2. *Über die Überdeckungen von Zellenräumen. II.*

Von Atuo KOMATU.

Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Osaka.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Jan. 12, 1939.)

Der Zweck dieser Note ist die folgenden Untersuchungen vorzunehmen: (1) über die stetige Abbildung der Überdeckungen von Zellenräumen,[1] (2) über die Beziehungen zwischen den zwei verschiedenen Überdeckungen eines Zellenraumes D, und (3) über die Bedingung[2] dafür, dass die Homologiegruppe einer Überdeckung des baryzentrisch unterteilten Komplexes D_o von D isomorph wird.

Nach dieser Bedingung können wir behaupten, dass die Homologiegruppe einer Überdeckung von einem simplizialen Komplex bei Unterteilungen invariant bleibt.

1. Eine Abbildung h eines Zellenraumes D_1 in einen Zellenraum D_2 heisst stetig, wenn die folgende Bedingung besteht.

$$\text{Aus} \quad a_i^r > a_j^{r-1} \quad \text{folgt} \quad h(a_i^r) \geqq h(a_j^{r-1}).$$

Eine stetige Abbildung h von D_1 in D_2 heisst *randtreu*, wenn die folgenden Bedingungen bestehen.

A). Ist $a_i^r > a_j^{r-1}$, so ist $\dim h(a_j^{r-1})+1 \geqq \dim h(a_i^r)$.

B). Ist $h(a_i^r)=b_k^r$, so gehen die $(r-1)$-dimensionalen Randelemente von a_i^r bei h auf die $(r-1)$-dimensionalen Randelemente von b_k^r isomorph über.

C). Ist $h(a_i^r)=h(a_j^{r-1})=b_k^{r-1}$, so geht noch eine Seite a_l^{r-1} von $-a_i^r$ bei h auf das Element b_k^{r-1} über.

Die simplizialen Abbildungen eines Komplexes in einen anderen Komplex sind natürlich randtreu.

Eine stetige Abbildung h von einer u-Überdeckung U_1 von D_1 in eine u-Überdeckung U_2 von D_2 wird mit Hilfe einer stetigen Abbildung h von D_1 in D_2 wie folgt definiert:

a). Ist $h(a_i^r)=b_k^s$, $a_i^r \in D_1$, $b_k^s \in D_2$, so gibt es einen Homomorphismus δ_{ki}^{sr} von $\mathfrak{A}_i^r$ in $\mathfrak{B}_k^s$, wobei die Gruppen $\mathfrak{A}_i^r$ und $\mathfrak{B}_k^s$ den Zellen a_i^r von U_1 und b_k^s von U_2 zugeordnet sind.

$$h(xa_i^r)=\delta_{ki}^{sr}xb_k^s.$$

b). $\overset{*}{\gamma}{}_{ji}^r$, γ_{lk}^r seien die Homomorphismen von $\mathfrak{A}_i^r$ in $\mathfrak{A}_j^{r-1}$ bzw. $\mathfrak{B}_k^r$ in $\mathfrak{B}_l^{r-1}$. Ist $h(a_i^r)=b_k^s$, $h(a_j^{r-1})=b_l^t$, $a_i^r > a_j^{r-1}$, $b_k^s \geqq b_l^t$, so gilt

$$\delta_{lj}^{t\,r-1}\overset{*}{\gamma}{}_{ji}^r=\gamma_{l\cdot}^{t+1}\cdots\gamma_{\cdot k}^s\delta_{ki}^{sr}, \tag{1}$$

wo $\gamma_{lk}^{ts}=\gamma_{l\cdot}^{t+1}\cdots\gamma_{\cdot k}^s$ ein Homomorphismus von $\mathfrak{B}_k^s$ in $\mathfrak{B}_l^t$ bei U_2 ist. Ist insbesondere $b_k^s=b_l^t$, $s=t$, so ist $\delta_{lj}^{t\,r-1}\overset{*}{\gamma}{}_{ji}^r=\delta_{li}^{tr}$.

---

1) A. Komatu: Über die Überdeckungen von Zellenräumen. I. Proc. **14** (1938), 340.

2) Diese Bedingung ist dieselbe wie bei gewöhnlicher Homologiegruppe eines Zellenraumes; vgl. A. Komatu: Über die Bettische Gruppe der Zellenräume. Proc. **14** (1938), 304.

Die stetige Abbildung einer o-Überdeckung lässt sich analog definieren.

Dann gilt der folgende

Satz.[1] Die Homologiegruppe $B_u^r(D_1)$ von U_1 wird bei einer randtreuen Abbildung h von U_1 in U_2 in die Homologiegruppe $B_u^r(D_2)$ von U_2 homomorph abgebildet.

Beweis. $f_{D_1}^r(a_i^r)$ sei eine r-Kette aus der Überdeckung U_1 und es sei $h(a_i^r)=b_k^r$.

Die der Kette $f_{D_1}^r$ zugeordnete Kette $f_{D_2}^r(b_k^r)$ aus der Überdeckung U_2 lässt sich nun in folgender Weise bestimmen.

$$f_{D_2}^r(b_k^r)=\sum_i \delta_{ki}^{rr} f_{D_1}^r(a_i^r)\,,$$

wobei die Summation über alle r-dimensionalen Urbilder von b_k^r erstreckt ist.

Diese Zuordnung bezeichnen wir auch mit h. Dann gilt die folgende Formel:

$$g_u h f_{D_1}^r = h g_u f_{D_1}^r\,. \tag{2}$$

Denn die Kette $g_u h f_{D_1}^r = g_u f_{D_2}^r = f_{D_2}^{r-1}$ bedeutet

$$\begin{aligned} f_{D_2}^{r-1}(b_l^{r-1}) &= \sum_{b_k^r > b_l^{r-1}} \varepsilon_{lk}^r \gamma_{lk}^r f_{D_2}^r(b_k^r) \\ &= \sum_{b_k^r > b_l^{r-1}} \varepsilon_{lk}^r \gamma_{lk}^r \sum_{h^{-1}} \delta_{ki}^{rr} f_{D_1}^r(a_i^r) \end{aligned}$$

und die Kette $h g_u f_{D_1}^r = h f_{D_1}^{r-1} = \tilde{f}_{D_2}^{r-1}$ bedeutet

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{D_2}^{r-1}(b_l^{r-1}) &= \sum_{h^{-1}} \delta_{lj}^{r-1\,r-1} f_{D_1}^{r-1}(a_j^{r-1}) \\ &= \sum_{h^{-1}} \delta_{lj}^{r-1\,r-1} \sum_{a_i^r > a_j^{r-1}} \varepsilon_{ji}^r \overset{*}{\gamma}{}_{ji}^r f_{D_1}^r(a_i^r)\,. \end{aligned}$$

Also ist die Kette $f_{D_2}^{r-1} - \tilde{f}_{D_2}^{r-1}$ nach (1) und der Bedingung „randtreu“ gleich der Nullkette in U_2. Aus (2) folgt leicht der Satz.

Ist insbesondere die Abbildung h von D_1 in D_2 Identität, d. i. $D_1 = D_2$, so gibt der Satz eine Beziehung zwischen den verschiedenen Überdeckungen eines Zellenraumes D.

2. Eine stetige Abbildung von D_o^n auf D^n wird in folgender Weise definiert:

$$h(a^{m_r}, \ldots, a^{m_o}) = a^{m_r}\,,$$

wobei $a^{m_r} > \cdots > a^{m_o}$ in D ist.

Diese Abbildung ist natürlich nicht randtreu.

$U(D^n)$ sei eine u-Überdeckung von D^n.

Aus $U(D^n)$ können wir nach 1) eine u-Überdeckung $U(D_o^n)$ von D_o^n definieren. Dabei setzen wir die Abbildung derart fest, dass alle Homomorphismen δ_{ji}^{sr} isomorph werden. Also ist die Koordinatengruppe von

---

1) Den analogen Satz über die o-Überdeckung kann man leicht beweisen.

$(a^{m_r},\dots,a^{m_o})$ in $U(D^n_o)$ gleich der Gruppe $\mathfrak{A}^{m_r}$ von a^{m_r} in $U(D^n)$. Dann gilt der folgende

Satz. Wenn die Bettische Gruppe des Zellenraumes Aa^r-a^r für jedes a^r (im Alexandroffschen Sinne) mit der Bettischen Gruppe der $(r-1)$-dimensionalen Sphäre isomorph ist, so ist die Bettische Gruppe von $U(D^n)$ isomorph mit der von $U(D^n_o)$.

Beweis. f^r sei eine Kette in $U(D^n_o)$. f_i^r sei die Teilkette von f^r, welche wir in folgender Weise bestimmen:

$f_i^r=f^r$ für alle r-dimensionale Simplexe von $Aa_i^m-\text{Rand}\ (Aa_i^m)$,

$f_i^r=0$ für alle anderen Simplexe von D_o.

Wenn wir die gewöhnliche Homologie von Aa_i^m mit dem Koeffizientenbereich $\mathfrak{A}_i^m$ betrachten, das bei $U(D^n)$ dem Element a_i^m zugeordnet ist, so ist $g_u f_i^r$ ein gewöhnlicher Zyklus.

$$g_u f_i^r(a_j^s,\dots)=\varepsilon_{ji}^{sr} f_i^r(a_i^m, a_j^s,\dots)\,.$$

Wir bezeichnen mit $\bar f_i^r$, $g_u\bar f_i^r$ die gewöhnliche Kette bzw. den gewöhnlichen Rand in Aa_i^m.

Nun beweisen wir folgende Tatsachen a), b).

a). Jeder r-dimensionale Zyklus f^r von $U(D^n_o)$ ist homolog einem Zyklus g^r von der Form,

$$g^r(a^{m_r},\dots,a^{m_o})=0 \quad \text{für} \quad m_r>r\,,$$

wo $a^{m_r}>a^{m_{r-1}}>a^{m_o}$ ist.

Beweis von a). Wenn $f^r(a_i^m, a_j^s,\dots)\neq 0$ für $m>r$ ist, so ist

$$g_u f_i^r(a_j^s,\dots)=\varepsilon_{ji}^{sr}\gamma_{ji}^{sr} f^r(a_i^m, a_j^s,\dots)\,.$$

Nach der Voraussetzung gibt es einen Komplex $\bar\psi_i^r$ in $Aa_i^m-a_i^m$, dessen Rand $g_u\bar f_i^r$ ist. D. i.

$$\bar\psi_i^r(a_j^s,\dots,a_k^p\dots)\in\mathfrak{A}_i^m\,.$$

$$g_u\bar\psi_i^r(a_j^s,\dots)=\sum_k \varepsilon_k\bar\psi_i^r(a_j^s,\dots,a_k^p,\dots)=\varepsilon_{ji}^{sm}\bar f_i^r(a_i^m, a_j^s,\dots)\,. \tag{3}$$

Daher ist $\bar f_i^r-\bar\psi_i^r$ ein Zyklus in Aa_i^m. $\bar g_i^{r+1}$ sei der Komplex in Aa_i^m, dessen Rand $\bar f_i^r-\bar\psi_i^r$ ist. Dann ist

$$\left\{\begin{aligned}
&g_u\bar g_i^{r+1}=\bar f_i^r-\bar\psi_i^r\,,\\
&g_u\bar g_i^{r+1}(a_i^m, a_j^s,\dots)=\sum_k \varepsilon_k\bar g_i^{r+1}(a_i^m, a_j^s,\dots,a_k^p,\dots)=\bar f_i^r(a_i^m, a_j^s\dots)\,,\\
&g_u\bar g_i^{r+1}(a_j^s,\dots,a_k^p,\dots)=-\bar\psi_i^r(a_j^s,\dots,a_k^p,\dots)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{für}\quad m>s,\ a_i^m>a_j^s\,.
\end{aligned}\right. \tag{4}$$

Nun betrachten wir wieder den Fall der Überdeckung $U(D^n_o)$. ψ_i^r sei die Kette, die folgendermassen definiert wird.

$$\psi_i^r(a_j^s,\dots)=\gamma_{ji}^{sm}\bar\psi_i^r(a_j^s,\dots) \quad \text{für} \quad a_i^m>a_j^s\,.$$

Dann ist nach (3)

$$g_u\psi_i^r(a_j^s, \ldots)=\sum_k \varepsilon_k\psi_i^r(a_j^s, \ldots, a_k^p, \ldots)$$

$$=\sum_k \varepsilon_k\gamma_{ji}^{sm}\bar{\psi}_i^r(a_j^s, \ldots, a_k^p, \ldots)$$

$$=\gamma_{ji}^{sm}\varepsilon_{ji}^{sm}\bar{f}_i^r(a_i^m, a_j^s, \ldots)\,.$$

Also ist die Kette $f_i^r-\psi_i^r$ in Aa_i^m ein Zyklus.
Nun definieren wir die Kette g_i^{r+1} folgendermassen.

$$g_i^{r+1}(a_i^m, a_j^s, \ldots)=\bar{g}_i^{r+1}(a_i^m, a_j^s, \ldots)\,,$$

$$g_i^{r+1}(a_j^s, \ldots\ldots) \;=\gamma_{ji}^{sm}\bar{g}_i^{r+1}(a_j^s, \ldots)\,.$$

Dann ist nach (4)

$$g_u g_i^{r+1}(a_i^m, a_j^s, \ldots)=\sum_k \varepsilon_k g_i^{r+1}(a_i^m, a_j^s, \ldots, a_k^p, \ldots)$$

$$=f_i^r(a_i^m, a_j^s, \ldots)\,.$$

$$g_u g_i^{r+1}(a_j^s, \ldots\ldots) \;=\sum_k \varepsilon_k g_i^{r+1}(a_j^s, \ldots, a_k^p, \ldots)$$

$$=-\gamma_{ji}^{sm}\bar{\psi}_i^r(a_j^s, \ldots)=-\psi_i^r(a_j^s, \ldots)\,.$$

Also ist der Zyklus f^r in $U(D_o^n)$ dem Zyklus $g^r=f^r-f_i^r+\psi_i^r$ homolog. Der Zyklus g^r ist von der Form

$$g^r(a_i^m, a_j^s, \ldots)=0 \qquad \text{für bestimmtes } a_i^m\,.$$

Durch Wiederholung dieses Verfahrens beweist man, dass f^r einem Zyklus von der Form

$$g^r(a_i^{m_r}, \ldots, a^{m_o})=0 \qquad \text{für} \quad m_r>r\,,$$

homolog ist.

b). Wenn ein r-dimensionaler Zyklus g^r in $U(D_o^n)$ berandet, so berandet er einen algebraischen Komplex g^{r+1} von der Form

$$g^{r+1}(a_i^{m_{r+1}}, \ldots, a^{m_o})=0\,, \qquad \text{wenn } m_{r+1}>r+1 \text{ ist,}$$

wo $a_i^{m_{r+1}}>\cdots>a^{m_o}$ ist.

Beweis von b). Es sei $g_u f^{r+1}=g^r$ in $U(D_o^n)$.

Wenn $f^{r+1}(a_i^m, a_j^s, \ldots)\neq 0$ für $m>r+1$ ist, so ist

$$g_u f_i^{r+1}(a_j^s, \ldots)=\varepsilon_{ji}^{sm}\gamma_{ji}^{sm}f_i^{r+1}(a_i^m, a_j^s, \ldots)\,.$$

Diese Kette ist ein Zyklus in $Aa_i^m-a_i^m$. Daher gibt es nach a) eine $r+1$-dimensionale Kette ψ_i^{r+1} in $Aa_i^m-a_i^m$, so dass

$$g_u\psi_i^{r+1}=g_u f_i^{r+1}\,.$$

Durch Wiederholung dieses Verfahrens kann man leicht die Behauptung b) beweisen.

Aus a), b) folgt unser Satz nach den Bedingungen über die Inzidenzzahlen des Zellenraumes D.