85. Über die Überdeckungen von Zellenräumen. I.

Von Atuo KOMATU.

Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Osaka.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Nov. 12, 1938.)

In meiner früheren Arbeit[1] definierte ich die Reidemeisterschen Überdeckungen[2] von Komplexen für Zellenräume. In der vorliegenden Arbeit wird dieser Überdeckungsbegriff etwas verallgemeinert, und dann wird ebenfalls die Dualitätsrelation erklärt.

1. Es sei K ein n-dimensionaler Zellenraum im Tuckerschen Sinne. Die Elemente von K, die Inzidenzmatrix und die Überlagerung von K seien bzw. mit a_i^k, ε_{ij}^k und U bezeichnet.

Wir setzen jetzt die folgenden Bedingungen über die Inzidenzbeziehungen ε_{ij}^k voraus:

1) Aus $a_i^k \not> a_j^{k-1}$ folgt $\varepsilon_{ij}^k = 0$.

2) Ist ε_{jl}^{k-1} die Inzidenzzahl zwischen den a_j^{k-1} und a_l^{k-2}, dann ist

$$\sum_j \varepsilon_{ij}^k \varepsilon_{jl}^{k-1} = 0\,.$$ [3]

Definition. Eine Überlagerung U heisse eine u-Überdeckung U_u, wenn die Zellen über eine Zelle a_i^k von K eine kommutative Gruppe $\mathfrak{A}_i^k$ bilden, und jeder Zelle aus U_u eineindeutig ein Symbol $x\,a_i^k$ zugeordnet ist, worin x ein Element aus der Gruppe $\mathfrak{A}_i^k$ bedeutet. Wenn die Zellen a_i^k und a_j^{k-1} in K miteinander inzident sind, so ist jede Zelle $x\,a_i^k$ mit einer Zelle $x'\,a_j^{k-1}$ inzident, worin x' ein durch x eindeutig bestimmtes Element von $\mathfrak{A}_j^{k-1}$ ist, und zwar ist die Zuordnung $\gamma_{ij}^k x = x'$ ein Homomorphismus von $\mathfrak{A}_i^k$ in $\mathfrak{A}_j^{k-1}$.

Umgekehrt definieren wir eine o-Überdeckung U_o so, dass jede Zelle $y'\,a_j^{k-1}$ aus U_o mit einer Zelle $y\,a_i^k$ inzident ist und die Zuordnung $\bar{\gamma}_{ji}^k y' = y$ ein Homomorphismus von $\mathfrak{B}_j^{k-1}$ in $\mathfrak{B}_i^k$, worin $\mathfrak{B}_j^{k-1}$ bzw. $\mathfrak{B}_i^k$ die den Zellen a_j^{k-1} bzw. a_i^k zugeordneten Abelschen Gruppen sind.

In beiden Fällen genügen die Homomorphismen γ_{ij}^k, $\bar{\gamma}_{ji}^k$ den folgenden Relationen:

3) $$\gamma_{jl}^{k-1}\gamma_{ij}^k = \gamma_{ml}^{k-1}\gamma_{im}^k$$

$$\bar{\gamma}_{ji}^k\bar{\gamma}_{lj}^{k-1} = \bar{\gamma}_{mi}^k\bar{\gamma}_{lm}^{k-1}\,.$$ [4]

---

1) A. Komatu: Über die Dualitätssätze der Überdeckungen. Jap. Jour. Math. **8** (1936). Darin machte ich einen Fehler, der aber für die Arbeit unwesentlich ist. Wir müssen das Lemma (§ 2) in folgender Weise verbessern. „Es seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei im kleinen bikompakte topologische Abelsche Gruppen, von denen jede die Charakterengruppe der anderen im Sinne von Pontrjagin und van Kampen ist. Dann ist der stetige Automorphismenring von $\mathfrak{A}$ mit dem von $\mathfrak{B}$ *reziprok isomorph*". Daher können wir nicht behaupten, dass die beiden Darstellungen der Wegegruppe einer Mannigfaltigkeit bei den „dualen" Überdeckungen identisch sind.

2) K. Reidemeister: Überdeckungen von Komplexen. Crelle's Jour. **173**.

3) Diese Bedingung ist nach Kolmogoroff die Axiome AUJ u. AOJ für ganzzahligen Koeffizientenbereich über Zellenräume. Vgl. Kolmogoroff: Über die Daulität im Aufbau der Kombinatorischen Topologie. Rec. Math. **1**.

4) Die u-Überdeckung ist also dem allgemeinen algebraischen Zellenkomplex von H. Kodaira sehr ähnlich. Vgl. K. Kodaira: Über den allgemeinen Zellenbegriff und die Zellenzerspaltungen der Komplexe. Proc. **14** (1938), 49.

2. Die Homologiegruppe einer u-Überdeckung und einer o-Überdeckung eines Zellenraumes K lassen sich nun wie in meiner früheren Arbeit[1] definieren. In diesem Fall folgen aber die Relationen

$$g_u g_u f^r = 0,$$
$$g_o g_o f^r = 0$$

aus den Bedingungen 2) und 3).

Nun können wir analog wie früher zwei duale Überdeckungen angeben und dann die Dualitätsbeziehung erhalten.

1) A. Komatu, a. a. O.