lambda_{jk}x^{(2)j}x^{(1)k} \\ &+ \frac{n+2}{n-1}A^\lambda_{jkl}x^{(1)j}x^{(1)k}x^{(1)l} - \frac{3}{n-1}A^\lambda_i x^{(1)i}A^{(2)\nu}_l A^l_\nu\,, \end{aligned}$$

$$A^{\lambda\nu}_{ik}\mathfrak{L}^{ik}_j = \mathfrak{L}^{\lambda\nu}_\mu A^\mu_j + 3A^{[\lambda}_{jk}A^{\nu]}_l x^{(1)k}x^{(1)l}$$

sind ($A^\lambda_i = \partial x^\lambda/\partial x^i$, $A^\lambda_{ij} = \partial^2 x^\lambda/\partial x^i \partial x^j$, usw.).

3. Da wir im folgenden die affine Theorie der verallgemeinerten "paths" brauchen, so vergleichen wir die grundlegenden Formeln dieser Theorie aus der Arbeit von Prof. A. Kawaguchi und dem Verfasser[1]: Gegeben sei das System (1), so erklären wir in der Mannigfaltigkeit der Linienelemente 2-ter Ordnung das kovariante Differential $\delta v^i$ eines Vektors $v^i$, das System der Grundübertragungen $\delta x^{(1)i}$ und $\delta x^{(2)i}$, und die kovarianten Ableitungen $\nabla^{(0)}_k v^i$, $\nabla^{(1)}_k v^i$ und $\nabla^{(2)}_k v^i$ folgendermassen:

$$(8)\qquad Dv^i = dv^i + \sum_{u=0}^{1}\underset{u}{\Gamma^i_{jk}}v^j dx^{(u)k}\,; \qquad (9)\qquad \delta x^{(q)i} = dx^{(q)i} + \sum_{r=0}^{q-1}Q^{i(r)}_{(q)j}dx^{(r)j}\,;$$

$$(10)\qquad \begin{cases} Dv^i = \displaystyle\sum_{q=0}^{2}\nabla^{(q)}_k v^i \cdot \delta x^{(q)k}\,; \qquad \nabla^{(2)}_k v^i = v^i_{(2)k}\,, \\[2ex] \nabla^{(q)}_k v^i = v^i_{(q)k} - \displaystyle\sum_{s=q+1}^{2}R^{l(q)}_{(s)k}v^i_{(s)l} + \underset{q}{\Gamma^{*i}_{jk}}v^j \equiv \bar{\nabla}^{(q)}_k v^i + \underset{q}{\Gamma^{*i}_{jk}}v^j\,; \end{cases}$$

wo

$$(11)\qquad \begin{cases} \underset{0}{\Gamma^i_{jk}} = \dfrac{1}{3}H^i_{(2)j(1)k}\,, \qquad \underset{1}{\Gamma^i_{jk}} = \underset{1}{\Gamma^{*i}_{jk}} = \dfrac{2}{3}H^i_{(2)j(2)k}\,, \\[2ex] \underset{0}{\Gamma^{*i}_{jk}} = \dfrac{1}{3}H^i_{(2)j(1)k} - \dfrac{2}{9}H^i_{(2)j(2)l}H^l_{(2)k}\,; \end{cases}$$

---

1) A. Kawaguchi und H. Hombu, Die Geometrie des Systems der partiellen Differentialgleichungen, Journal of the Faculty of Science, Hokk. Imp. Univ., Ser. I, **6** (1937), Kap. II.

$$
(12)\quad \begin{cases} Q^{i(0)}_{(1)j}=\dfrac{1}{3}H^i_{(2)j}\,, \qquad Q^{i(0)}_{(2)j}=\dfrac{1}{3}H^i_{(1)j}\,; \\ R^{i(0)}_{(1)j}=Q^{i(0)}_{(1)j}\,, \qquad R^{i(1)}_{(2)j}=2Q^{i(0)}_{(1)j}\,, \qquad R^{i(0)}_{(2)j}=Q^{i(0)}_{(2)j}-2Q^{i}_{(1)k}Q^{k(0)}_{(1)j} \end{cases}
$$

sind. Von den Torsionsgrössen dieser Übertragung finden wir nach blosser Rechnung folgende fünf unabhängige:

$$
(13)\quad \begin{cases} S^{(0)(0)j}_{kl(0)}=\dfrac{1}{6}(H^j_{(2)k(1)l}-H^j_{(2)l(1)k})+\dfrac{1}{9}(H^j_{(2)l(2)h}H^h_{(2)k}-H^j_{(2)k(2)h}H^h_{(2)l})\,, \\ S^{(0)(0)j}_{kl(2)}=\dfrac{1}{2}\bar{\nabla}^{(0)}_l Q^{j(0)}_{(2)k}-\dfrac{1}{2}\bar{\nabla}^{(0)}_k Q^{j(0)}_{(2)l}-\bar{\nabla}^{(0)}_l Q^{j(0)}_{(1)h}\cdot Q^{h(0)}_{(1)k}+\bar{\nabla}^{(0)}_k Q^{j(0)}_{(1)h}\cdot Q^{h(0)}_{(1)l}\,, \\ S^{(0)(0)j}_{kl(1)}=\dfrac{1}{2}\bar{\nabla}^{(0)}_l Q^{j(0)}_{(1)k}-\dfrac{1}{2}\bar{\nabla}^{(0)}_k Q^{j(0)}_{(1)l}\,, \qquad S^{(0)(1)j}_{kl(0)}=\dfrac{1}{3}H^j_{(2)k(2)l}\,, \\ S^{(0)(1)j}_{kl(2)}=\dfrac{1}{2}\bar{\nabla}^{(1)}_l Q^{j(0)}_{(2)k}-\bar{\nabla}^{(0)}_k Q^{j(0)}_{(1)l}-\bar{\nabla}^{(1)}_l Q^{j(0)}_{(1)h}\cdot Q^{h(0)}_{(1)k}\,. \end{cases}
$$

In unserem Fall, wenn (1) den projektiven Parameter $t$ trägt, erhalten wir für die Operatoren $x^{(1)l}\bar{\nabla}^{(q)}_l$

$$
x^{(1)l}\bar{\nabla}^{(1)}_l=x^{(1)l}\frac{\partial}{\partial x^{(1)l}}+2x^{(2)l}\frac{\partial}{\partial x^{(2)l}}\,,
$$

$$
x^{(1)l}\bar{\nabla}^{(0)}_l=x^{(1)l}\frac{\partial}{\partial x^{(0)l}}+x^{(2)l}\frac{\partial}{\partial x^{(1)l}}-H^l\frac{\partial}{\partial x^{(2)l}} \quad \left(\equiv\frac{d}{dt}\ \text{gesetzt}\right),
$$

da nach (2), (12) $R^{i(0)}_{(1)j}x^{(1)j}=-x^{(2)i}$, $R^{i(0)}_{(2)j}x^{(1)j}=H^i$ sind. Wir bezeichnen nun den Skalar $S^{(0)(0)m}_{km(1)}x^{(1)k}$ mit $S$; da

$$
\begin{aligned}
6S^{(0)(0)j}_{kl(1)}x^{(1)k}&=(\bar{\nabla}^{(0)}_l H^j_{(2)k}-\bar{\nabla}^{(0)}_k H^j_{(2)l})\,x^{(1)k} \\
&=\bar{\nabla}^{(0)}_l(H^j_{(2)k}x^{(1)k})-H^j_{(2)k}\bar{\nabla}^{(0)}_l x^{(1)k}-\frac{d}{dt}H^j_{(2)l} \\
&=-3\bar{\nabla}^{(0)}_l x^{(2)j}-H^j_{(2)k}\bar{\nabla}^{(0)}_l x^{(1)k}-\frac{d}{dt}H^j_{(2)l} \\
&=H^j_{(1)l}-\frac{1}{3}H^j_{(2)h}H^h_{(2)l}-\frac{d}{dt}H^j_{(2)l}
\end{aligned}
$$

ist, so haben wir $S$ in der Gestalt

$$
(14)\qquad S=\frac{1}{6}H^m_{(1)m}-\frac{1}{18}H^m_{(2)h}H^h_{(2)m}-\frac{1}{6}\frac{d}{dt}H^m_{(2)m}\,.
$$

Gleicherweise berechnet man $S^{(0)(1)m}_{km(2)}x^{(1)k}=2S$. Dass die Grösse $S$, welche von (14) gegeben wird, ein Skalar ist, kann man auch direkt unter Zugrundelegung der Transformationsformel von $H^i$ bestätigen.

4. Wir berechnen die Veränderung des Skalars $S$ bei der Transformation (3). Da nach (4), (5), (6) und wegen $\dfrac{d}{dt}=\dfrac{\tilde{d}}{dt}-\rho x^{(1)h}\dfrac{\partial}{\partial x^{(2)h}}$

$$\tilde{H}^m_{(1)m}-\frac{1}{3}\tilde{H}^m_{(2)h}\tilde{H}^h_{(2)m}-\frac{\tilde{d}}{dt}\tilde{H}^m_{(2)m}=H^m_{(1)m}+\rho_{(1)h}x^{(1)h}+n\rho$$

$$-\frac{1}{3}(H^m_{(2)h}H^h_{(2)m}-6\rho_{(2)h}x^{(2)h})-\left(\frac{d}{dt}H^m_{(2)m}+3n\rho\right)$$

$$=H^m_{(1)m}-\frac{1}{3}H^m_{(2)h}H^h_{(2)m}-\frac{d}{dt}H^m_{(2)m}+(\rho_{(1)h}x^{(1)h}+2\rho_{(2)h}x^{(2)h})-2n\rho$$

$$=H^m_{(1)m}-\frac{1}{3}H^m_{(2)h}H^h_{(2)m}-\frac{d}{dt}H^m_{(2)m}-2(n-1)\rho$$

ist, so ergibt sich

$$\tilde{S}=S-\frac{n-1}{3}\rho. \tag{15}$$

Setzen wir also

$$H^{*i}=H^i+\frac{3}{n-1}Sx^{(1)i} \qquad (\text{Gleiches für } \tilde{H}^{*i}), \tag{16}$$

so ist nach (3), (15) $H^{*i}$ projektiv invariant: $\tilde{H}^{*i}=H^{*i}$.

Andererseits gelten für den Skalar $S$

$$\text{(a)}\quad S_{(1)j}x^{(1)j}+2S_{(2)j}x^{(2)j}=2S, \qquad \text{(b)}\quad S_{(2)j}x^{(1)j}=0. \tag{17}$$

Nach den folgenden Beziehungen, die aus (2) abgeleitet werden,

$$H^j_{(1)l(2)m}x^{(1)m}=-H^j_{(2)l}, \qquad H^j_{(2)l(2)m}x^{(1)m}=-3\delta^j_l,$$

$$H^j_{(2)l(0)h(2)m}x^{(1)m}=0, \qquad H^j_{(2)l(1)h(2)m}x^{(1)m}=-H^j_{(2)l(2)h}, \qquad H^j_{(2)l(2)h(2)m}x^{(1)m}=0$$

folgt in der Tat die Richtigkeit von (17, b):

$$6S_{(2)j}x^{(1)j}=(-H^m_{(2)m})-\frac{1}{3}\cdot 2(-3\delta^m_h)H^h_{(2)m}$$

$$-\left(-H^m_{(2)m(2)h}x^{(2)h}+H^m_{(2)m(1)h}x^{(1)h}-H^m_{(2)m(2)h}(-3x^{(2)h})\right)$$

$$=H^m_{(2)m}-(H^m_{(2)m(1)h}x^{(1)h}+2H^m_{(2)m(2)h}x^{(2)h})=0,$$

da aus (2, a) $H^m_{(2)j(1)h}x^{(1)h}+2H^m_{(2)j(2)h}x^{(2)h}=H^m_{(2)j}$ ist.

Wir sehen also nach (3), (4), (16), (17), dass das System der "paths"

$$x^{(3)i}+H^{*i}\equiv x^{(3)i}+H^i+\frac{3}{n-1}Sx^{(1)i}=0 \tag{18}$$

in der in Betracht kommenden projektiven Klasse *ausgezeichnet* ist. Das Verschwinden des Skalars $S$

$$S=S^{(0)(0)m}_{km(1)}x^{(1)k}=\frac{1}{2}S^{(0)(1)m}_{km(2)}x^{(1)k}$$

ist offenbar für das ausgezeichnete System kennzeichnend. Und der projektive Parameter $t^*$ des ausgezeichneten Systems ist für die Klasse charakteristisch. Es ist

$$(19)\qquad \{t^*, t\} = \frac{3}{n-1} S(x, x^{(1)}, x^{(2)}) .^{1)}$$

Zwei projektive Klassen sind dann und nur dann identisch, wenn ihre ausgezeichneten Systeme übereinstimmen. Damit erreichen wir endlich den

Satz. *Es gibt in jeder projektiven Klasse, von denen jedes System den projektiven Parameter t trägt, ein ausgezeichnetes System, das sich aus einem System der Klasse durch (14), (18) bestimmt. Die Komitanten des ausgezeichneten Systems sind die projektiven Komitanten*[2] *der Klasse, und umgekehrt.*

Das Schema der projektiv invarianten Übertragung, die wir in der Absicht, alle projektiven Komitanten zu gewinnen, zugrund legen, lässt sich von (8)–(12) angeben, wobei aber $H^{*i}$ statt $H^i$ gesetzt wird.

5. In dem Fall des Systems

$$(20)\qquad x^{(3)i} + K^i_{jk} x^{(2)j} x^{(2)k} + K^i_j x^{(2)j} + K^i = 0 ,$$

wo $K^i_{jk}$, $K^i_j$, $K^i$ in bezug auf $x^{(1)j}$ homogen von der Ordnung $-1$, 1, 3 sind und übrigens

$$(21)\qquad K^i_{jk} x^{(1)j} = -\frac{3}{2}\delta^i_k , \qquad K^i_j x^{(1)j} = 0$$

bestehen,[3] wird die Gleichung des ausgezeichneten Systems so geschrieben:

$$(22)\qquad x^{(3)i} + (K^i_{jk} + a_{jk} x^{(1)i}) x^{(2)j} x^{(2)k} + (K^i_j + a_j x^{(1)i}) x^{(2)j} + K^i + a x^{(1)i} = 0 ,$$

wobei gesetzt sind:

$$a_{jk} = \frac{1}{2(n-1)}\left[K^m_{jk(1)m} - \frac{4}{3}K^h_{jm}K^m_{kh} + 2K^m_{im}K^i_{jk} - K^m_{jm(1)k} - K^m_{km(1)j}\right],$$

$$a_j = \frac{1}{2(n-1)}\left[K^m_{j(1)m} - \frac{4}{3}K^h_m K^m_{jh} + 2K^m_{im}K^i_j - 2K^m_{jm(0)h}x^{(1)h} - K^m_{m(1)j}\right],$$

$$a = \frac{1}{2(n-1)}\left[K^m_{(1)m} - \frac{1}{3}K^m_h K^h_m + 2K^m_{im}K^i - K^m_{m(0)h}x^{(1)h}\right].$$

---

1) H. Hombu, a. a. O., (10).

2) Das Adjektiv "projektiv" bedeutet "unter projektiven Transformationen der "paths" invariant."

3) H. Hombu, a. a. O., (12), (13).