92. *Sur un procédé pour construire la solution du problème de Dirichlet.*

Par Masao INOUE.

L'Institut Mathématique, L'Université Impériale d'Osaka.

(Comm. by T. YOSIE, M.I.A., Dec. 12, 1938.)

Dans cette note nous allons nous occuper d'un procédé pour construire la solution du problème de Dirichlet concernant le domaine limité par une courbe jordanienne simple et fermée.

1. Avant d'entrer au principal, il me faut citer les deux précieux articles de M. F. Leja: *Sur une famille de fonctions harmoniques dans le plan liées à une fonction donnée sur la frontière d'un domaine,*[1] et *Sur une famille de fonctions harmoniques liées à une fonction donnée dans un intervalle,*[2] auxquels je dois une grande partie de la présente note.

Voici ses résultats obtenus dans son premier article:

Soit D un domaine borné quelconque, de frontière F, dans le plan de la variable complexe, et $f(z)$ une fonction réelle, définie et continue sur la frontière F.

Désignons par λ un paramètre réel, n un nombre naturel. Etant donnés $n+1$ points différents quelconques $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_n$ de F que nous désignons par une seule lettre $\zeta = \{\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_n\}$, formons les $n+1$ polynômes de degré n que voici

$$\Phi_n^{(j)}(z, \lambda, \zeta) = L_n^{(j)}(z, \zeta) \cdot e^{n\lambda f(\zeta_j)}, \qquad j = 0, 1, \dots, n,$$

où

$$L_n^{(j)}(z, \zeta) = \frac{z-\zeta_0}{\zeta_j-\zeta_0} \cdots \frac{z-\zeta_{j-1}}{\zeta_j-\zeta_{j-1}} \cdot \frac{z-\zeta_{j+1}}{\zeta_j-\zeta_{j+1}} \cdots \frac{z-\zeta_n}{\zeta_j-\zeta_n}.$$

Posons

$$\Phi_n(z, \lambda) = \min_{(\zeta \in F)} \left\{ \max_{(j)} |\Phi_n^{(j)}(z, \lambda, \zeta)| \right\},$$

c'est-à-dire, $\Phi_n(z, \lambda)$ est la borne inférieure du plus grand des modules

$$|\Phi_n^{(j)}(z, \lambda, \zeta)|, \qquad j = 0, 1, \dots, n,$$

lorsque, z étant un point quelconque du plan, mais fixe, ζ parcourt la frontière F.

Ceci posé, son résultat principal est comme suit:

(1) La suite $\{\sqrt[n]{\Phi_n(z, \lambda)}\}$ tend dans le plan entier vers une fonction limite $\Phi(z, \lambda)$ et, si $\lambda \neq 0$, la fonction

$$\frac{1}{\lambda} \log \Phi(z, \lambda)$$

est harmonique et régulière en dehors de la frontière F.

1) Bulletin de l'Acad. Polon. des Sc. et des Lettres, Sc. Math., Kraków, 1936, p. 79–91.

2) Ann. de la Soc. Polon. de Math., t. **17**, 1938, p. 1–7.

Ici ajoutons ce qui suit:

Considérons la fonction

$$V_\lambda(\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_n) = \frac{e^{n\lambda[f(\zeta_0)+f(\zeta_1)+\dots f(\zeta_n)]}}{\prod\limits_{0\leq j<k\leq n} |\zeta_j - \zeta_k|}$$

et supposons que le minimum de $V_\lambda(\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_n)$ soit atteint aux points: $\xi=\{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n\}$ et que leurs indices soient choisis de manière à savoir:

$$\frac{e^{n\lambda f(\xi_0)}}{\prod\limits_{k=0}^{n} |\xi_0 - \xi_k|} \geqq \frac{e^{n\lambda f(\xi_j)}}{\prod\limits_{k=0\,(k\neq j)}^{n} |\xi_j - \xi_k|} \quad \text{pour} \quad j=1, 2, \dots, n.$$

Posons ici

$$H_n(z, \lambda) = \Phi_n^{(0)}(z, \lambda, \xi).$$

On a alors:

(2) $|H_n(z, \lambda)| \leqq e^{n\lambda f(z)}$ en chaque point de F.

(3) La suite $\{\sqrt[n]{|H_n(z, \lambda)|}\}$ tend en dehors de F vers une fonction limite $H(z, \lambda)$, la convergence étant uniforme au voisinage de chaque point non situé sur F. D'autre part, on a quel que soit $\lambda \neq 0$

$$H(z, \lambda) = \Phi(z, \lambda).$$

L'auteur a terminé son article en remarquant que les fonctions harmoniques ci-dessus semblent rester en une certaine liaison avec la résolution du problème de Dirichlet concernant le domaine D et la fonction $f(z)$ définie sur la frontière F de ce domaine.

2. Le but de notre travail est de démontrer le théorème suivant:

Théorème. *Supposons que D est un domaine limité par une courbe jordanienne simple et fermée, F. Alors, les fonctions $\frac{1}{\lambda}\log \Phi(z, \lambda)$ convergent uniformément dans $D+F$ vers une fonction limite $U(z)$ lorsque $\lambda(\neq 0)$ tend vers zéro, et la fonction $U(z)$ coïncide avec $f(z)$ sur la frontière F et est identique dans le domaine D à la solution du problème de Dirichlet pour D et $f(z)$.*

Démonstration. Puisque D est régulier pour le problème de Dirichlet, il existe la fonction $U(z)$ qui est continue dans $D+F$, harmonique dans D et coïncide avec $f(z)$ sur F. Il s'agit de démontrer qu'on a dans $D+F$

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{1}{\lambda} \log \Phi(z, \lambda) = U(z).$$

D'après (2), on voit qu'on a dans D

$$\frac{1}{n\lambda} \log |H_n(z, \lambda)| \leqq U(z) \quad \text{pour tout } n \text{ et tout } \lambda(\neq 0),$$

car $\frac{1}{n\lambda}\log|H_n(z, \lambda)|$ est une fonction harmonique dans D et est inférieure à $U(z)$ sur F.

D'où, en vertu de (3), on a dans D

$$\overline{\lim_{\lambda\to 0}}\frac{1}{\lambda}\log \Phi(z,\lambda)\leqq U(z). \tag{4}$$

Choisissons maintenant une suite de domaines réguliers (simplement connexes) pour le problème de Dirichlet $\{D_n\}$ telle que

$$D_n\supset D_{n+1}\supset\cdots\supset D \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} D_n=D+F,$$

ce qui est possible par l'hypothèse concernant le domaine D, et formons un prolongement continu $\mathfrak{F}(z)$ de $f(z)$ dans le plan entier. En désignant par $U_n(z)$ la solution du problème de Dirichlet pour D_n et $\mathfrak{F}(z)$, on peut affirmer facilement que les fonctions harmoniques $U_n(z)$ convergent uniformément dans $D+F$ vers la fonction $U(z)$, donnée plus haut.[1)]

$\varepsilon>0$ étant donné arbitrairement, choisissons une fonction $U_m(z)$ telle qu'on ait

$$\max_{(z\in D+F)}|U_m(z)-U(z)|\leqq\varepsilon. \tag{5}$$

On peut alors trouver une fonction analytique (complexe) dans D_m, dont le module en z est égal à $e^{U_m(z)}$. Il existe donc d'après le théorème connu de Runge un polynôme $P_k(z)$ et un nombre $\delta>0$ tels qu'on ait dans $D+F$

$$e^{\rho U_m(z)}-\varepsilon\leqq|P_k(z)|\leqq e^{\rho U_m(z)}+\varepsilon$$

pour chaque valeur de ρ remplissant la condition $1\leqq\rho\leqq 1+\delta$. On peut écrire cette inégalité sous la forme suivante:

$$e^{\rho U_m(z)-\mu(\varepsilon)}\leqq|P_k(z)|\leqq e^{\rho U_m(z)+\mu(\varepsilon)}, \tag{6}$$

où $\mu(\varepsilon)$ est une fonction réelle (>0) ne dépendant que de ε et satisfaisant à la condition

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mu(\varepsilon)=0. \tag{7}$$

Cette inégalité obtenue, on peut y appliquer le raisonnement que M. F. Leja a employé dans son second article précité:

Soit k le degré du polynôme $P_k(z)$. Posons $\lambda_1=1/k$ et soit λ un nombre fixe quelconque satisfaisant aux inégalités $0<\lambda<\lambda_1$.

Il est claire qu'on peut lui faire correspondre deux nombres naturels p et q et un nombre ρ appartenant à l'intervalle $[1, 1+\delta]$ tels qu'on ait

$$\lambda=\rho\cdot p/q. \tag{8}$$

Observons qu'on a l'inégalité

$$p/q<1/k, \tag{9}$$

car p/q est plus petit que λ et λ est plus petit que $1/k$.

1) On peut déduire ce fait d'un résultat obtenu dans ma note: Une considération sur le problème de Dirichlet, Proc. **13** (1937), p. 352–357.

Soit n un nombre naturel fixe quelconque de la forme

$$(10) \qquad n=\nu\cdot q/p\,, \quad \text{où} \quad \nu=p,\ 2p,\dots$$

et z un point fixe quelconque dans $D+F$. Faisons correspondre à ces deux nombres et au nombre λ considéré plus haut $n+1$ points $\eta=\{\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n\}$ de la frontière F tels qu'on ait

$$(11) \qquad \Phi_n(z,\lambda) \leqq \max_{(j)} |\,\Phi_n^{(j)}(z,\lambda,\eta)\,| < 2\Phi_n(z,\lambda)\,,$$

ce qui est toujours possible par la définition de $\Phi_n(z,\lambda)$ car on a toujours $\Phi_n(z,\lambda)>0$. En observant que le degré du polynôme $[P_k(z)]^\nu$ est, d'après (9) et (10), inférieur à n, on a grâce à la formule d'interpolation de Lagrange identiquement

$$[P_k(z)]^\nu=\sum_{j=0}^{n}[P_k(\eta_j)]^\nu\cdot L_n^{(j)}(z,\eta)\,,$$

d'où résulte, d'après (6), l'inégalité

$$e^{\nu\rho U_m(z)-\nu\mu(\varepsilon)} \leqq \sum_{j=0}^{n} e^{\nu\rho U_m(z)+\nu\mu(\varepsilon)}\cdot |\,L_n^{(j)}(z,\eta)\,|\,.$$

Mais on a, d'après (8) et (10), $\nu\rho=n\lambda$ et, comme

$$L_n^{(j)}(z,\eta)\cdot e^{n\lambda f(\eta_j)}=\Phi_n^{(j)}(z,\lambda,\eta)\,,$$

on voit que

$$e^{n\lambda[U_m(z)-\mu(\varepsilon)/\rho]} \leqq \sum_{j=0}^{n} e^{n\lambda[U_m(z)-f(\eta_j)+\mu(\varepsilon)/\rho]}\cdot |\,\Phi_n^{(j)}(z,\lambda,\eta)\,|$$

et par suite, d'après (5) et (11), on a

$$e^{n\lambda[U(z)-\varepsilon-\mu(\varepsilon)/\rho]} \leqq 2(n+1)\,e^{n\lambda[\varepsilon+\mu(\varepsilon)/\rho]}\cdot \Phi_n(z,\lambda)\,,$$

ce qui entraîne immédiatement l'inégalité

$$\sqrt[n]{\Phi_n(z,\lambda)} \geqq \frac{1}{\sqrt[n]{2(n+1)}}\, e^{\lambda[U(z)-2(\varepsilon+\mu(\varepsilon)/\rho)]}\,.$$

Faisons maintenant tendre le nombre n vers l'infini en posant $n=\nu\cdot q/p$ et $\nu=p, 2p, 3p, \dots$ En tenant compte de (1) on déduit de la dernière inégalité la suivante

$$\Phi(z,\lambda) \geqq e^{\lambda[U(z)-2(\varepsilon+\mu(\varepsilon)/\rho)]}$$

et, puisque $\rho\geqq 1$, on voit que, si $0<\lambda<\lambda_1$, on a dans $D+F$

$$(12) \qquad \Phi(z,\lambda) \geqq e^{\lambda[U(z)-2(\varepsilon+\mu(\varepsilon))]}\,.$$

Suivant le même raisonnement, on voit que, si $-\lambda_2<\lambda<0$, on a dans $D+F$

$$(13) \qquad \Phi(z,\lambda) \geqq e^{\lambda[U(z)+2(\varepsilon+\sigma(\varepsilon))]}\,,$$

où λ_2 est un nombre positif ne dépendant pas de z, $\sigma(\varepsilon)$ une fonction réelle (>0) ne dépendant que de ε et satisfaisant à la condition

$$(14) \qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\sigma(\varepsilon)=0\,.$$

En faisant tendre ε vers zéro, on obtient, en tenant compte de (7), (12), (13) et (14), dans $D+F$

$$\underline{\lim}_{\lambda\to 0} \frac{1}{\lambda} \log \Phi(z, \lambda) \geqq U(z)\,, \tag{15}$$

ce qui donne avec (4) l'égalité suivante:

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{1}{\lambda} \log \Phi(z, \lambda) = U(z) \qquad \text{dans } D\,. \tag{16}$$

Puis, étudions le comportement de $\frac{1}{\lambda} \log \Phi(z, \lambda)$ sur la frontière F lorsque λ tend vers zéro.

Si z est sur F, on a immédiatement par la définition de $\Phi_n(z, \lambda)$

$$\frac{1}{n\lambda} \log \Phi_n(z, \lambda) \leqq f(z)\,,$$

d'où vient

$$\overline{\lim}_{\lambda\to 0} \frac{1}{\lambda} \log \Phi(z, \lambda) \leqq f(z)\,. \tag{17}$$

En vertu de (15) et (17), on a sur la frontière F

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{1}{\lambda} \log \Phi(z, \lambda) = f(z)\,. \tag{18}$$

D'après (16) et (18), on a enfin dans $D+F$

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{1}{\lambda} \log \Phi(z, \lambda) = U(z)\,,$$

et en notant que les deux fonctions $\mu(\varepsilon)$, $\sigma(\varepsilon)$ et les deux nombres λ_1, λ_2 ne dépendent pas de z, on peut affirmer que la convergence est uniforme dans $D+F$. Ainsi, le théorème a été complètement établi.