53. *Sur l'approximation des fonctions continues par des fonctions harmoniques (II).*

Par Masao INOUE.
Institut Mathématique, Université Impériale d'Osaka.
(Comm. by T. YOSIE, M.I.A., July 12, 1939.)

Dans la première Note[1] nous avons vu que chaque fonction réelle, définie et continue sur un ensemble fermé et borné de classe (P) peut être considérée comme la limite d'une suite de fonctions harmoniques, uniformément convergente sur cet ensemble. Dans la Note présente nous allons nous occuper de la structure géométrique de l'ensemble de classe (P).

1. Voici la définition de l'ensemble de classe (P):

Soit F un ensemble plan fermé et borné. On dira que F est de classe (P) lorsqu'il existe une constante positive d et une suite de domaines réguliers pour le problème de Dirichlet $\{D_n\}$ telles que

1° F soit contenu dans tout D_n;

2° pour chaque point z de F, on puisse trouver une suite de points frontières z_n (de D_n) tendant vers z de manière à avoir:

$$\mathfrak{P}_{D_n, z_n} \supset [0, d] \qquad (n=1, 2, \dots),$$

où $\mathfrak{P}_{D_n, z_n}$ désigne la projection circulaire de D_n ayant z_n comme centre. Outre cette condition, nous avons ajouté une autre condition notée (a) dans la Note précédente. Mais, étant donné la tendance de z_n vers z, on trouve facilement que la condition (a) est inutile.

D'autre part, on dira qu'un ensemble F fermé et borné jouit de la propriété P lorsqu'il existe une constante positive d satisfaisant à la condition suivante: Ecrivons une circonférence de centre $z \in F$ et de rayon λ. On peut alors trouver, quel que soit λ, un point z^* non situé sur F, à l'intérieur de cette circonférence, tel que toute circonférence de centre z^* et de rayon $\leqq d$ contient des points non situés sur F.

On verra alors facilement que l'ensemble de classe (P) jouit de la propriété P. Maintenant on est en état de démontrer inversement que l'ensemble F fermé et borné jouissant de la propriété P est de classe (P).

Passons à la démonstration:

n étant un nombre naturel, formons un cercle ouvert $C_n(z)$ de centre z et de rayon $\frac{1}{2n}$, relatif à chaque point z de F. Comme F est fermé er borné, on peut en extraire un nombre fini de $C_n(z_i)$ ($z_i \in F$; $i=1, 2, \dots, k$) de sorte que $\sum_{i=1}^{k} C_n(z_i)$ recouvre F. Considérons d'abord un indice i fixé. Puisque F jouit de la propriété P, il existe un point $z_{n,i} \bar{\in} F$, dans l'intérieur de $C_n(z_i)$, tel que toute circonférence de centre

1) M. Inoue: Sur l'approximation des fonctions continues par des fonctions harmoniques, Proc. **15** (1939), 177–181.

$z_{n,i}$ et de rayon $\leqq d$, contient des points non situés sur F, où d est une constante attachée à F et qui existe par hypothèse.

Désignons par $\mathfrak{C}(z_{n,i}; r)$ la circonférence de centre $z_{n,i}$ et de rayon r. On peut alors faire correspondre, à chaque r tel que $0 \leqq r \leqq d$, un point $z_{n,i}(r) \bar{\epsilon} F$ (par exemple, un point situé sur $\mathfrak{C}_n(z_{n,i}; r)$ mais non sur F), par suite un cercle ouvert $O[z_{n,i}(r)]$, de centre $z_{n,i}(r)$ et de rayon assez petit, qui ne contient pas de point de F,[1] enfin un intervalle ouvert d'une dimension $I_{n,i}(r)$ contenant r (par exemple, l'ensemble de $|z-z_{n,i}|$ lorsque z parcourt $O[z_{n,i}(r)]$).

Soit $I^*_{n,i}(r)$ un sous-intervalle ouvert de $I_{n,i}(r)$ contenant r, dont la fermeture $\overline{I^*_{n,i}(r)}$ est entièrement contenue dans $I_{n,i}(r)$. Il existe alors un nombre fini de $I^*_{n,i}(r_j)$ $(0 \leqq r_j \leqq d; j=1,2,\dots,m)$ de sorte que $\sum_{j=1}^{m} I^*_{n,i}(r_j)$ recouvre l'intervalle fermé $[0, d]$.

Posons ici

$$\Gamma_{n,i,j} = \sum_{\rho \in \overline{I^*_{n,i}(r_j)}} \rho e^{i \arg[z_{n,i}(r_j) - z_{n,i}]}.$$

Evidemment $\Gamma_{n,i,j}$ est un segment fermé contenu dans $O[z_{n,i}(r_j)]$. Répétons ce procédé pout tout indice i. En écrivant une circonférence Γ contenant F et tous les $\Gamma_{n,i,j}$ à l'intérieur, désignons par D_n le domaine limité par Γ et découpé le long de tous les $\Gamma_{n,i,j}$.[2]

Formons de même D_n pour tout nombre naturel n. La suite $\{D_n\}$ ainsi obtenue est alors une suite de damaines réguliers satisfaisant aux conditions 1° et 2°.

En effet, la première est évidemment remplie. La seconde est aussi assurée de la manière suivante:

Soit z un point de F. Attachons-lui $\{z_{n,i}\}$,[3] une suite de points frontières de D_n $(n=1,2,\dots)$, si z appartient à $C_n(z_i)$. On a alors pour tout n:

$$|z-z_{n,i}| < \frac{1}{n}.$$

Donc la suite $\{z_{n,i}\}$ tend vers z. D'autre part, en tenant compte de la construction de D_n, on a:

$$\mathfrak{P}_{D_n, z_{n,i}} \supset [0, d] \qquad (n=1,2,\dots).$$

Les deux conditions sont donc remplies, ce qui met en évidence notre proposition, c'est-à-dire que l'ensemble fermé et borné jouissant de la propriété P est de classe (P).

On a enfin le

Théorème. Pour qu'un ensemble fermé et borné soit de classe (P), *il faut et il suffit que cet ensemble jouit de la propriété* P.

On a par conséquent le

Théorème. Toute fonction réelle, définie et continue sur un en-

1) Ce qui est possible car F est fermé.

2) On peut supposer sans perte de généralité que $\Gamma_{n,i,j}$ ne rencontrent pas l'un l'autre.

3) Il se peut que des suites correspondent à un même point de F (par exemple, pour z qui appartient aussi à $C_n(z_j)$ qu'à $C_n(z_j)$, où $i \neq j$) mais rien d'empêche.

semble fermé et borné jouissant de la propriété P peut être uniformément approchée sur cet ensemble par une suite de fonctions harmoniques.

2. La question suivante se pose maintenant: *Quelle est la condition nécéssaire et suffisante pour que chaque fonction réelle, définie et continue sur un ensemble fermé et borné puisse être considérée comme la limite d'une suite de fonctions harmoniques,*[1] *uniformément convergente sur cet ensemble?* Nous avons donné ci-dessus une condition suffisante. Il reste, pour nous, à savoir si cette condition est nécéssaire ou non. D'ailleurs on voit que l'ensemble jouissant de la propriété P est partout non dense, et que cette dernière propriété est évidemment une condition nécéssaire. Donc la question est réduite, en notre cas, à celle de savoir s'il existe un ensemble fermé, borné et partout non dense qui ne jouit pas de la propriété P. En effet, si la réponse à cette question secondaire était négative, on pourrait résoudre la première comme il suit: La condition nécéssaire et suffisante cherchée est que l'ensemble donné soit partout non dense. Mais tout reste encore intact.[2]

---

1) Quoiqu'il ne s'exprime pas explicitement, on exige que chaque fonction harmonique soit définie dans un domaine (ensemble ouvert et connexe) contenant F — au cas même où F ne serait pas connexe.

2) En ce qui concerne l'approximation des fonctions continues par des fonctions harmoniques, on sait une méthode très utile créée par M. Lebesgue et employée plus tard par M. Walsh dans sa Note sur l'approximation des fonctions continues par des polynômes harmoniques. Mais cette méthode ne s'appliquerait pas au cas général où nous sommes.

H. Lebesgue: Sur le problème de Dirichlet, Rendiconti di Polermo, v. **24** (1909), 388–389.

J. L. Walsh: Ueber die Entwicklung einer harmonischen Funktion nach harmonischen Polynomen, Journal für Mathematik, v. **169** (1928), 199–200.