83. *Sur les circonférences généralisées dans les espaces à connexion conforme.*

Par Kentaro YANO.

Institut de Mathématiques, Université Impériale de Tokio.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., Nov. 12, 1938.)

Dans une Note précédente,[1] nous avons montré comment on peut expliquer, du point de vue géométrique de M. E. Cartan, la théorie analytique des espaces à connexion conforme de l'Ecole de Princeton.

Dans cette Note, nous allons généraliser, avec la méthode du repère mobile de M. E. Cartan, la notion de circonférences d'espaces conformes ordinaires.

Prenons, à chaque point de la variété à connexion conforme, un repère naturel[1] $(n+2)$—sphérique formé avec deux points analytiques A_0 et A_∞ et n sphères analytiques A_i $(i, j, \dots = 1, 2, \dots, n)$ passant par A_0 et A_∞, A_0 étant le point de contact. Alors, on aura

$$A_0^2 = A_\infty^2 = A_0 A_j = A_\infty A_j = 0\,, \quad A_0 A_\infty = -1\,, \quad A_i A_j = G_{ij} = g_{ij}/g^{\frac{1}{n}}\,,$$

où g_{ij} sont des composantes du tenseur fondamental et g est le déterminant formé avec les g_{ij}.

La connexion conforme étant définie par

$$dA_P = \omega_P^Q A_Q \qquad (P, Q, R, \dots = 0, 1, 2, \dots, n, \infty)\,,$$

nous avons par rapport au repère naturel,

$$\Pi_{0k}^\infty = \Pi_{\infty k}^0 = \Pi_{0k}^0 = \Pi_{\infty k}^\infty = 0\,, \quad \Pi_{0j}^i = \delta_j^i\,, \quad \Pi_{jk}^\infty = G_{jk}\,, \quad G_{ij}\Pi_{\infty k}^i = \Pi_{jk}^0$$

$$G_{lj}\Pi_{ik}^l + G_{il}\Pi_{jk}^l = \frac{\partial G_{ij}}{\partial u^k}\,, \tag{1}$$

où

$$\omega_P^Q = \Pi_{Pk}^Q du^k\,,$$

et u^k sont des coordonnées des points de la variété.

Cela étant, dans un espace conforme ordinaire, une circonférence, passant par les points A_0 et A_∞, peut être définie par

$$\rho A = A_0 + t \cdot v^i A_i + \frac{1}{2} t^2 \cdot G_{ij} v^i v^j A_\infty\,,$$

où ρ est un facteur arbitraire (fonction de t) et v^i et G_{ij} $(= A_i \cdot A_j)$ sont des constantes.

Donc, l'équation différentielle pour les circonférences peut être mise sous la forme suivante:

$$\frac{d^3 \rho A}{dt^3} = 0\,.$$

Nous prenons cette équation comme celle qui définit la circonférence généralisée dans les espaces à connexion conforme.

1) K. Yano: Remarques relatives à la théorie des espaces à connexion conforme, Comptes Rendus, t. **206** (1938), 560–562.

A_0 étant le point de contact, de l'équation

$$\frac{d^3\rho A_0}{dt^3}=0\,, \tag{2}$$

on obtient

$$\rho\frac{d^3A_0}{dt^3}+3\frac{d\rho}{dt}\frac{d^2A_0}{dt^2}+3\frac{d^2\rho}{dt^2}\frac{dA_0}{dt}+\frac{d^3\rho}{dt^3}A_0=0\,. \tag{3}$$

D'autre part, on a

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{dA_0}{dt}=\frac{du^i}{dt}A_i\,,\\ &\frac{d^2A_0}{dt^2}=BA_0+a^iA_i+CA_\infty\,,\\ &\frac{d^3A_0}{dt^3}=\left(\frac{dB}{dt}+\Pi^0_{jk}a^j\frac{du^k}{dt}\right)A_0\\ &\qquad+\left(\frac{da^i}{dt}+\Pi^i_{jk}a^j\frac{du^k}{dt}+B\frac{du^i}{dt}+C\Pi^i_{\infty k}\frac{du^k}{dt}\right)A_i\\ &\qquad+\left(\Pi^\infty_{jk}a^j\frac{du^k}{dt}+\frac{dC}{dt}\right)A_\infty\,,\end{aligned}\right. \tag{4}$$

où

$$\left\{\begin{aligned}&B=\Pi^0_{jk}\frac{du^j}{dt}\frac{du^k}{dt}\,,\\ &a^i=\frac{d^2u^i}{dt^2}+\Pi^i_{jk}\frac{du^j}{dt}\frac{du^k}{dt}\,,\\ &C=\Pi^\infty_{jk}\frac{du^j}{dt}\frac{du^k}{dt}=G_{jk}\frac{du^j}{dt}\frac{du^k}{dt}\,.\end{aligned}\right. \tag{5}$$

En substituant les équations (4) dans (3) et en annulant les coefficients de A_0, A_i et A_∞, on trouve

$$\rho\left(\frac{dB}{dt}+\Pi^0_{jk}a^j\frac{du^k}{dt}\right)+3\frac{d\rho}{dt}B+\frac{d^3\rho}{dt^3}=0\,, \tag{6}$$

$$\rho\left(\frac{da^i}{dt}+\Pi^i_{jk}a^j\frac{du^k}{dt}+B\frac{du^i}{dt}+C\Pi^i_{\infty k}\frac{du^k}{dt}\right)+3\frac{d\rho}{dt}a^i+3\frac{d^2\rho}{dt^2}\frac{du^i}{dt}=0\,, \tag{7}$$

$$\rho\left(G_{jk}a^j\frac{du^k}{dt}+\frac{dC}{dt}\right)+3\frac{d\rho}{dt}C=0\,. \tag{8}$$

En remarquant que

$$G_{jk}a^j\frac{du^k}{dt}=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(G_{jk}\frac{du^j}{dt}\frac{du^k}{dt}\right)=\frac{1}{2}\frac{dC}{dt}\,,$$

en vertu de (1), on déduit de (8)

$$\frac{3}{2}\rho\frac{dC}{dt}+3\frac{d\rho}{dt}C=0$$

donc

$$C\rho^2 = M \quad \text{(constante)} \tag{9}$$

le long de la courbe.

Introduisons un paramétre s tel qu' on ait

$$G_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds} = M \tag{10}$$

et appelons-le paramètre conforme, alors on aura de (10)

$$\rho = t' \tag{11}$$

où la prime indique la dérivée par rapport à s.

En substituant

$$\rho = t', \quad \frac{d\rho}{dt} = \frac{t''}{t'}, \quad \frac{d^2\rho}{dt^2} = \frac{t'''}{t'^2} - \frac{t''^2}{t'^3}, \quad \frac{d^3\rho}{dt^3} = \frac{t''''}{t'^3} - \frac{4t''t'''}{t'^4} + \frac{3t''^3}{t'^5},$$

$$\frac{dB}{dt} = \frac{\dfrac{d}{ds}\left(\Pi^0_{jk}\dfrac{du^j}{ds}\dfrac{du^k}{ds}\right)}{t'^3} - \frac{2\Pi^0_{jk}\dfrac{du^j}{ds}\dfrac{du^k}{ds}\cdot t''}{t'^4},$$

$$a^j = \frac{\dfrac{d^2u^i}{ds^2} + \Pi^i_{jk}\dfrac{du^j}{ds}\dfrac{du^k}{ds}}{t'^2} - \frac{\dfrac{du^i}{ds}t''}{t'^3},$$

dans (6), nous avons

$$\frac{\dfrac{d}{ds}\left(\Pi^0_{jk}\dfrac{du^j}{ds}\dfrac{du^k}{ds}\right)}{t'^3} - \frac{2\Pi^0_{jk}\dfrac{du^j}{ds}\dfrac{du^k}{ds}\cdot t''}{t'^4} + \frac{\left(\dfrac{d^2u^j}{ds^2} + \Pi^j_{ab}\dfrac{du^a}{ds}\dfrac{du^b}{ds}\right)\Pi^0_{jk}\dfrac{du^k}{ds}}{t'^3}$$

$$-\frac{\Pi^0_{jk}\dfrac{du^j}{ds}\dfrac{du^k}{ds}\cdot t''}{t'^4} + \frac{3\Pi^0_{jk}\dfrac{du^j}{ds}\dfrac{du^k}{ds}\cdot t''}{t'^4} + \frac{t''''}{t'^4} - \frac{4t''t'''}{t'^5} + \frac{3t''^3}{t'^6} = 0,$$

donc

$$\frac{d}{ds}\{t\}_s = -\left[\frac{d}{ds}\left(\Pi^0_{jk}\frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds}\right) + \left(\frac{d^2u^j}{ds^2} + \Pi^j_{ab}\frac{du^a}{ds}\frac{du^b}{ds}\right)\Pi^0_{jk}\frac{du^k}{ds}\right], \tag{12}$$

où

$$\{t\}_s = \frac{t'''}{t'} - \frac{3}{2}\left(\frac{t''}{t'}\right)^2. \tag{13}$$

De la même façon, nous avons de (7)

$$\frac{\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{d^2u^i}{ds^2} + \Pi^i_{ab}\dfrac{du^a}{ds}\dfrac{du^b}{ds}\right)}{t'^3} - \frac{2\left(\dfrac{d^2u^i}{ds^2} + \Pi^i_{ab}\dfrac{du^a}{ds}\dfrac{du^b}{ds}\right)t''}{t'^4}$$

$$-\frac{\dfrac{d^2u^i}{ds^2}t'' + \dfrac{du^i}{ds}t'''}{t'^4} + \frac{3\dfrac{du^i}{ds}t''^2}{t'^5} + \frac{\left(\dfrac{d^2u^j}{ds^2} + \Pi^j_{ab}\dfrac{du^a}{ds}\dfrac{du^b}{ds}\right)\Pi^i_{jk}\dfrac{du^k}{ds}}{t'^3}$$

$$-\frac{\Pi^i_{jk}\dfrac{du^j}{ds}\dfrac{du^k}{ds}\cdot t''}{t'^4} + \frac{\Pi^0_{jk}\dfrac{du^j}{ds}\dfrac{du^k}{ds}\dfrac{du^i}{ds}}{t'^3} + \frac{M\Pi^i_{\infty k}\dfrac{du^k}{ds}}{t'^3}$$

$$+\frac{3\left(\dfrac{d^2u^i}{ds^2} + \Pi^i_{ab}\dfrac{du^a}{ds}\dfrac{du^b}{ds}\right)\cdot t''}{t'^4} - \frac{3\dfrac{du^i}{ds}\cdot t''^2}{t'^5} + \frac{3\dfrac{du^i}{ds}\cdot t'''}{t'^4} - \frac{3\dfrac{du^i}{ds}\cdot t''^2}{t'^5} = 0,$$

donc

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{d^2u^i}{ds^2}+\Pi^i_{ab}\frac{du^a}{ds}\frac{du^b}{ds}\right)+\left(\frac{d^2u^j}{ds^2}+\Pi^j_{ab}\frac{du^a}{ds}\frac{du^b}{ds}\right)\Pi^i_{jk}\frac{du^k}{ds} + \frac{du^i}{ds}\left(\Pi^0_{jk}\frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds}+2\{t\}_s\right)+M\Pi^i_{\infty k}\frac{du^k}{ds}=0\,. \tag{14}$$

En contractant $G_{ih}\left(\frac{d^2u^h}{ds^2}+\Pi^h_{ab}\frac{du^a}{ds}\frac{du^b}{ds}\right)=G_{ih}b^h$ aux deux membres de (14) et en tenant compte des relations

$$G_{ih}b^i\frac{du^h}{ds}=0\,,$$

$$MG_{ih}b^h\Pi^i_{\infty k}\frac{du^k}{ds}=M\Pi^0_{jk}b^j\frac{du^k}{ds}\,,$$

$$G_{ih}\left(\frac{db^i}{ds}+\Pi^i_{jk}b^j\frac{du^k}{ds}\right)b^h=\frac{1}{2}\frac{d}{ds}(G_{ij}b^ib^j)\,,$$

on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{ds}(G_{ij}b^ib^j)+M\Pi^0_{jk}b^j\frac{du^k}{ds}=0\,. \tag{15}$$

En substituant (15) dans (12), on trouve

$$\frac{d}{ds}\left[\{t\}_s+\Pi^0_{jk}\frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds}-\frac{1}{2M}G_{ij}b^ib^j\right]=0\,,$$

par conséquent

$$\{t\}_s=\frac{1}{2M}G_{ij}\left(\frac{d^2u^i}{ds^2}+\Pi^i_{ab}\frac{du^a}{ds}\frac{du^b}{ds}\right)\left(\frac{d^2u^j}{ds^2}+\Pi^j_{cd}\frac{du^c}{ds}\frac{du^d}{ds}\right) - \Pi^0_{jk}\frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds}+\text{constante.} \tag{16}$$

Comme le paramètre t est déterminé à l'aide de la dérivée schwarzienne par rapport à s, nous l'appelons paramètre projectif.

Enfin, en substituant (16) dans (14), on obtient les équations différentielles des circonférences généralisées:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{d^2u^i}{ds^2}+\Pi^i_{jk}\frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds}\right)+\left(\frac{d^2u^j}{ds^2}+\Pi^j_{ab}\frac{du^a}{ds}\frac{du^b}{ds}\right)\Pi^i_{jk}\frac{du^k}{ds} + \frac{du^i}{ds}\left[\frac{1}{M}G_{jk}\left(\frac{d^2u^j}{ds^2}+\Pi^j_{ab}\frac{du^a}{ds}\frac{du^b}{ds}\right)\left(\frac{d^2u^k}{ds^2}+\Pi^k_{cd}\frac{du^c}{ds}\frac{du^d}{ds}\right) - \Pi^0_{jk}\frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds}+\text{constante}\right]+M\Pi^i_{\infty k}\frac{du^k}{ds}=0\,.$$