75. *Gemeinsame Behandlungsweise der elliptischen konformen, hyperbolischen konformen und parabolischen konformen Differentialgeometrien.*[1]

Von Tsurusaburo TAKASU.

Mathematisches Institut der Tohoku Kaiserlichen Universität.

(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., Oct. 12, 1940.)

1. *Einleitung.* Ziemlich viele Geometer haben versucht die tetrazyklischen und pentasphärischen Koordinaten zum Falle der allgemeinen Kegelschnitte und Konikoide zu verallgemeinern, aber bis jetzt ohne Erfolg. Die sogenannte Batemansche Gruppe,[2] welche aus den homographischen Transformationen der hyperbolischen komplexen Zahlen $z=x+hy$, $(h^2=+1)$ besteht, ist bekannt, aber ohne das räumliche Gegenstück. Im folgenden möchte ich die drei Fälle der elliptischen konformen, hyperbolischen konformen und parabolischen konformen Geometrien gemeinsam behandeln. Die Analoga zur Laquerreschen und Lieschen Geometrie möchte ich gleich begründen. Unsre Geometrien erwähnen uns, dass die Entwickelung der Funktionentheorien der hyperbolischen komplexen und parabolischen komplexen Veränderlichen auch wünschenswert ist. Unser Hauptzweck besteht in den Ergebnissen aus den Differentialgeometrien.

2. *Elliptische, hyperbolische und parabolische komplexe Zahlen.* Der folgende Satz[3] ist bekannt: Ist P ein (kommutativer) Körper, dessen Charakteristik von 2 verschieden ist, so gibt es nur die folgenden drei Typen von hyperkomplexen Systemen vom Range 2 mit Einselement (alle kommutativ):

a) $(1, c)$, wo c^2 in P liegt und dort kein Quadrat ist. Das System ist ein kommutativer Körper über P.

b) $(1, j)$, wo j^2 das Quadrat eines von Null verschiedenen Elementes k von P ist. Das System ist die direkte Summe zweier Körper $(j-k)\mathbf{P}=\mathbf{P}_1$ und $(j+k)\mathbf{P}=\mathbf{P}_2$, die beide isomorph zu P sind und sich gegenseitig annullieren: $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2=(0)$.

c) $(1, l)$, wo $l^2=0$ ist. („System der dualen Zahlen.")

Ist P insbesondere ein Zahlkörper, so ist die Charakteristik gleich Null[4] und gilt der obige Satz.

Im Falle, dass P der Körper der reellen Zahlen ist, und dass

1) Dieses Stück gehört zur Reihe von Untersuchungen, welche finanziell vom Unterrichtsministerium unterstützt sind.

2) Siehe G. Kowalewski, Allgemeine Natürliche Geometrie (1931), S. 246. Herr J. Maeda hat mir mitgeteilt, dass er daran anschliessend, unabhängig von mir die drei Fälle $z=x+my$, ((i) $m^2=-k^2$, (ii) $m^2=+k^2$, (iii) $m^2\equiv 0$; k^2: positive Konstante) *gegenüber* den Kegelschnitten $A(x^2+m^2y^2)+2Bx+2Cy+D=0$ schon im lezten Juni von einem anderen Gesichtspunkte aus bemerkt hatte.

3) B. L. van der Waerden, Moderne Algebra, II (1931), S. 150.

4) „ , I (1930), S. 87, Linie 25. Einer von $\mathbf{P}_1$ und $\mathbf{P}_2$ besteht aus den Nullteilern.

(1) $c^2=(ik)^2=-k^2<0$, $\left(\frac{c}{i}=k=\text{konst.}\right)$	$j^2=(hk)^2=k^2>0$, $\left(\frac{j}{h}=k=\text{konst.}\right)$	$l^2=(pk)^2=0$, $\left(\frac{l}{p}=k=\text{konst.}\right)$

ist, möchte ich die

$z=x+cy=(x,y)$	$z=x+jy=(x,y)$	$z=x+ly=(x,y)$
elliptische	*hyperbolische*	*parabolische*

komplexe Zahlen oder kurz

e-komplexe	*h-komplexe*	*p-komplexe*

Zahlen nennen.

Setzt man

(2) $x=r\cos k\varphi$, $y=r\sin k\varphi$,	$x=r\cosh k\varphi$, $y=r\sinh k\varphi$,	$x=r\operatorname{cosp} k\varphi$, $y=r\operatorname{sinp} k\varphi$,

so gilt die folgenden Beziehungen:

(3) $z=re^{c\varphi}=r(\cos k\varphi+i\sin k\varphi)$,	$z=re^{j\varphi}=r(\cosh k\varphi+h\sinh k\varphi)$,	$z=re^{l\varphi}=r(\operatorname{cosp} k\varphi+p\operatorname{sinp} k\varphi)$,
$\bar{z}=re^{-c\varphi}=r(\cos k\varphi-i\sin k\varphi)$,	$\bar{z}=re^{-j\varphi}=r(\cosh k\varphi-h\sinh k\varphi)$,	$\bar{z}=re^{-l\varphi}=r(\operatorname{cosp} k\varphi-p\operatorname{sinp} k\varphi)$,
$r^2=z\bar{z}=r^2(\cos^2 k\varphi-i^2\sin^2 k\varphi)$,	$r^2=z\bar{z}=r^2(\cosh^2 k\varphi-h^2\sinh^2 k\varphi)$,	$r^2=z\bar{z}=r^2(\operatorname{cosp}^2 k\varphi-p^2\operatorname{sinp}^2 k\varphi)$,

wobei ist:

(4) $\cos k\varphi=\frac{e^{ik\varphi}+e^{-ik\varphi}}{2}$,	$\cosh k\varphi=\frac{e^{hk\varphi}+e^{-hk\varphi}}{2}$,	$\operatorname{cosp} k\varphi=\frac{e^{pk\varphi}+e^{-pk\varphi}}{2}=1$,
$\sin k\varphi=\frac{e^{ik\varphi}-e^{-ik\varphi}}{2i}$,	$\sinh k\varphi=\frac{e^{hk\varphi}-e^{-hk\varphi}}{2h}$,	$\operatorname{sinp} k\varphi=\frac{e^{pk\varphi}-e^{-pk\varphi}}{2p}=k\varphi$,
(5) $i^2=-1$.	$h^2=+1$.	$p^2=0$.[5]

Es entsteht so ein komplexes System (im Falle $i^2=-1$ ein Körper). Das so entstandene System möchte ich mit

(6) $\mathfrak{K}_c=\mathfrak{K}_{ik}=\mathfrak{K}_i$	$\mathfrak{K}_j=\mathfrak{K}_{hk}=\mathfrak{K}_h$	$\mathfrak{K}_l=\mathfrak{K}_{pk}=\mathfrak{K}_p$

bezeichnen.

N.B. (i) Wir können an Stellen vom **P** das

$\mathfrak{K}_h$ | $\mathfrak{K}_p$ ‖ $\mathfrak{K}_p$ | $\mathfrak{K}_i$ ‖ $\mathfrak{K}_i$ | $\mathfrak{K}_h$

annehmen und dadurch das System (6) zu:

5) Dabei ist l sowie p eine Infinitesimale.

$$\mathfrak{K}_{h,i} \quad \mid \quad \mathfrak{K}_{p,i} \quad \parallel \quad \mathfrak{K}_{p,h} \quad \mid \quad \mathfrak{K}_{i,p} \quad \parallel \quad \mathfrak{K}_{i,p} \quad \mid \quad \mathfrak{K}_{h,p}$$

und dieses weiter zu $\mathfrak{K}_{i,h,p}$ erweitern.

(ii) Hinsichtlich einer affinen Transformation genügt es, nur den Fall $k=1$ zu behandeln.

3. *Elliptische, hyperbolische und parabolische Winkelmassbestimmung.* Man betrachte hinsichtlich einer affinen Transformation der Einfachheit halber ein rechtwinklinges Koordinatensystem. Die unendlichfernen Punkte

$I_1(1:i:0),\ I_2(1:-i:0)$	$H_2(1:h:0),\ H_2(1:-h:0)$	$P_1(p:1:0),\ P_2(-p:1:0)$

wollen wir die *absoluten*

Kreispunkte wie übl.	*Hyperbelpunkte*	*Parabelpunkte*

nennen.

Den *Winkel* φ zwischen den beiden orientierten Geraden g_1, g_2 definieren wir durch die Formel:

(7) $\dfrac{1}{i}\log(\overline{PI_1}\,\overline{PI_2}, g_1g_2)$,	$\dfrac{1}{h}\log(\overline{PH_1}\,\overline{PH_2}, g_1g_2)$,	$\dfrac{1}{p}\log(\overline{PP_1}\,\overline{PP_2}, g_1g_2)$,

wobei $P=(g_1, g_2)$ ist. Wenn die orientierte Gerade g_1 die Anfangsgerade ist, so besteht die folgende Zuordnung:

	$g_2:\ \overline{PH_2}\quad g_1\quad \overline{PH_1}$	$g_2:\ \overline{PP_2}\quad g_1\quad \overline{PP_1}$
$\sphericalangle(g_1g_2)\equiv\varphi \pmod{2\pi}$	$\varphi:\ -\infty\quad 0\quad +\infty$	$\varphi:\ -\infty\quad 0\quad +\infty$
		$(\lim\limits_{p\to 0}\overline{PP_2}=\overline{PP_1})$

Also *ist die Massbestimmung des Winkels*

elliptisch.	*hyperbolisch.*	*parabolisch.*

4. *Geometrische Deutung der e-, h- und p-komplexen Zahlen.* Es seien die Koordinaten eines Punktes P x und y. Dann sind die Gleichungegen der Geraden

$\overline{PI_2}$ und $\overline{PI_1}$:	$\overline{PH_1}$ und $\overline{PH_2}$:	$\overline{PP_1}$ und $\overline{PP_2}$:

$$(-X+mY)+\bar{z}t=0, \qquad (-X-mY)+zt=0,$$

$m=i,\quad i^2=-1.$	$m=h,\quad h^2=+1.$	$m=p,\quad p^2=0.$

Also *kann man $\bar{z}$ und z bzw. als die Doppelverhältniskoordinaten in den Geradenbüscheln*

I_2 *und* I_1	H_1 *und* H_2	P_1 *und* P_2

ansehen.

Sind insbesondere diese beiden Geradenbüschel projektiv aufeinander bezogen:

$$\text{(8)} \qquad \bar{z}=\frac{az+\beta}{\gamma z+\delta}, \qquad (a\delta-\beta\gamma \neq 0;\ a, \beta, \gamma, \delta:\ \text{Zahlen in } \mathfrak{K}_{i,m}),$$

mit $\mathrm{P}=\mathfrak{K}_i$, so ist ihr projektives Erzeugnis

der Kreis:	die Hyperbel:	die Parabel:

$$\text{(9)} \qquad \left(x+\frac{\delta-a}{2\gamma}\right)^2+\left(my+\frac{\delta+a}{2\gamma}\right)^2=\frac{\beta\gamma-a\delta}{\gamma^2},$$

$m=i.$	$m=h.$	$\left(\frac{\delta+\alpha}{\gamma} m=\text{endlich}\right),$ $m=p.$

Also *ist* (8) *die Gleichung*

des Kreises (9), welcher	*der Hyperbel* (9), welche	*der Parabel* (9), welche

durch die absoluten

Kreispunkte I_1, I_2	Hyperbelpunkte H_1, H_2	Parabelpunkte P_1, P_2

hindurchgeht. Alle diejenigen

Kreise,	Hyperbeln,	Parabeln,

deren Gleichung von der Gestalt (9) sind, sind *ähnlich und ähnlich gelegen.*

Umgekehrt, es lässt sich zeigen, dass jede durch

I_1 und I_2	H_1 und H_2	P_1 und P_2

hindurchgehenden, ähnlichen und ähnlich gelegenen

Kreise	Hyperbeln	Parabeln

sich durch Gleichungen von der Gestalt (9) darstellen lassen. Dabei ist der Grenzfall $\alpha\delta-\beta\gamma=0$ des Geradenpaars ausgeschlossen.

5. *e-konforme, h-konforme und p-konforme Geometrie in der Ebene. Die allgemeinsten, eigentlichen, ein-eindeutigen Punkttransformationen, durch welche die durch die beiden absoluten*

Kreispunkte I_1 *und* I_2	*Hyperbelkpunkte* H_1 *und* H_2	*Parabelpunkte* P_1 *und* P_2

gehenden

Kreise	*Hyperbeln*	*Parabeln*

in eben solche transformiert werden, lassen sich in der Gestalt

$$(10) \qquad z^*=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}, \qquad (\alpha\delta-\beta\gamma \neq 0;\ \alpha, \beta, \gamma, \delta:\ \text{Zahlen in } \mathfrak{K}_{i,m})$$

und die uneigentlichen eben solchen in der Gestalt

$$(11) \qquad \bar{z}^*=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}, \qquad (\alpha\delta-\beta\gamma \neq 0;\ \alpha, \beta, \gamma, \delta:\ \text{Zahlen in } \mathfrak{K}_{i,m})$$

darstellen. Dabei nennen wir eine Transformation eine eigentliche oder eine uneigentliche, jenachdem der Sinn des Winkels beibehalten wird oder nicht. Die Gesamtheit der Transformationen (10) und (11) bildet offenbar eine Gruppe, die wir

e-konforme	*h-konforme*	*p-konforme*

Transformationsgruppe nennen wollen. Die zugehörige Geometrie möchte ich

e-konforme	*h-konforme*	*p-konforme*

Geometrie in der Ebene nennen.

6. *Tetrazyklische, tetrahyperbolische und tetraparabolische Koordinaten.* Setzt man

$$
(12)\qquad \begin{aligned} 2\rho\cdot\mathfrak{x}_1&=(z+\bar{z}), & 2\rho\cdot\mathfrak{x}_2&=i(z-\bar{z}), \\ 2\rho\cdot\mathfrak{x}_3&=i(1+z\bar{z}), & 2\rho\cdot\mathfrak{x}_4&=-(1-z\bar{z}), \end{aligned}\qquad (\rho\neq 0)
$$

so gilt die Identität:

$$
(\mathfrak{x}\mathfrak{x})_4=0\,.
$$

Die Gleichungen (12) lassen sich folgendermassen umschreiben:

$$
(13)\qquad \begin{aligned} \rho\cdot\mathfrak{x}_1&=x, & \rho\cdot\mathfrak{x}_2&=imy, \\ \rho\cdot\mathfrak{x}_3&=\frac{i}{2}(1+x^2-m^2y^2), & \rho\cdot\mathfrak{x}_4&=-\frac{1}{2}(1-x^2+m^2y^2), \end{aligned}
$$

$m=i$.	$m=h$.	$m=p$.

Das Fundamentalsystem der Koordinaten besteht also aus den vier Gebilden: $x^2-m^2y^2=1$, $x^2-m^2y^2=-1$, $x=0$ und $y=0$.

Setzt man für

den Kreis:	die Hyperbel:	die Parabel:

$$
(14)\qquad (x-a)^2-(my-mb)^2=\varepsilon r^2,\qquad (\varepsilon=\pm 1)\,,
$$

$m=i$:	$m=h$:	$(-p^2b=2d=\text{endlich}$, $\sqrt{\varepsilon}\,r=ipb)$, $m=p$:[6]

$$
(15)\qquad \begin{aligned} \xi_1&=\frac{a}{\sqrt{\varepsilon}\,r}, & \xi_2&=\frac{imb}{\sqrt{\varepsilon}\,r}, \\ \xi_3&=\frac{i}{2\sqrt{\varepsilon}\,r}(a^2-m^2b^2-\varepsilon r^2+1), & \xi_4&=\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}\,r}(a^2-m^2b^2-\varepsilon r^2-1), \end{aligned}
$$

so bestehen die Identitäten

$$
(16)\qquad (\xi\xi)_4=1\,,\qquad (\mathfrak{x}\mathfrak{x})_4=0
$$

und (14) wird zur linearen Gleichung:

$$
(17)\qquad (\xi\mathfrak{x})_4=0\,.
$$

Die *Fundamentalinvariante* in dieser Geometrie ist:

$$
(18)\qquad (\xi\xi')_4=[r^2+r'^2-\varepsilon\{(a-a')^2-m^2(b-b')^2\}]/2rr'
$$

$=\cos\varphi$,	$=\cosh\varphi$,	$=\operatorname{cosp}\varphi=1$, $m=p$;
$m=i$.	$m=h^2$.	$\dfrac{\operatorname{sinp}^2\varphi}{p^2}=\varphi^2=\dfrac{(a-a')^2+4(bd+b'd')}{8dd'}$.

In diesem Sinne ist unsre Geometrie *konform*; nur dass *die Winkelmassbestimmung*

elliptisch	*hyperbolisch*	*parabolisch*

ist.

Die zugehörige Gruppe ist von den *quaternären, orthogonalen Transformationen.*

---

6) Für $(x-a)^2=4d\cdot(y-b')$ wird (15) zu: $\xi_1=\frac{ip}{2d}a$, $\xi_2=1$, $\xi_3=-\frac{p}{4d}(1+a^2+4b'd)$, $\xi_4=-\frac{ip}{4d}(1-a^2-4b'd)$. Dabei ist $\sqrt{\varepsilon}\,r=p\sqrt{b(2b'-b)}$, $2d=-bp^2$, $\varepsilon=+1$.

7. *e-konforme, h-konforme und p-konforme Geometrie im Raume.* Im Raume betrachten wir hinsichtlich einer affinen Transformation Einfachheit halber ein rechtwinkliges Koordinatensystem und nennen wir den unendlichfernen Kegelschnitt, in welchem der Kegel:

$$-m^2x^2+y^2+\epsilon z^2=0\,, \qquad (\varepsilon=+1 \text{ oder } -1)\,, \tag{19}$$

$m=i$,	$m=h$,	$m=p$,

die unendlichferne Ebene trifft, den *absoluten*

Kugelkreis.	*Hyperboloidenkreis*	*Paraboloidenkreis.*

Setzen wir

$$\begin{aligned} &\rho\cdot\mathfrak{x}_1=mx\,, \qquad \rho\cdot\mathfrak{x}_2=iy\,, \qquad \rho\cdot\mathfrak{x}_3=i\sqrt{\epsilon}\,z\,, \\ &\rho\cdot\mathfrak{x}_4=\frac{i}{2}(1+m^2x^2-y^2-\epsilon z^2)\,, \quad \rho\cdot\mathfrak{x}_5=\frac{1}{2}(-1+m^2x^2-y^2-\epsilon z^2)\,; \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} &\xi_1=\frac{ma}{\sqrt{\varepsilon}\,r}\,, \qquad \xi_2=\frac{ib}{\sqrt{\varepsilon}\,r}\,, \qquad \xi_3=\frac{i\sqrt{\epsilon}\,c}{\sqrt{\varepsilon}\,r}\,, \\ &\xi_4=\frac{i}{2\sqrt{\varepsilon}\,r}(m^2a^2-b^2-\epsilon c^2-\varepsilon r^2+1)\,, \qquad (\varepsilon=\pm1) \\ &\xi_5=\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}\,r}(m^2a^2-b^2-\epsilon c^2-\varepsilon r^2-1)\,; \end{aligned} \tag{21}$$

so gelten die folgenden Identitäten:

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{x})_5=0\,, \qquad (\xi\xi)_5=1\,. \tag{22}$$

Die Kugel	Das Hyperboloid	Das Paraboloid[7]

$$m^2(x-a)^2-(y-b)^2-\epsilon(z-c)^2=\varepsilon r^2\,, \tag{23}$$

$\epsilon=+1\,,\ m=i$,	$\epsilon=+1\,,\ m=h$,	$\epsilon=\pm1\,,\ m=p,\ \sqrt{\varepsilon}\,r=p\sqrt{a(a-2a')}$, $2d=-p^2a$: endlich,

wird durch die lineare Gleichung:

$$(\xi\mathfrak{x})_5=0 \tag{24}$$

dargestellt.

Die Koordinaten $(\mathfrak{x})_5$ und $(\xi)_5$ möchte ich bzw.

pentasphärische	*pentahyperboloidische*	*pentaparaboloidische*

Punktkoordinaten und

pentasphärische Kugel-	*pentahyperboloidische Hyperboloiden-*	*pentaparaboloidische Paraboloiden-*

koordinaten nennen.

Die *Fundamentalinvariante* in dieser Geometrie ist:

$$(\xi\xi')_5=[r^2+r'^2-\varepsilon\{m^2(a-a')^2-(b-b')^2-\epsilon(c-c')^2\}]/2rr' \tag{25}$$

---

7) Für das Paraboloid $(y-c)^2+\epsilon(z-c)^2=4d\cdot(x-a')$ wird (21) zu: $\xi_1=1$, $\xi_2=-\frac{ip}{2d}b$, $\xi_3=-\frac{i\sqrt{\epsilon}\,p}{2d}c$, $\xi_4=\frac{ip}{4d}(-1+b^2+\epsilon c^2+4a'd)$, $\xi_5=\frac{p}{4d}(1+b^2+\epsilon c^2+4a'd)$. Dabei ist $\sqrt{\varepsilon}\,r=p\sqrt{a(a-2a')}$, $2d=-p^2a$, $\varepsilon=-1$.

$=\cos\varphi$,	$=\cosh\varphi$,	$=\operatorname{cosp}\varphi=1$, $m=p$,
$m=i$.	$m=h$.	$\dfrac{\operatorname{sinp}^2\varphi}{p^2}=\varphi^2$
		$=\dfrac{(b-b')^2+\epsilon(c-c')^2+4(a'd+a''d')}{8dd'}$.

Die zugehörige Gruppe ist von den *quinären, orthogonalen Transformationen.*

N. B. Auf der Konikoidenfläche $m^2x^2-y^2-\epsilon z^2\pm 1=0$ entsteht eine zwei-dimensionale m-konforme Geometrie ($m=i, h, p$).

8. *Algebraische e-, h- und p-konforme Geometrie und e-, h- und p-konforme Differentialgeometrie. Die algebraische*

* * * | *h-konforme* | *p-konforme*

Geometrie lässt sich parallel zur gewöhnlichen algebraischen (d. h. *e-*) *konformen Geometrie im Buch :*

J. L. Coolidge, A Treatise on the Circle and the Sphere, (1916) *entwickeln.*

Die

* * * | *h-konforme* | *p-konforme*

Differentialgeometrie lässt sich parallel zur gewöhnlichen (d. h. *e-*) *konformen Differentialgemetrie im Buch :*

T. Takasu, Differentialgeometrien in den Kugelräumen. Band I. Konforme Differentialkugelgeometrie von Liouville und Möbius, (1938) *entwickeln.* Die Ergebnisse (z. B. m-konforme Minimalflächen ($m=h, p$), h-Haupthyperbeln, h-Parabeln, Zentralhyperboloide, Zentralparaboloide usw.) müssen wirklich schön sein.

9. *Herleitung der drei parabolischen Geometrien.* Adjungiert man zum m-konformen Raume ($m=e, h, p$) den unendlichfernen Punkt

$$\mathfrak{x}_1:\mathfrak{x}_2:\mathfrak{x}_3:\mathfrak{x}_4:\mathfrak{x}_5=0:0:0:\frac{i}{2}(m^2x^2-y^2-\epsilon z^2):\frac{1}{2}(m^2x^2-y^2-\epsilon z^2) \tag{26}$$

$$=0:0:0:i:1\,,$$

so dass

$$i\xi_4+\xi_5=-r^{-1}=0 \tag{27}$$

gilt und also die sämtlichen Konikoide (23) Ebenen werden, dann wird (24) zu:

$$(\xi\mathfrak{x})_3-i\xi_4(i\mathfrak{x}_4+\mathfrak{x}_5)=0\,. \tag{28}$$

Normieren wir $(\mathfrak{x})_5$ durch die Forderung:

$$i\mathfrak{x}_4+\mathfrak{x}_5=-1\,, \tag{29}$$

so wird $\rho=+1$ in (20) und (28) wird zur Normalform:

$$\lambda x+\mu y+\nu z-p=0\,,\qquad (m^2\lambda^2-\mu^2-\epsilon\nu^2=1)\,, \tag{30}$$

$m=i$, | $m=h$, | $m=p$,

wobei

$$(31)\qquad \lambda=\lim_{r\to\infty}\frac{ma}{r},\quad \mu=-\lim_{r\to\infty}\frac{b}{r},\quad \nu=-\lim_{r\to\infty}\frac{\epsilon c}{r},\quad p=-\lim_{r\to\infty}i\xi_4.$$

Also geht der

e-konforme	h-konforme	p-konforme

Raum in den parabolischen Raum über, in welchen das Winkelmass

elliptisch	hyperbolisch	parabolisch

ist. *Die zugehörigen Gruppen sind Untergruppen der affinen Gruppe.*

Entsprechendes gilt auch für die Ebene.

10. *Herleitung der drei N. E. Geometrien.* Adjungiert man zum m-konformen Raume ($m=e, h, p$)

die Kugel	das Hyperboloid	das Paraboloid
$0:0:0:0:1$,		$0:0:0:1:0$,

so entsteht eine Art (im ganzen sechs Arten!) von N. E. Geometrie, bei welcher

die Kugel	das Hyperboloid	das Paraboloid
$0\cdot\mathfrak{x}_1+0\cdot\mathfrak{x}_2+0\cdot\mathfrak{x}_3+0\cdot\mathfrak{x}_4+1\cdot\mathfrak{x}_5=0$		$0\cdot\mathfrak{x}_1+0\cdot\mathfrak{x}_2+0\cdot\mathfrak{x}_3+1\cdot\mathfrak{x}_4+0\cdot\mathfrak{x}_5=0$
d. h. $m^2x^2-y^2-\epsilon z^2-1=0$		d. h. $m^2x^2-y^2-\epsilon z^2+1=0$

die Rolle der absoluten Fläche spielt und das Wikelmass

elliptisch	hyperbolisch	parabolisch

ist.

Entsprechendes gilt auch für die Ebene.

Die drei Arten von konformen Geometrien umfassen also die neun Arten von euklidischen und nicht-euklidischen Geometrien, welche alle den Untergruppen der projektiven Gruppe zugehören.