32. *Sur la connexion de Weyl-Hlavatý et la géométrie conforme.*

Par Kentaro YANO.

Institut de Mathématiques, Université Impériale de Tokyo.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., May 12, 1939.)

La géométrie conforme généralisée a été premièrement étudiée par M. Weyl[1] qui a cherché les invariants d'un espace de Riemann par rapport à la transformation conforme $g_{\mu\nu} \to \rho g_{\mu\nu}$. Ce point de vue a été adopté par les géomètres de l'Ecole de Princeton.[2] Ils ont introduit une densité tensorielle $G_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}/g^{\frac{1}{n}}$, du poids $-\frac{2}{n}$ et invariante par rapport à la transformation conforme $g_{\mu\nu} \to \rho g_{\mu\nu}$, alors la géométrie conforme est la théorie de la forme quadratique relative $G_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}$.

D'autre part, M. Cartan[3] a introduit la notion d'espace à connexion conforme et développé la théorie de cet espace avec sa méthode du repère mobile.

MM. Schouten et Haantjes[4] ont récemment étudié aussi la géométrie conforme généralisée avec une méthode projective.

Dans cette Note, nous allons montrer comment on peut utiliser, pour étudier la géométrie conforme, une connexion qui porte le nom de M. Weyl et a été étudiée par M. Hlavatý.[5]

Une transformation conforme de la métrique d'un espace riemannien dont la forme fondamentale est $g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}$ sera représentée par

$$g_{\mu\nu} \to \rho g_{\mu\nu} \qquad (\lambda, \mu, \nu, \dots=1, 2, \dots, n) \tag{1}$$

où ρ est une fonction des coordonnées x^{λ}.

La densité tensorielle du poids $-\frac{2}{n}$ définie par

$$G_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}/g^{\frac{1}{n}} \tag{2}$$

où g est le déterminant formé avec les $g_{\mu\nu}$, est invariante par rapport à cette transformation conforme.

---

1) H. Weyl: Reine Infinitesimalgeometrie. Math. Zeitschr. **2** (1918), 384–411.

2) T. Y. Thomas: The differential invariants of generalized spaces. Cambridge University Press. (1935).

3) E. Cartan: Les espaces à connexion conforme. Annales de la Soc. Polonaise de Math. **2** (1923), 171–221.

K. Yano: Sur la théorie des espaces à connexion conforme. (sous presse)

4) J. A. Schouten et J. Haantjes: Beiträge zur allgemeinen (gekrümmten) konformen Differentialgeometrie I. II. Math. Ann. **112** (1936), 594–629. **113** (1936), 568–583.

5) V. Hlavatý: Système de connexions de M. Weyl. Acad. Tchèque Sci. Bull. int. **37** (1936), 181–184.

Cela étant, introduisons une connexion symétrique $\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}$, Q_{ν}[1] par rapport à laquelle la dérivée covariante de $G_{\mu\nu}$ s'annulle, soit,

$$G_{\lambda\mu;\,\nu} \equiv G_{\lambda\mu,\,\nu} - G_{\varkappa\mu}\Pi^{\varkappa}_{\lambda\nu} - G_{\lambda\varkappa}\Pi^{\varkappa}_{\mu\nu} + \frac{2}{n}G_{\lambda\mu}Q_{\nu} = 0\,, \tag{3}$$

où le virgule désigne la dérivée ordinaire par rapport à la variable x^{ν}.

Les équations (3) nous donnent

$$\Pi^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}G^{\lambda\varkappa}(G_{\varkappa\mu,\,\nu} + G_{\varkappa\nu,\,\mu} - G_{\mu\nu,\,\varkappa}) + \frac{1}{n}(\delta^{\lambda}_{\mu}Q_{\nu} + \delta^{\lambda}_{\nu}Q_{\mu} - G^{\lambda\varkappa}Q_{\varkappa}G_{\mu\nu})\,, \tag{4}$$

où

$$G^{\lambda\varkappa}G_{\varkappa\mu} = \delta^{\lambda}_{\mu}.$$

Les coefficients $\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}$ de la connexion sont invariants par rapport à la transformation conforme (1), mais le choix de Q_{ν} étant tout à fait arbitraire, Q_{ν} peut subir les transformations de la forme:

$$Q_{\nu} \rightarrow Q_{\nu} + n\phi_{\nu}\,, \tag{5}$$

où ϕ_{ν} est un vecteur covariant arbitraire.

Quand on effectue une transformation de la forme (5), les $\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}$ se transforment d'après

$$\Pi^{\lambda}_{\mu\nu} \rightarrow \Pi^{\lambda}_{\mu\nu} + \delta^{\lambda}_{\mu}\phi_{\nu} + \delta^{\lambda}_{\nu}\phi_{\mu} - G^{\lambda\varkappa}\phi_{\varkappa}G_{\mu\nu}\,. \tag{6}$$

Les formules (4) peuvent être aussi écrites sous la forme suivante:

$$\Pi^{\lambda}_{\mu\nu} = \{^{\lambda}_{\mu\nu}\} + \delta^{\lambda}_{\mu}p_{\nu} + \delta^{\lambda}_{\nu}p_{\mu} - g^{\lambda\varkappa}p_{\varkappa}g_{\mu\nu}\,, \tag{7}$$

où

$$\{^{\lambda}_{\mu\nu}\} = \frac{1}{2}g^{\lambda\varkappa}(g_{\varkappa\mu,\,\nu} + g_{\varkappa\nu,\,\mu} - g_{\mu\nu,\,\varkappa})\,, \quad g^{\lambda\varkappa}g_{\varkappa\mu} = \delta^{\lambda}_{\mu}, \tag{8}$$

$$p_{\nu} = \frac{1}{n}[Q_{\nu} - (\log\sqrt{g}\,)_{,\,\nu}]\,. \tag{9}$$

On voit donc que les $\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}$ donnent une connexion de M. Weyl, mais quand on effectue une transformation conforme (1), les p_{ν} se transforment d'après

$$p_{\nu} \rightarrow p_{\nu} - \frac{1}{2}(\log\rho)_{,\,\nu} \tag{10}$$

et par conséquent les $\Pi^{\lambda}_{\mu\nu}$ restent invariants.

Il est à remarquer que si l'on pose

$$K^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}G^{\lambda\varkappa}(G_{\varkappa\mu,\,\nu} + G_{\varkappa\nu,\,\mu} - G_{\mu\nu,\,\varkappa})\,, \tag{11}$$

on a, en vertu de $|G_{\lambda\mu}| = 1$,

$$K^{\lambda}_{\lambda\nu} = K^{\lambda}_{\nu\lambda} = 0\,. \tag{12}$$

---

1) J. A. Schouten et V. Hlavatý: Zur Theorie der allgemeinen linearen Übertragung. Math. Zeitschr. **30** (1929), 414–432.

H. Takeno: On relative tensors. Journal of Science of the Hirosima University. series A. **5** (1935), 31–41.

On tire donc de (4)

$$\Pi^\lambda_{\lambda\nu} = Q_\nu\,. \tag{13}$$

Pour étudier les invariants conformes de la métrique $g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$, nous pouvons utiliser la connexion $\Pi^\lambda_{\mu\nu}$, Q_ν. Les invariants conformes sont les invariants qui ne dépendent pas de Q_ν. Nous en donnerons quelques exemples.

Désignons par $\Pi^\lambda_{\mu\nu\omega}$ le tenseur de courbure formé avec les $\Pi^\lambda_{\mu\nu}$ et par $F^\lambda_{\mu\nu\omega}$ celui formé avec les $K^\lambda_{\mu\nu}$, alors on aura

$$\Pi^\lambda_{\mu\nu\omega} = F^\lambda_{\mu\nu\omega} - Q_{\mu\nu}\delta^\lambda_\omega + Q_{\mu\omega}\delta^\lambda_\nu - G_{\mu\nu}Q_{\kappa\omega}G^{\kappa\lambda} + G_{\mu\omega}Q_{\kappa\nu}G^{\kappa\lambda} + \delta^\lambda_\mu(Q_{\nu\omega} - Q_{\omega\nu})\,, \tag{14}$$

où

$$Q_{\mu\nu} = \frac{1}{n}Q_{\mu,\nu} - \frac{1}{n}Q_\kappa K^\kappa_{\mu\nu} - \frac{1}{n^2}Q_\mu Q_\nu + \frac{1}{2n^2}G^{\kappa\omega}Q_\kappa Q_\omega G_{\mu\nu}\,. \tag{15}$$

En remarquant que

$$\left[-\frac{\Pi_{\mu\nu}}{n-2} + \frac{G_{\mu\nu}\Pi}{2(n-1)(n-2)} + \frac{S_{\mu\nu}}{n(n-2)}\right] - \left[-\frac{F_{\mu\nu}}{n-2} + \frac{G_{\mu\nu}F}{2(n-1)(n-2)}\right] = Q_{\mu\nu}\,,$$

où

$$\Pi_{\mu\nu} = \Pi^\lambda_{\mu\nu\lambda}\,,\quad \Pi = G^{\mu\nu}\Pi_{\mu\nu}\,,\quad S_{\mu\nu} = \Pi_{\mu\nu} - \Pi_{\nu\mu}\,,\quad F_{\mu\nu} = F^\lambda_{\mu\nu\lambda}\,,\quad F = G^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\,,$$

on tire de (14)

$$\begin{aligned}
&\Pi^\lambda_{\mu\nu\omega} - \frac{1}{n-2}(\Pi_{\mu\nu}\delta^\lambda_\omega - \Pi_{\mu\omega}\delta^\lambda_\nu + G_{\mu\nu}\Pi_{\kappa\omega}G^{\kappa\lambda} - G_{\mu\omega}\Pi_{\kappa\nu}G^{\kappa\lambda}) \\
&\quad + \frac{\Pi}{(n-1)(n-2)}(G_{\mu\nu}\delta^\lambda_\omega - G_{\mu\omega}\delta^\lambda_\nu) \\
&\quad + \frac{1}{n(n-2)}(S_{\mu\nu}\delta^\lambda_\omega - S_{\mu\omega}\delta^\lambda_\nu + G_{\mu\nu}S_{\kappa\omega}G^{\kappa\lambda} - G_{\mu\omega}S_{\kappa\nu}G^{\kappa\lambda}) + \frac{1}{n}\delta^\lambda_\mu S_{\nu\omega} \\
&= F^\lambda_{\mu\nu\omega} - \frac{1}{n-2}(F_{\mu\nu}\delta^\lambda_\omega - F_{\mu\omega}\delta^\lambda_\nu + G_{\mu\nu}F_{\kappa\omega}G^{\kappa\lambda} - G_{\mu\omega}F_{\kappa\nu}G^{\kappa\lambda}) \\
&\quad + \frac{F}{(n-1)(n-2)}(G_{\mu\nu}\delta^\lambda_\omega - G_{\mu\omega}\delta^\lambda_\nu)\,.
\end{aligned} \tag{16}$$

Le premier membre de (16) nous assure que le deuxième membre est un tenseur et le deuxième membre nous dit à son tour que le premier membre est un tenseur indépendant de Q_ν, donc c'est un tenseur conforme de courbure. Ce n'est pas d'autre chase que le tenseur conforme de courbure de M. Weyl.

Cela étant, considérons une courbe dans notre espace et introduisons, sur cette courbe, un paramètre s tel que

$$G_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 1\,, \tag{17}$$

alors la densité tensorielle $G_{\mu\nu}$ étant du poids $-\frac{2}{n}$, $\frac{dx^\nu}{ds}$ est une densité vectorielle du poids $+\frac{1}{n}$.

La dérivée covariante de cette densité vectorielle

$$\frac{\delta^2 x^\lambda}{\delta s^2}=\frac{d^2 x^\lambda}{ds^2}+\Pi^\lambda_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}-\frac{1}{n}\frac{dx^\lambda}{ds}Q_\nu\frac{dx^\nu}{ds} \tag{18}$$

est une densité vectorielle du poids $\frac{2}{n}$, mais elle n'est pas un invariant conforme. La dérivée seconde

$$\begin{aligned}\frac{\delta^3 x^\lambda}{\delta s^3}=&\frac{d}{ds}\left(\frac{d^2 x^\lambda}{ds^2}+\Pi^\lambda_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}-\frac{1}{n}\frac{dx^\lambda}{ds}Q_\nu\frac{dx^\nu}{ds}\right)\\&+\Pi^\lambda_{\mu\nu}\left(\frac{d^2x^\mu}{ds^2}+\Pi^\mu_{\rho\tau}\frac{dx^\rho}{ds}\frac{dx^\tau}{ds}-\frac{1}{n}\frac{dx^\mu}{ds}Q_\rho\frac{dx^\rho}{ds}\right)\frac{dx^\nu}{ds}\\&-\frac{2}{n}\left(\frac{d^2x^\lambda}{ds^2}+\Pi^\lambda_{\rho\tau}\frac{dx^\rho}{ds}\frac{dx^\tau}{ds}-\frac{1}{n}\frac{dx^\lambda}{ds}Q_\rho\frac{dx^\rho}{ds}\right)Q_\nu\frac{dx^\nu}{ds}\,,\end{aligned} \tag{19}$$

est du poids $\frac{3}{n}$, mais elle n'est pas un invariant conforme non plus.

En combinant les (18) et (19), on obtient

$$\begin{aligned}&\frac{\delta^3x^\lambda}{\delta s^3}+\frac{dx^\lambda}{ds}\left[G_{\mu\nu}\frac{\delta^2x^\mu}{\delta s^2}\frac{\delta x^\nu}{\delta s^2}-\Pi^0_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\right]+G^{\lambda\kappa}\Pi^0_{\kappa\nu}\frac{dx^\nu}{ds}\\&=\frac{d}{ds}\left(\frac{d^2x^\lambda}{ds^2}+K^\lambda_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\right)+\left(\frac{d^2x^\mu}{ds^2}+K^\mu_{\rho\tau}\frac{dx^\rho}{ds}\frac{dx^\tau}{ds}\right)K^\lambda_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{ds}\\&\quad+\frac{dx^\lambda}{ds}\left[G_{\mu\nu}\left(\frac{d^2x^\mu}{ds^2}+K^\mu_{\rho\tau}\frac{dx^\rho}{ds}\frac{dx^\tau}{ds}\right)\left(\frac{d^2x^\nu}{ds^2}+K^\nu_{\sigma\omega}\frac{dx^\sigma}{ds}\frac{dx^\omega}{ds}\right)\right.\\&\quad\left.-F^0_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\right]+G^{\lambda\kappa}F^0_{\kappa\nu}\frac{dx^\nu}{ds}\,,\end{aligned} \tag{20}$$

où

$$\Pi^0_{\mu\nu}=-\frac{\Pi_{\mu\nu}}{n-2}+\frac{G_{\mu\nu}\Pi}{2(n-1)(n-2)}+\frac{S_{\mu\nu}}{n(n-2)}\,, \tag{21}$$

$$F^0_{\mu\nu}=-\frac{F_{\mu\nu}}{n-2}+\frac{G_{\mu\nu}F}{2(n-1)(n-2)}\,.$$

Les formules (20) nous montrent que le premier membre est une densité vectorielle du poids $\frac{3}{n}$, et indépendante de Q_ν, donc

$$\begin{aligned}&\frac{d}{ds}\left(\frac{d^2x^\lambda}{ds^2}+K^\lambda_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\right)+\left(\frac{d^2x^\mu}{ds^2}+K^\mu_{\rho\tau}\frac{dx^\rho}{ds}\frac{dx^\tau}{ds}\right)K^\lambda_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{ds}\\&\quad+\frac{dx^\lambda}{ds}\left[G_{\mu\nu}\left(\frac{d^2x^\mu}{ds^2}+K^\mu_{\rho\tau}\frac{dx^\rho}{ds}\frac{dx^\tau}{ds}\right)\left(\frac{d^2x^\nu}{ds^2}+K^\nu_{\sigma\omega}\frac{dx^\sigma}{ds}\frac{dx^\omega}{ds}\right)\right.\\&\quad\left.-F^0_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\right]+G^{\lambda\kappa}F^0_{\kappa\nu}\frac{dx^\nu}{ds}=0\,,\end{aligned} \tag{22}$$

sont des équations invariantes par rapport à la transformation conforme.

Ce sont les équations différentielles d'une courbe que nous appelons la circonférence généralisée.[1]

Cela dit, prenons un paramètre scalaire t sur cette courbe, alors $\frac{dt}{ds}\left(=\frac{\delta t}{\delta s}\right)$ étant une densité du poids $\frac{1}{n}$, on a, pour les dérivées covariantes successives de cette densité,

$$
\begin{aligned}
(23)\qquad & \frac{\delta t}{\delta s}=\frac{dt}{ds}, \\
& \frac{\delta^2 t}{\delta s^2}=\frac{d^2 t}{ds^2}-\frac{1}{n}\frac{dt}{ds}Q_\nu\frac{dx^\nu}{ds}, \\
& \frac{\delta^3 t}{\delta s^3}=\frac{d^3 t}{ds^3}-\frac{1}{n}\frac{d^2 t}{ds^2}Q_\nu\frac{dx^\nu}{ds}-\frac{1}{n}\frac{dt}{ds}(Q_{\mu,\nu}-Q_\lambda K^\lambda_{\mu\nu})\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} \\
& \qquad -\frac{1}{n}\frac{dt}{ds}Q_\lambda\left(\frac{d^2x^\lambda}{ds^2}+K^\lambda_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\right) \\
& \qquad -\frac{2}{n}\left(\frac{d^2 t}{ds^2}-\frac{1}{n}\frac{dt}{ds}Q_\mu\frac{dx^\mu}{ds}\right)Q_\nu\frac{dx^\nu}{ds},
\end{aligned}
$$

et par suite

$$
\begin{aligned}
(24)\qquad & \frac{\frac{\delta^3 t}{\delta s^3}}{\frac{\delta t}{\delta s}}-\frac{3}{2}\left(\frac{\frac{\delta^2 t}{\delta s^2}}{\frac{\delta t}{\delta s}}\right)^2-\frac{1}{2}G_{\mu\nu}\frac{\delta^2 x^\mu}{\delta s^2}\frac{\delta^2 x^\nu}{\delta s^2}+\Pi^0_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} \\
& =\frac{\frac{d^3 t}{ds^3}}{\frac{dt}{ds}}-\frac{3}{2}\left(\frac{\frac{d^2 t}{ds^2}}{\frac{dt}{ds}}\right)^2-\frac{1}{2}G_{\mu\nu}\left(\frac{d^2x^\mu}{ds^2}+K^\mu_{\rho\tau}\frac{dx^\rho}{ds}\frac{dx^\tau}{ds}\right) \\
& \qquad \left(\frac{d^2x^\nu}{ds^2}+K^\nu_{\sigma\omega}\frac{dx^\sigma}{ds}\frac{dx^\omega}{ds}\right)+F^0_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}.
\end{aligned}
$$

On voit donc que le deuxième membre est une densité du poids $\frac{2}{n}$ qui reste invariante pendant la transformation conforme $g_{\mu\nu}\to\rho g_{\mu\nu}$.

Un paramètre t qui rend nulle cette densité est ce que nous appelons le paramètre projectif sur la circonférence généralisée.[1]

---

1) K. Yano: Sur les circonférences généralisées dans les espaces à connexion conforme. Proc. **14** (1938), 329–332.