80. *Sur un problème de M. A. Beurling.*

Par Kinjiro KUNUGUI.
Institut de Mathématiques, Université Impériale de Hokkaido, Sapporo.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., Oct. 12, 1940.)

1. Soient D un domaine quelconque et z_0 un des points non isolés de sa frontière Γ. Soit encore $f(z)$ une fonction méromorphe et uniforme dans D. Désignons par $S_{z_0}^{(D)}$ l'ensemble de toutes les valeurs a ($w=\infty$ y incues), pour lesquelles il existe une suite de points z_n de D, telle que $a=\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=z_0$, et par $S_{z_0}^{(\Gamma)}$ le produit $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n$ où $\bar{A}_n$ désigne la fermeture de A_n et A_n est la somme de tous les ensembles $S_{z'}^{(D)}: A_n=\sum S_{z'}^{(D)}$, la sommation s'étendant à tous les points z' de Γ qui satisfont à $0<|z'-z_0|<1/n$. z_0 sera dit *simple*, si tout voisiange $V(z_0)$ de z_0 possède un autre voisinage $W(z_0)$ de z_0, $W(z_0)\subseteq V(z_0)$, tel que toute couple des points de la partie commune $W(z_0)\cdot D$ peuvent être liés par une courbe continue située entièrement dans $V(z_0)\cdot D$.

M. A. Beurling[1] a conjecturé que la proposition suivante est vraisemblable: *Soient z_0 un point frontière d'un domaine D, simple et régulière pour le problème de Dirichlet*[2] *et $f(z)$ une fonction, holomorphe et uniforme dans D. Si w est un nombre fini appartenant à l'ensemble $S_{z_0}^{(D)}$, mais n'appartenant pas à $S_{z_0}^{(\Gamma)}$, l'équation:*

$$f(z)-w=0$$

possède dans D une infinité de zéros convergeant vers z_0, sauf au plus une seule valeur w de cette espèce.

Puisque la valeur $w=\infty$ n'est pas toujours une valeur exceptionnelle de notre sens pour les fonctions holomorphes, considérons une proposition moins restrictive:

Proposition A. Soit z_0 un des points frontières d'un domaine D, simple et réguliere pour le problème de Dirichlet. Soie encore $f(z)$ une fonction holomorphe (ou plus généralement méromorphe) et uniforme dans D. Alors, pour toute vàleur w de l'ensemble $S_{z_0}^{(D)}-S_{z_0}^{(\Gamma)}$, l'équation

$$f(z)-w=0$$

possède dans D une infinité de zéros convergeant vers z_0, sauf au plus deux valeurs w finies (ou infinie) de cette espèce.

Le but de cette Note est d'abord de montrer que, sans restriction, même la proposition A n'est pas toujours réalisée (voir l'exemple de no. 2), et deuxièmement d'établir un énoncé modifié comme il suit. Supposons seulement que z_0 est un point non isolé de la frontière Γ de

---

1) A. Beurling: Étude sur un problème de Majoration, Thèse de Upsal (1933), p. 163.

2) Quanta à la définition, voir par exemple A. Beurling: ibid. p. 66; M. Brelot: Le problème de Dirichlet sous sa forme moderne, Mathematica vol. VII (1933), p. 153.

D (ni la simplicité, ni la régularité pour le problème de Dirichlet de z_0 ne sont supposées). Nous avons déjà vu que $S_{z_0}^{(D)}-S_{z_0}^{(\Gamma)}$ est un ensemble ouvert.[1] Donc, l'ensemble $S_{z_0}^{(D)}-S_{z_0}^{(\Gamma)}$ est décomposé en un nombre fini ou une infinité dénombrable des composants connexes: $S_{z_0}^{(D)}-S_{z_0}^{(\Gamma)}=\sum_{n=1}^{\infty}\Omega_n$. Nous allons démontrer maintenant le

Théorème: *Soient D un domaine quelconque, z_0 un de ses points frontières Γ de D qui n'est pas isolé et $f(z)$ une fonction méromorphe et uniforme dans D. Soit encore Ω_n un des domaines en lesquels se décompose l'ensemble $S_{z_0}^{(D)}-S_{z_0}^{(\Gamma)}$. Alors, l'équation:*

$$f(z)-w=0$$

possède dans D une infinité de zéros convergeant vers z_0, pour toutes les valeurs w de Ω_n sauf au plus deux (finies ou infinie) de cette espèce.

Remarque. Dans le cas où z_0 est un point isolé de Γ, nous pouvons considérer que l'ensemble $S_{z_0}^{(\Gamma)}$ est vide. D'autre part, d'après un théorème de Weierstrass, $S_{z_0}^{(D)}$ coïncide avec tout le plan w ($w=\infty$ y comprise). Donc, notre Théorème pourra être considéré comme une généralisation du théorème classique de Picard aux cas où les domaines sont d'ordre de connection infini.

Démonstration. En effet, supposons par impossible qu'il existe trois valeurs exceptionnelles dans un même Ω_n, soit $w_i\,(i=1,2,3)$, $w_i \neq w_j\,(i\neq j,\ i,j=1,2,3)$, que la fonction $f(z)$ ne prend pas au voisinage de z_0. Comme Ω_n est un domaine, il existe un domaine Δ simplement connexe qui contient les trois points $w_i\,(i=1,2,3)$ et dont la fermetrure est contenue dans Ω_n. D'après un théorème fondamental de Riemann, Δ peut être transformé dans un cercle d'unité $|W|<1$ par une représentation comforme $W=\psi(w)$. Nous pouvons d'ailleurs supposer que $\psi(w_3)=0$.

Soit σ un nombre positif assez petit tel que $|\psi(w_i)|<1-\sigma$, $i=1, 2$. Considérons le cercle S: $|W|<1-\sigma$ et le domaine simplement connexe Δ_1, contenu dans Δ dont l'image par $\psi(z)$ coïncide avec S.

Or, d'après l'hypothèse, il existe un nombre positif $r>0$, tel que $f(z)$ ne prend aucune des trois valeurs $w_i\,(i=1,2,3)$ et que tout point z' de Γ satisfaisant à $0<|z-z_0|<r$ possède l'ensemble $S_{z'}^{(D)}$ situé hors de Δ_1. Il existe alors, d'après un théorème de M. Noshiro,[2] un chemin γ_1 s'approchent vers z_0 et tel que $\lim_{z\to z_0} f(z)=w_1$ (w_1 supposée finie) lorsque z tend vers z_0 en suivant le chemin γ_1.

Prenons un point p du chemin γ_1, assez près de z_0 de sorte qu'on ait $f(p')\in\Delta_1$ pour tout point p' de γ_1 situé après p. Considérons ensuite la branche de la fonction $f(z)$, obtenue en faisant le prolongement analytique à partir du point p sous la condition pour $f(z)$ sans sortir du domaine Δ_1, et pour z sans sortir du cercle $|z-z_0|<r$. Ce pro-

1) K. Kunugui: Sur un théorème de MM. Seidel-Beurling, Proc. **15** (1939), 27-32.

2) K. Noshiro: On the theory of the cluster sets of analytic functions, Journal of the Faculty of Science, Hokkaido Imperial University, Series, I, vol. V1. p. 218. On the singularities of analytic functions, Japanese Journal of Mathematics, vol. XVII (1940), p. 79.

longement analytique nous donne un domaine D_1 contenu dans D. Posons

$$g(z)=\psi\{f(z)\}\,,\quad z\in D_1 \quad \text{et} \quad W_i=\psi(w_i) \quad (i=1,2)$$

et considérons la surface de Riemann qui correspond à la fonction $g(z)$. Le domaine D_1 contient le chemin γ_1 pour lequel on a $\lim\limits_{z\to z_0} g(z)=W_1$, $z\in\gamma_1$ mais il existe un autre chemin γ_2 dans D_1, tel qu'on ait $\lim\limits_{z\to z_0} g(z)= W_2$, $z\in\gamma_2$. Prenons un nombre positif $\varepsilon>0$ tel que les distances entre W_1 et la circonférence $|W|=1-\sigma$, et entre W_1 et W_2 soient supérieures à 3ε. Nous pouvons supposer que $|g(p')-W_1|<\varepsilon$ et $|g(p'')-W_2|<\varepsilon$, pour tout point p' et p'' de γ_1 et de γ_2 resp. satisfaisant à $|p'-z_0|$, $|p''-z_0|<\rho_0$.

Écrivons un petit cercle $K(\rho)$ du centre z_0 et de rayon ρ, $0<\rho<\rho_0$, et considérons la partie de D située hors du cercle $K(\rho)$. Cette partie contiendra un domaine-composant $D(\rho)$ qui contient les points de départ de γ_1 et γ_2. Désignons par $\Pi(\rho)$ l'ensemble de tous les points frontière de $D(\rho)$ qui se trouvent sur la circonférence $|z-z_0|=\rho$, par $L(\rho)$ la somme des longueurs des courbes décrites par $g(z)$ pendant z parcourt l'ensemble $\Pi(\rho)$, par $F(\rho)$ la surface de Riemann correspondant à la fonction $g(z)$ lorsque z parcourt dans le domaine $D(\rho)$, et enfin par $A(\rho)$ l'aire de la surface $F(\rho)$. $A(\rho)$ est une fonction monotone croissante de $1/\rho$. On a $L(\rho)\geq\varepsilon$ et $\lim\limits_{\rho\to 0} A(\rho)=\infty$.

Considérons maintenant la surface construite d'un disque $|W|<1-\sigma$, pointé à trois endroits W_1, W_2 et $W_3=0$. Nous le désignerons par V_0. L'ordre de connection de V_0 est 4 et son caractéristique est 2. La frontière relative (par rapport à V_0) de $F(\rho)$ est une partie de la somme des courbes décrites par $g(z)$ pendant z parcourt $\Pi(\rho)$ et $\Pi(r)$. M. L. Ahlfors[1] a démontré un théorème fondamental qui nous donne une relation entre le caractéristique d'une surface de Riemann $F(\rho)$ placée sur une autre surface V_0 et celui de V_0 lui-même, à savoir

$$\eta^+\geq 2S-hL \tag{1}$$

où η est le caractéristique de $F(\rho)$ et $\eta^+=\max\{0,\eta\}$, S désigne la proportion de $A(\rho)$ avec I_0 l'aire de V_0. Or, comme nous avons $\lim\limits_{\rho\to 0} A(\rho) =\infty$, il existe une suite ρ_n, $\rho_1>\rho_2>\rho_3>\cdots$, $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_n=0$ telle que

$$0\leq\lim_{n\to\infty} L/S\leq\lim_{n\to\infty}\{L(r)+L(\rho)\}\cdot I_0/A(\rho)=0\,.$$

Il vient donc d'après (1)

$$\varliminf_{n\to\infty}\eta^+/S\geq 2\,.$$

D'autre part, nous pouvons démontrer l'inégalité suivante:

$$\varlimsup_{n\to\infty}\eta^+/S\leq 1$$

1) L. Ahlfors: Zur Theorie der Überlangerungsflächen. Acta Math. **65** (1935), p. 157–194.

qui est évidemment contradictoire. En effet, la fonction $g(z)$ étant uniforme, la correspondance entre le domaine $D(\rho)$ et la surface de Riemann $F(\rho)$ est biunivoque et bicontinue. Le caractéristique η de $F(\rho)$ est donc égal à celui de $D(\rho)$. Par suite, $\eta+2$ est le nombre des contours fermés qui constituent la frontière de domaine $D(\rho)$. Or. tous les contours, sauf celui qui enferme tous les autres, ont leur image la circonférence: $|W|=1-\sigma\ (\sigma>0)$ prise un nombre fini de fois.

Étant donné un contour de cette sorte, choisissons un arc A de ce contour dont l'image par $g(z)$ coïncide avec la circonférence: $|W|=1-\sigma$. À partir de tous les points de cet arc, faisons le prolongement analytique de $g(z)$ en suivant le rayon du cercle $|W|<1-\sigma$. Si l'on rencontre un point de ramification, nous arrêtons notre prolongement et faisons une coupure de la surface de Riemann le long du rayon jusqu' au centre $W=0$. Sinon, on continue le prolongement jusqu'on arrive à la courbe-frontière relative de $F(\rho)$ par rapport à V_0; ceci a toujours lieu puisque la valeur $W=0$ n'est jamais prise par $g(z)$. Ainsi, nous avons un domaine *étoilé* qui n'est pas pénétré par le prolongement que nous avons exécuté.

D'autre part, nous voyons bien qu'il n'existe qu'un nombre fini des points de ramification. Par suite, le domaine étoilé peut être divisé en un nombre fini des secteurs $S_1, S_2, \dots, S_n$ limité chacun par deux rayons à l'ouverture $\theta_\nu\ (\nu=1,2,3,\dots,n)$ et une courbe analytique C_ν qui lie ces deux côtés. Désignons par A_ν et $L_\nu\ (\nu=1,2,\dots,n)$ l'aire du secteur S_ν et la longueur de la courbe C_ν respectivement, mesurées sur la sphère de Riemann. En exprimant cette courbe par l'équation: $r=r(\theta)$ $(0\geq \theta\leq\theta_\nu)$, on a

$$A_\nu=\frac{1}{4}\int_0^{\theta_\nu}(1-\cos r)\,d\theta\leq\frac{1}{2}\int_0^{\theta_\nu}\sin\frac{r}{2}\,d\theta$$
$$\leq\frac{1}{4\cos r_0/2}\int_0^{\theta_\nu}\sin r\,d\theta\leq\frac{L_\nu}{2\cos r_0/2},$$

où r_0 désigne la longueur du rayon du cercle $|W|<1-\sigma$: $r_0=2\operatorname{arctg}(1-\sigma)$, $0<r_0<\pi/2$. Ainsi, nous avons

$$A(\rho)+h'L\geq(\eta+1)I_0\,,\quad \text{où}\quad h'=1/2\cos r_0/2$$

ou

$$1+h'L/I_0S\geq(\eta+1)/S\geq\eta^+/S\,.$$

Finalement, les relations $\lim\limits_{n\to\infty}L/S=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}S=\infty$ entraînent

$$1\geq\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\eta^+/S\,,\qquad \text{c. q. f. d.}$$

2. Maintenant, nous allons montrer que la proposition A n'est pas toujours vraie. En effet, considérons la fonction

$$w=g(z)=\sqrt{(e^{z^2}-1)}=e^{\frac{z^4}{4}}\cdot z\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\sqrt{\left(1+\frac{z^4}{4n^2\pi^2}\right)}$$

et le domaine D formé de tous les points du plan z ($z=\infty$ exclu) sauf une suite des coupures C_0, C_n^j $(j=1,2,3,4;\ n=1,2,3,\dots)$ définies comme il suit: C_0 est une courbe continue donnée par l'équation:

$$x^2-y^2=9\,,\quad x>0\,,\quad y>0\,,\quad \text{où l'on pose}\quad z=x+iy\,;$$

C_n^j est un segment rectiligne dont deux extrémités sont

$$i^{(j-\frac{1}{2})}2\sqrt{n\pi}\,,\qquad i^{(j-\frac{1}{2})}\sqrt{2(2n-1)\pi}\,.$$

La frontière du domaine D est la somme de tous les coupures et le point $z_0=\infty$. Ce point z_0 est évidemment simple et régulier pour le problème de Dirichlet. La fonction $g(z)$ considérée dans le domaine D représente deux fonctions analytiques uniformes. Désignons par $f(z)$ la branche de $g(z)$ qui fait correspondre le point $z=1$ à $f(1)=+\sqrt{e-1}$.

$f(z)$ est une fonction holomorphe et uniforme dans D. $f(z)$ est continue même sur la frontière sauf le point z_0. L'ensemble $S_{z_0}^{(\Gamma)}$ coïncide avec la somme des trois courbes continues, simples et fermées. L'une d'elles enferme le point $w=i$, la deuxieme le point $w=-i$ et la troisième $w=\infty$. Ces trois valeurs $w=i,\ -i,\ \infty$ ne sont jamais prises par $f(z)$. Tandis que l'ensemble $S_{z_0}^{(D)}$ couvre le plan w tout entier ($w=\infty$ y comprise). La fonction $f(z)$ et le domaine D au point frontière $z_0=\infty$ sont donc ceux qu'il nous fallait avoir.

3. Quelques conséquences immédiates du Théorème. Notre Théorème démontré dans no. 1 nous donne immédiatemant le corollaire suivant:

Corollaire 1. *Soient D un domaine quelconque, z_0 un de ses point frontières qui n'est pas isolé et $f(z)$ une fonction holomorphe et uniforme dans D, qui satisfait à la condition:*

(C) *Au voisinage du point z_0, $f(z)$ ne prend pas deux valeurs finies, dont les modules surpassent par $\overline{\lim\limits_{z'\to z_0}}\ \overline{\lim\limits_{\substack{z\to z'\\ z'\neq z_0}}}\ |f(z)|$ (supposée finie).*

Alors, nous avons toujours $\overline{\lim\limits_{z\to z_0}}\ |f(z)|=\overline{\lim\limits_{z'\to z_0}}\ \overline{\lim\limits_{\substack{z\to z'\\ z'\neq z_0}}}\ |f(z)|$, z' désignant les points frontières de D.

Le Corollaire 1, de sa part, entraîne tout de suite le

Corollaire 2. *Soient D un domaine quelconque, Γ sa frontière et z_0 un point de Γ qui n'est pas isolé. Considérons une fonction $f(z)$ holomorphe et uniforme dans D. Supposons qu'elle satisfasse aux conditions suivantes:*

(A) *Quelque petit qu'on se donne un nombre positif ε, l'inégalité $|f(z)|<C+\varepsilon$ est vérifiée dans un voisinage de tout point de Γ qutre que z_0;*

(B) *Au voisinage du point z_0, $f(z)$ ne prend pas deux valeurs $w_1\neq w_2$ finies et dont les modules surpassent par C.*

Dans ces conditions, on aura $|f(z)|\leq C$ pour tout point de D, l'égalité étant exclue si $f(z)$ ne se réduit pas à une constante.

Ce Corollaire 2 est une généralisation du Théorème de Phragmén-Lindelöf[1] qui est obtenu en remplaçant dans le Corollaire 2 la condition (B) par

(B_1) $f(z)$ est bornée au voisinage du point z_0.

---

1) Voir p. ex. G. Julia: Principes géométriques d'Analyse, Deuxième Partie, Paris (1932), p. 4.

D'autre part, il est une généralisation du Théorème de MM. Minami-Noshiro[1] où l'on parvient en remplaçant dans le Corollaire 2 la condition (B) par

(B_2) Au voisinage du point z_0, $f(z)$ est univalente, ou au plus p-valente (p étant un nombre naturel fini).

4. Applications à la recherche sur les fonctions méromorphes dans tout le plan $|z|<+\infty$. Supposons qu'une fonction méromorphe $w=f(z)$ definie dans tout le plan $|z|<+\infty$ possède le point $z=\infty$ comme point singulier essentiel isolé. Soit Ω un des points critiques transcendentaux (supposés existants) de la fonction inverse $z=\varphi(w)$. Désignons par $\varphi_\rho(w)$ (ρ étant un nombre positif fini arbitraire) la branche de $\varphi(w)$ obtenue de $\varphi(w)$ en restreignant le domaine dans le cercle $|w-\omega|<\rho$, où ω désigne la trace de Ω. $\varphi_\rho(w)$ constitute un voisinage de Ω sur la surface de Riemann correspondue à la fonction $\varphi(w)$. Désignons encore par Δ_ρ l'ensemble de toutes les valeurs de $\varphi_\rho(w)$.

M. K. Noshiro[2] a obtenu récemment les résultats suivants fort intérressants: Le nombre $n(w)$ des racines de l'équation

$$f(z)-w=0\,, \qquad z\in\Delta_\rho$$

est infini, pour les valeurs w qui forment un ensemble partout dense dans le cercle $|w-\omega|<\rho$. Et, si Δ_ρ est un domain simplement connexe, $n(w)$ est infini pour toutes les valeurs w intérieures du cercle $|w-\omega|<\rho$, sauf au plus pour une valeur de cette espèce.

Mais, le Corollaire 1 dit que, même dans le cas où Δ_ρ est d'ordre de connection infini, $n(w)$ est infini pour toutes les w du cercle $|w-\omega|<\rho$, sauf au plus *deux* valeurs de cette espèce.

---

1) U. Minami: An extention of Phragmén-Lindelöf's theorem, Proc. **13** (1937), 241–243. K. Noshiro: On the theory of cluster sets of analytic functions, loc. cit. p. 223.

2) K. Noshiro: On the singularities of analytic functions, loc. cit. p. 86 et p. 95.