84. Eine Bemerkung über einfache Systeme.

Von Makoto ABE.
Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität Tokyo.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Oct., 12, 1940.)

1. Herr W. Landherr bemerkt in seiner Arbeit über einfache Liesche Ringe,[1] dass jedes einfache distributive System $\mathfrak{S}$ über einem Grundkörper k der Charakteristik 0 sich als ein einfaches System $\mathfrak{t}_{/K}$ über einem (bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten, endlichen) Erweiterungskörper K von k betrachten lässt, welches letztere bei algebraischem Abschliessen des Grundkörpers K einfach bleibt. Diese in einer sehr umfassenden Klasse von assoziativen bzw. nicht assoziativen Systemen gültige Behauptung stellt er unter der einzigen Annahme fest, dass das betreffende System $\mathfrak{S}_{/k}$ bei algebraischem Abschliessen des Grundkörpers eindeutig in die direkte Summe der einfachen Ideale zerfallen soll. Im folgenden soll gezeigt werden, dass auch diese Voraussetzung überflüssig ist; dass sie tatsächlich aus der Einfachheit von $\mathfrak{S}$ folgt; und dass übrigens der Gründkörper k ein ganz beliebiger vollkommener Körper (also z. B. auch ein Galois-Feld) sein kann.[2]

2. Von je zwei Elementen x, y aus einem endlichen k-Modul $\mathfrak{S}$ (k: ein Körper) sei das „Produkt" xy unter einziger Bedingung definiert, dass xy in bezug auf x und y bilinear ist:

$$\begin{aligned} (a_1x_1+a_2x_2)y &= a_1(x_1y)+a_2(x_2y), \\ x(a_1y_1+a_2y_2) &= a_1(xy_1)+a_2(xy_2), \end{aligned} \qquad a_1, a_2 \in k$$

Ein solches System $\mathfrak{S}$ nennen wir ein distributives System über k oder kurz ein „*k-System*". Bilden $u_1, u_2, \dots, u_r$ eine k-Basis von $\mathfrak{S}$:

$$\mathfrak{S}=ku_1+\cdots+ku_r\,,$$

so wird das k-System $\mathfrak{S}$ durch die Multiplikationstabelle der Basiselement u_i vollständig bestimmt:

$$u_iu_j=\sum_{k=1}^{r} c_{ij}^k u_k\,; \qquad 1\leqq i\,,\ j\leqq r\,, \qquad c_{ij}^k \in k\,.$$

c_{ij}^k heissen Strukturkonstanten von $\mathfrak{S}$. Erweitert man den Grundkörper k zu einem Oberkörper K und lässt dabei die Strukturkonstanten unverändert, so entsteht ein K-System $\mathfrak{S}_K=Ku_1+\cdots+Ku_r$. Wir schreiben statt $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}_K$ auch $\mathfrak{S}_{/k}$ bzw. $\mathfrak{S}_{K/k}$, um den ursprünglichen Grundkörper k kenntlich zu machen.

Ein k-Teilmodul $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{S}$ heisse (zweiseitiges) Ideal von $\mathfrak{S}$, wenn

1) W. Landherr; Über einfache Liesche Ringe (Abh. Math. Sem. Hamburg, **11** (1936), 41–64), Sätze 1 und 2.

2) So können wir die Diskriminantenbetrachtung vermeiden, die Herr Landherr zur Verifikation seiner Voraussetzung bei assoziativen bzw. alternativen bzw. Lieschen Systemen zu Hilfe nimmt, was nur im Falle der Charakteristik 0 zum Ende führt.

$\mathfrak{a}\mathfrak{S} \subset \mathfrak{a}$ und $\mathfrak{S}\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}$ gilt; $\mathfrak{S}$ heisse (zweiseitig) *einfach*, wenn es kein anderes Ideal als (0) und $\mathfrak{S}$ selbst enthält. Ein (einfaches) System heisse *normal-einfach*,[1] wenn $\mathfrak{S}$ bei algebraischem Abschliessen des Gründkörpers k einfach bleibt. Herrn Landherrs Satz (in verallgemeinerter Form) lautet dann:

Satz. *Das einfache distributive System $\mathfrak{S}$ über den vollkommenen Grundkörper k ist einem normal-einfachen System $\mathfrak{t}_{/\Omega}$ über einem endlichen Erweiterungkörper Ω von k k-operatorisomorph. Ω und $\mathfrak{t}$ sind bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.*

3. Wir brauchen das folgende bekannte Lemma über die Grundkörpererweiterung eines Moduls:

Lemma. Es sei $\mathfrak{m}$ ein k-Modul; K sei eine separable galoissche (endliche) Erweiterung von k.

$$\mathfrak{m} = ku_1 + \cdots + ku_r,$$

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{m}_K = Ku_1 + \cdots + Ku_r.$$

Jeder Automorphismus σ von K über k induziert einen Automorphismus von $\mathfrak{M}$: $(\sum a_i u_i)^\sigma = \sum a_i^\sigma u_i$, $a_i \in K$. Ist ein Teilmodul $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{M}$ gegen jedes σ invariant ($\mathfrak{N}^\sigma \subset \mathfrak{N}$), ist $\mathfrak{N}$ die K-Erweiterung eines Teilmoduls $\mathfrak{n}$ von $\mathfrak{m}$:

$$\mathfrak{N} = K\mathfrak{n}, \qquad \mathfrak{n} = \mathfrak{N} \frown \mathfrak{m}.$$

Beweis bekannt.[2]

4. Der Grundkörper k sei im folgenden immer als vollkommen vorausgesetzt. Wir beweisen nun:

Ein einfaches k-System $\mathfrak{S}$ zerfällt bei algebraischem Abschliessen des Grundkörpers eindeutig in die direkte Summe der einfachen Ideale.

Beweis. Es sei A der algebraisch abgeschlossene Körper über k. $\mathfrak{A}$ sei ein minimales Ideal $\neq (0)$ von $\mathfrak{S}_A$. Wir nehmen eine A-Basis $v_1, \dots, v_n$ von $\mathfrak{A}$:

$$\mathfrak{A} = Av_1 + \cdots + Av_n, \qquad v_i = \sum_j a_{ij} u_j, \qquad a_{ij} \in A.$$

K sei eine endliche galoissche Erweiterung von k, die alle (endlichviele) Elemente a_{ij} enthält. Dann sind $v_1, \dots, v_n \in \mathfrak{S}_K$ und $\mathfrak{a} = \mathfrak{A} \frown \mathfrak{S}_K = Kv_1 + \cdots + Kv_n$ ist ein minimales Ideal von $\mathfrak{S}_K$, dessen Erweiterungsideal in $\mathfrak{S}_A$ gerade $\mathfrak{A}$ ist: $\mathfrak{A} = A\mathfrak{a}$. $1, \sigma, \tau, \dots$ seien die Elemente der Galoisschen Gruppe $\mathfrak{G}$ von K über k. Jedes σ induziert einen Automorphismus σ von $\mathfrak{S}_K$, der sich seinerseits zu einem Automorphismus von $\mathfrak{S}_A$ fortsetzen lässt. Das Ideal $A\mathfrak{a}^\sigma$ von $\mathfrak{S}_A$ ist das Bild von $A\mathfrak{a} = \mathfrak{A}$ bei diesem Automorphismus von $\mathfrak{S}_A$ und daher auch minimal; $\mathfrak{a}^\sigma$ ist wie $\mathfrak{a}$ ein minimales Ideal von $\mathfrak{S}_K$. Für je zwei $\sigma, \tau \in \mathfrak{G}$ gilt also entweder $\mathfrak{a}^\sigma = \mathfrak{a}^\tau$ oder $\mathfrak{a}^\sigma \frown \mathfrak{a}^\tau = (0)$. Die Automorphismen τ von $\mathfrak{G}$, die $\mathfrak{a}$ invariant lassen ($\mathfrak{a}^\tau = \mathfrak{a}$), bilden eine Untergruppe $\mathfrak{g}$ von $\mathfrak{G}$. Man teile nun $\mathfrak{G}$ in linksseitige Nebengruppen nach $\mathfrak{g}$ ein:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{g}\sigma_1 + \cdots + \mathfrak{g}\sigma_j, \; \sigma_1 = 1.$$

1) Wir definieren hier nicht ein „normales System“, wie im assoziativen Fall; „normal-einfach“ bedeutet also nicht „normal und einfach“.

2) Siehe z. B. M. Deuring: Algebren, D. 35.

Jeder Nebengruppe $\mathfrak{g}\sigma_i$ entspricht ein Ideal $\mathfrak{a}_i=\mathfrak{a}^{\sigma_i}$, $\mathfrak{a}_1=\mathfrak{a}$. Für verschiedene i, k sind die Ideale $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{a}_k$ verschieden und daher $\mathfrak{a}_i \frown \mathfrak{a}_k=(0)$. Die Summe aller dieser Ideale $\mathfrak{S}=\mathfrak{a}_1+\cdots+\mathfrak{a}_j$ ist also direkt. $\mathfrak{S}$ ist ferner gegen jeden Automorphismus von $\mathfrak{G}$ invariant. Aus dem angeführten Lemma folgt daher $\mathfrak{S}=K(\mathfrak{S}\frown\mathfrak{s})$; $\mathfrak{S}\frown\mathfrak{s}$ ist ein Ideal $\neq(0)$[1] von $\mathfrak{s}$, also wegen der Einfachheit von $\mathfrak{s}$ $\mathfrak{S}\frown\mathfrak{s}=\mathfrak{s}$. Daraus folgt $\mathfrak{S}=K\mathfrak{s}=\mathfrak{s}_K$, d. h. $\mathfrak{s}_K=\mathfrak{a}_1+\cdots+\mathfrak{a}_j$. Da $\mathfrak{A}_i=A\mathfrak{a}_i=A\mathfrak{a}^{\sigma_i}$ minimale Ideale von $\mathfrak{s}_A$ sind, ist

$$\mathfrak{s}_A=\mathfrak{A}_1+\cdots+\mathfrak{A}_j$$

die direkte Summe seiner minimalen Ideale. Da jedes Ideal von $\mathfrak{A}_i$ auch ein Ideal in $\mathfrak{s}_A$ ist,[2] ist $\mathfrak{A}_i$ ein einfaches Ideal von $\mathfrak{s}_A$. Insbesondere ist ein (beliebiges) minimales Ideal $\mathfrak{A}$ immer einfach.

Die einfache Komponenten $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_j$ sind ferner eindeutig bestimmt. Mit Ausnahme des trivialen Falles $\mathfrak{s}\mathfrak{s}=(0)$ ist $\mathfrak{A}\mathfrak{A}\neq(0)$. Denn aus $\mathfrak{A}\mathfrak{A}=(0)$ würden $\mathfrak{A}_i\mathfrak{A}_i=(0)$ und $\mathfrak{s}_A\mathfrak{s}_A=\sum\mathfrak{A}_i\mathfrak{A}_i=(0)$ folgen, was mit $\mathfrak{s}\mathfrak{s}\neq(0)$ im Widerspruche steht. $\mathfrak{A}$ war aber ein beliebiges minimales Ideal von $\mathfrak{s}_A$; für jedes minimales Ideal $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{s}_A$ ist also auch $\mathfrak{B}\mathfrak{B}\neq(0)$. Es gilt mithin

$$(0)\neq\mathfrak{B}\mathfrak{B}\subset\mathfrak{B}\mathfrak{s}_A=\sum\mathfrak{B}\mathfrak{A}_i.$$

mindestens ein $\mathfrak{B}\mathfrak{A}_i$ ist $\neq(0)$, also $\mathfrak{B}\frown\mathfrak{A}_j\neq(0)$. Wegen der Minimalität von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}_i$ ist dann $\mathfrak{B}=\mathfrak{A}_i$, d. h. $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_i$ sind die einzigen minimalen Ideale von $\mathfrak{s}_A$, w. z. b. w.

Im oben ausgenommenen trivialen Fall $\mathfrak{s}\mathfrak{s}=(0)$ ist jedes Produkt gleich 0 und jeder Teilmodul von $\mathfrak{s}$ ein Ideal; $\mathfrak{s}$ ist also dann und nur dann einfach, wenn $\mathfrak{s}$ eingliedrig ist. Dann ist $\mathfrak{s}_A$ auch eingliedrig und einfach, und die Behauptung gilt in trivialer Weise.

5. Nachdem die Behauptung in Nr. 4 als immer gültig nachgewiesen ist, verläuft der Beweis des Satzes genau so wie bei Herrn Landherr. Ich beschränke mich also hier auf eine kurze Beweisskizze.

Die Elemente s von $\mathfrak{s}(\subset\mathfrak{s}_K)$ lassen sich eindeutig in der Form $s=s_1+\cdots+s_j$, $s_i\in\mathfrak{a}_i$ darstellen. Es gilt $s_i=s_1^{\sigma_i}$ und $s_1^{\tau}=s_1$ für jedes τ von $\mathfrak{g}$. $s\rightarrow s_1$ ist ein Isomorphismus von $\mathfrak{s}$ in $\mathfrak{a}_1$; die Gesammtheit von s_1 bildet also ein mit $\mathfrak{s}$ isomorphes System $\mathfrak{s}_1\subset\mathfrak{a}_1$. Die Elemente von $\mathfrak{s}_1$ sind ferner unter den Elementen von $\mathfrak{a}_1$ durch die Invarianzeigenschaft $s_1^{\tau}=s_1$, $\tau\in\mathfrak{g}$ charakterisiert.

Ω sei nun der Zwischerkörper zwischen k und K, der der Untergruppe $\mathfrak{g}$ von $\mathfrak{G}$ entspricht. Aus $\omega\in\Omega$, $s_1\in\mathfrak{s}$, $\tau\in\mathfrak{g}$ folgt $(\omega s_1)^{\tau}=\omega^{\tau}s_1^{\tau}=\omega s_1$, also $\omega s_1\in\mathfrak{s}_1$, d. h. $\mathfrak{s}_1$ lässt die Elemente von Ω als Operatoren zu; wir können also $\mathfrak{s}_1$ als ein Ω-System $\mathfrak{s}_{1/\Omega}$ betrachten. Da $\mathfrak{s}_{1A/k}$ in j Ideale zerfällt, deren eines mit $\mathfrak{s}_{1A/\Omega}$ isomorph ist, und da andererseits $\mathfrak{s}_{1A/k}\cong\mathfrak{s}_{A/k}$ in genau j einfache Ideale zerfällt, ist $\mathfrak{s}_{1A/\Omega}$ einfach, d. h. $\mathfrak{s}_{1/\Omega}$ ist ein normal-einfaches Ω-System, dass mit $\mathfrak{s}$ k-operatorisomorph ist. Die Eindeutigkeit (bis auf Isomorphie) eines solchen normal-einfachen Systems ist auch wie bei Herrn Landherr zu beweisen.

---

1) Sonst wäre $\mathfrak{S}=K(\mathfrak{S}\frown\mathfrak{s})=(0)$, $\mathfrak{S}\supset\mathfrak{a}=(0)$ und schliesslich $\mathfrak{A}=A\mathfrak{a}=(0)$ entgegen der Voraussetzung.

2) Diese Tatsache folgt wie im assoziativen Fall daraus, dass $\mathfrak{A}_i$ sich gegenseitig annullieren: $(0)=\mathfrak{A}_i\frown\mathfrak{A}_j\supset\mathfrak{A}_i\mathfrak{A}_j$.