45. *Eine Bemerkung zur Dimensionstheorie.*

Von Kunihiko KODAIRA.
Mathematical Institute, Tokyo Imperial University.
(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., June 12, 1939.)

Man definiert die Dimensionszahl von einem Kompaktum F bekanntlich auf zweierlei Weise: Nach Lebesgue-Brouwer wird sie nämlich als die kleinste nicht-negative ganze Zahl n definiert, sodass F beliebig feine Überdeckung mit der Ordnung $n+1$ besitzt. Die Dimension von F in diesem Sinne wollen wir mit $\dim F$ bezeichnen. Andererseits heisst F nach Urysohn-Menger höchstens n-dimensional, wenn jeder Punkt p von F in einer beliebig kleinen Umgebung $U(p)$ enthalten ist, deren Rand $\overline{U(p)}-U(p)$ höchstens $(n-1)$-dimensional ist; die Dimension von F wird hier somit rekursiv definiert, indem als Dimension der leeren Menge die Zahl -1 zugeschrieben wird. Die beiden Definitionen sind bekantlich äquivalent falls $\dim F < \infty$ ist.[1] Im folgenden soll dafür ein einfacher Beweis mitgeteilt werden, der sich allein auf elementareren Teil der Alexandroffschen Dimensionstheorie stützt.[2]

Wir beginnen mit dem

Hilfssatz. Es sei F ein Kompaktum und $\dim F=n$. $(K_1^n, \dots, K_m^n, \dots)$ *sei ein n-dimensionales Projektionsspektrum von F, und* $(\mathfrak{U}_1, \dots, \mathfrak{U}_m, \dots)$ *die entsprechende Folge von Unterteilungen von F. $\mathfrak{U}_m$ ist also eine abgeschlossene Überdeckung von F. Die Elemente von $\mathfrak{U}_m$ bezeichnen wir mit F_m (nötigenfalls mit oberen Indizes versehen). Dann gilt*

$$\dim F_m^{(0)} F_m^{(1)} \dots F_m^{(r)} \leqq n-r .$$

Beweis. $l(>m)$ sei fest gewählt. Da $\mathfrak{U}_l$ eine Verfeinerung von $\mathfrak{U}_m$ ist, ist dann $F_m^{(j)}$ die Summe gewisser Elemente $F_l^{(jk)}$ von $\mathfrak{U}_l$:

$$F_m^{(j)} = \sum_k F_l^{(jk)} .$$

Setzen wir nun

$$F^{(k)} = F_l^{(0k)} F_m^{(1)} F_m^{(2)} \dots F_m^{(r)} ,$$

dann bildet offenbar $\{F^{(k)}\}$ eine abgeschlossene Überdeckung von $F_m^{(0)} F_m^{(1)} \dots F_m^{(r)}$. Um die Ordnung dieser Überdeckung abzuschätzen, setzen wir voraus, dass

$$F^{(1)} F^{(2)} \dots F^{(\nu)} \neq 0$$

sei, und bezeichnen mit p einen Punkt aus $F^{(1)} F^{(2)} \dots F^{(\nu)}$. Da $F_m^{(j)}$ $(j=1, 2, \dots r)$ den Punkt p enthält, so gibt es für jedes j mindestens ein $F_l^{(jh_j)}$ mit

$$F_l^{(jh_j)} \ni p .$$

---

1) Siehe z. B. Menger: Dimensionstheorie, S. 155. Freudenthal, Entwicklungen von Räumen und ihren Gruppen. (Compositio Math. 4 (1937), S. 228–231).

2) Vgl. Alexandroff, Dimensionstheorie. (Math. Ann. Bd. 106, S. 161.)

Andererseits gilt auch

$$F_l^{(0k)} \ni p, \qquad k=1, 2, \dots, \nu.$$

Diese $r+\nu$ Mengen $F_l^{(1h_1)}, \dots, F_l^{(rh_r)}, F_l^{(01)}, \dots, F_l^{(0\nu)}$ sind aber offenbar alle voneinander verschieden. Also muss $r+\nu$ kleiner als die Ordnung von $\mathfrak{U}_l$ sein:

$$r+\nu \leqq n+1, \qquad \text{d. h} \quad \nu \leqq n-r+1.$$

Da die Überdeckung $\{F^{(k)}\}$ mit wachsendem l beliebig fein wird, folgt hieraus unsere Behauptung:

$$\dim F_m^{(0)} F_m^{(1)} \dots F_m^{(r)} \leqq n-r.$$

Nun sei p ein beliebig gewählter Punkt von F. Setzen wir

$$U_m(p) = F - \sum_{F_m^{(h)} \not\ni p} F_m^{(h)},$$

dann ist offensichtlich

$$U_m(p) \subset \sum_{F_m^{(k)} \ni p} F_m^{(k)},$$

mithin

$$\overline{U_m(p)} - U_m(p) \subset \sum_{F_m^{(k)} \ni p} F_m^{(k)} \sum_{F_m^{(h)} \not\ni p} F_m^{(h)} = \sum\sum F_m^{(k)} F_m^{(h)}.$$

Hieraus folgt, nach dem Hilfssatz und dem bekannten Summensatz[1]

$$\dim \left(\overline{U_m(p)} - U_m(p)\right) = \dim \left(\sum\sum F_m^{(k)} F_m^{(h)}\right) \leqq n-1.$$

Die Umgebung $U_m(p)$ kann nun mit geeigneter Wahl von m beliebig klein gemacht werden. Damit ist also der folgende Satz bewiesen:

Satz 1. Es sei $\dim F=n$. *Dann besitzt jeder Punkt* p *von* F *eine beliebig kleine Umgebung* $U(p)$ *mit der Eigenschaft:*

$$\dim \left(\overline{U(p)} - U(p)\right) \leqq n-1.$$

Umgekehlt gilt nun:

Satz 2. Es sei $\dim F < +\infty$. *Wenn jeder Punkt* p *von* F *eine beliebig kleine Umgebung* $U(p)$ *mit der Eigenschaft:*

$$\dim \left(\overline{U(p)} - U(p)\right) \leqq n-1$$

besitzt, so ist $\dim F \leqq n$.

Zum Beweis setzen wir

$$\dim F = d$$

und nehmen an, dass $d > n$ sei. Da $\dim F$ bekanntlich mit der Homologie-dimension mod. 1 übereinstimmt, gibt es einen $(d-1)$-dimensionalen wesentlich berandeten Zyklus Z^{d-1} in F. Es gibt also ein Teilkompaktum Z von F, sodass

$$Z^{d-1} \subset Z. \qquad Z^{d-1} \not\sim 0 \quad \text{in} \quad Z$$

aber

$$Z^{d-1} \sim 0 \qquad \text{in} \quad F.$$

1) Vol. Alexandroff, a. a. O. S. 216.

Es sei $\Phi(\supset Z)$ ein minimaler Homologie-träger von Z^{d-1}. Z^{d-1} soll also ~ 0 in Φ, aber $\not\sim 0$ in jedem echten Teilkompaktum von Φ sein. Es sei C^d ein Komplex von Φ, der Z^{d-1} berandet:

$$Z^{d-1}=\dot{C}^d$$

p sei nun ein Punkt aus $\Phi-Z$. Wir wählen eine Umgebung $U=U(p)$ von p so, dass

$$\dim(\bar{U}-U)\leqq n-1 \quad \text{und} \quad \bar{U}\cdot Z=0$$

wird.

Das oben eingeführte C^d lässt sich dann offenbar folgendermassen darstellen:

$$C^d=C_0^d+C_1^d\,, \qquad C_0^d\subset\bar{U}\Phi\,, \qquad C_1^d\subset\Phi-U\,.$$

Hieraus folgt

$$Z^{d-1}=\dot{C}_0^d+\dot{C}_1^d\,,$$

und daher, da $\dot{C}_0^d\subset\bar{U}\Phi$ und $Z^{d-1}-\dot{C}_1^d\subset\Phi-U$ ist,

$$\dot{C}_0^d=Z^{d-1}-\dot{C}_1^d\subset\bar{U}\Phi-U\subset\bar{U}-U\,.$$

$\dot{C}_0^d$ ist nun ein $(d-1)$-dimensionaler Zyklus. Da aber nach unserer Voraussetzung

$$\dim(\bar{U}-U)\leqq n-1<d-1\,,$$

ist, folgt

$$\dot{C}_0^d\sim 0 \qquad \text{in } \bar{U}\Phi-U;$$

also muss es einen Komplex D^d aus $\bar{U}\Phi-U$ so geben, dass

$$\dot{C}_0^d=Z^{d-1}-\dot{C}_1^d=\dot{D}^d \quad \text{oder} \quad Z^{d-1}=(C_1^d+D^d)^{\cdot}$$

gilt. Wegen

$$C_1^d+D^d\subset\Phi-U$$

bekommt man hieraus

$$Z^{d-1}\sim 0 \qquad \text{in } \Phi-U\,,$$

entgegen der Minimalität von Φ.

Also muss $\dim F\leqq n-1$ sein, w. z. b. w.

Die Äquivalenz der beiden Definitionen der Dimension von F folgt nun aus unsern beiden Sätzen 1, 2.