PAPERS COMMUNICATED

42. *Sur la multivalence d'une famille des fonctions analytiques.*

Par Akira KOBORI.
Niigata Higher School.

(Comm. by T. YOSIE, M.I.A., May 12, 1938.)

Nous désignerons par F_k l'ensemble des fonctions analytiques $f(z)$, $f(0) \neq 0$, qui vérifient la relation

$$\Re\frac{zf'(z)}{f(z)} > -k, \qquad k: \text{un entier positif,}$$

dans le cercle $|z| < R$. D'après un lemme d'une note précédente, l'on peut conclure que les fonctions de notre famille n'ont ni zéros ni pôles dans ce cercle, c'est-à-dire elles sont régulières dans $|z| < R$.[1]

Puisque

$$\log f(z) = \log|f(z)| + i\arg\{f(z)\},$$

on a, sur la circonférence $|z| = r$ $(r < R)$,

$$\frac{d}{dz}\log f(z)\cdot\frac{dz}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\log|f(z)| + i\frac{d}{d\theta}\arg\{f(z)\},$$

donc

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \frac{d}{d\theta}\arg\{f(z)\} - i\frac{d}{d\theta}\log|f(z)|$$

et

$$\Re\frac{zf'(z)}{f(z)} = \frac{d}{d\theta}\arg\{f(z)\}.$$

Pour la fonction $z^k f(z)$, où la fonction $f(z)$ est une fonction de la famille F_k, l'on a sur la circonférence $|z| = r$

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\theta}\arg\{z^k f(z)\} &= \frac{d}{d\theta}\left[k\theta + \arg\{f(z)\}\right]\\ &= k + \frac{d}{d\theta}\arg\{f(z)\}\\ &= k + \Re\frac{zf'(z)}{f(z)}\\ &> k - k = 0.\end{aligned}$$

1) Voir le lemme de mon mémoire „Über die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine Potenzreihe einen Kreisbereich auf den schlichten konvexen oder sternigen Bereich abbildet." (Memoirs, College of Science, Kyoto imp. University, Ser. A. XV, 1932). Dans ce mémoire j'ai démontré que les fonctions de F_k sont différentes de zéro pour $|z| < R$, mais on peut de la même manière démontrer qu'elles n'ont pas pôles dans ce cercle.

Par suite, $\arg\{z^k f(z)\}$ varie de $2k\pi$ toujours dans le même sens lorsque z décrit la circonférence $|z|=r$, alors l'équation

$$(1) \qquad z^k f(z)-\gamma=0$$

a au plus k racines dans le cercle $|z|=r$, car la variation de $\arg\{z^k f(z)-\gamma\}$ le long de $|z|=r$ (direct) est au plus égale à $2k\pi$. De plus l'équation (1) a certainement k racines dans $|z|\leqslant r$, si $|\gamma|$ est suffisamment petit. De là l'on conclut que la fonction $z^k f(z)$ est k-valente dans $|z|\leqslant r$, c'est-à-dire dans $|z|<R$. Nous avons alors le

Théorème. *Si les fonctions analytiques $f(z)$, $f(0)\neq 0$, vérifient la relation*

$$\Re\frac{zf'(z)}{f(z)}>-k\,, \qquad k: \textit{un entier positif},$$

pour $|z|<R$, les fonctions $z^k f(z)$ sont k-valentes dans ce cercle.

Voici deux applications de cette proposition.

Si l'origine est un zéro d'ordre m de $f(z)$, l'on peut poser

$$f(z)=z^m g(z)\,, \qquad g(0)\neq 0\,,$$

par suite, on a

$$\Re\frac{zf'(z)}{f(z)}=m+\Re\frac{zg'(z)}{g(z)}\,.$$

Donc, si

$$\Re\frac{zf'(z)}{f(z)}>0$$

dans le cercle $|z|<R$, on a

$$\Re\frac{zg'(z)}{g(z)}>-m\,.$$

Par suite, d'après le théorème que nous venons d'énoncer, la fonction $z^m g(z)$, c'est-à-dire $f(z)$ est m-valent dans le cercle $|z|<R$. Donc:

Toute les fonctions analytiques $f(z)$ qui admettent l'origine comme zéro d'ordre m et vérifient la relation

$$\Re\frac{zf'(z)}{f(z)}>0$$

dans le cercle $|z|<R$, sont m-valentes dans ce cercle.

Ce théorème est une généralisation d'une proposition établie dans une note précédente.[1)]

Soit $P(z)$ un polynôme de degré n qui admet l'origine comme zéro d'ordre p, l'on peut poser

$$P(z)=z^p Q(z)\,, \qquad Q(0)\neq 0\,.$$

Si $z_0, z_1, \cdots, z_{n-p-1}$ sont les zéros du polynôme $Q(z)$, on a

1) Loc. cit. Voir aussi S. Ozaki: Some remarks on the univalency and multivalency of the functions. Science Reports, Tokyo Bunrika Daigaku, Section A, 1934.

$$\frac{zQ'(z)}{Q(z)}=n-p+\sum_{j=0}^{n-p-1}\frac{z_j}{z-z_j}.$$

Donc, si z_0 est le plus petit module, on a, pour $|z|<|z_0|$

$$\Re\frac{zQ'(z)}{Q(z)}>n-p-\frac{n-p}{1-\left|\dfrac{z}{z_0}\right|}.$$

Par suite, pour $|z|<\dfrac{p}{n}|z_0|$, on a

$$\Re\frac{zQ'(z)}{Q(z)}>-p.$$

Donc, par le théorème, $z^pQ(z)$, c'est-à-dire $P(z)$ est p-valent dans $|z|<\dfrac{p}{n}|z_0|$.

Ainsi comme l'a remarqué M. Biernacki[1]:

Un polynôme $P(z)$ de degré n qui admet l'origine comme zéro d'ordre p est p-valent dans le cercle $|z|<\dfrac{p}{n}|z_0|$, z_0 étant un zéro le plus approché de l'origine (autre que l'origine).

---

1) Voir Montel: Leçons sur les fonctions univalentes ou multivalentes, p. 27.