PAPERS COMMUNICATED

72. *Die Grundlegung der Geometrie der fünf-dimensionalen metrischen Räume auf Grund des Begriffs des zwei-dimensionalen Flächeninhalts.*

Von Akitsugu KAWAGUCHI und Shisanji HOKARI.
Geometrisches Seminar der Hokkaido Kaiserlichen Universität, Sapporo.

(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., Oct. 12, 1940.)

Es sei $x^i = x^i(u^1, u^2, \dots, u^K)$ die Parameterdarstellung einer K-dimensionalen Fläche $\mathfrak{F}$ in einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit X_n mit n reellen Punktkoordinaten x^i $(i=1, 2, \dots, n)$ und

$$(1) \qquad \int_{(K)} \mathfrak{L}\left(x^j, \frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}\right) du^1 du^2 \dots du^K$$

ein bei jeder Parametertransformation invariantes, K-faches Integral über einen gegebenen Bereich der Fläche $\mathfrak{F}$ erstreckt. Ein solches Integral hat uns vor die Frage gestellt, ob man nicht eine neue Geometrie aufbauen könnte, indem man es als K-dimensionalen Flächeninhalt des K-dimensionalen Flächenstückes auffasst. Die Finslersche und die Cartansche Geometrien sind solche Geometrien. Wenn dieses Integral (1) für $K=1$ als Bogenlänge einer Kurve angesehen wird, so tritt die sogenannte Finslersche Geometrie auf; und wir erhalten die Cartansche aus dem Integral (1) für $K=n-1$, indem man dasselbe als $(n-1)$-dimensionalen Flächeninhalt des Flächenstückes auffasst[1]. An der Ausarbeitung der Finslerschen Geometrie sowie der Cartanschen sind zahlreiche Forscher beteiligt. Über die entsprechenden Geometrien im Falle $1 < K < n-1$ sind aber bisher einige Untersuchungen unter gewissen Forderungen gewesen[2]. Daher möchten wir uns in der vorliegenden Arbeit und den folgenden mit der Grundlegung der Geometrie auf Grund des Integrals (1) für $1 < K < n-1$ beschäftigen.

1. Wir wollen zuerst den besonderen Fall $n=5$, $K=2$ behandeln.

---

1) E. Cartan, Les espaces de Finsler, Actualités scientifiques et industrielles, **79** (1934); E. Cartan, Les espaces métriques fondés sur la notion d'aire, ibid., **72** (1933); L. Berwald, Über die n-dimensionalen Cartanschen Räume und eine Normalform der zweiten Variation eines $(n-1)$-fachen Oberflächenintegrals, Acta Mathematica, **71** (1939), 191–248; L. Berwald, Über Finslersche und Cartansche Geometrie II. Invarianten bei der Variation vielfacher Integrale und Parallelhyperflächen in Cartanschen Räume, Compositio Mathematica, **7** (1939), 141–176, usw..

2) A. Kawaguchi, Ein metrischer Raum, der eine Verallgemeinerung des Finslerschen Raumes ist, Monatshefte für Math. und Phys., **43** (1936), 289–297; Theorie des Raumes mit dem Zusammenhang, der von Matrizen abhängig ist, ibid., **44** (1936), 131–152; Die Differentialgeometrie höherer Ordnung II. Über die n-dimensionalen metrischen Räume mit vom m-dimensionalen Flächenelement abhängigem Zusammenhang, Journal of the Faculty of Science, Hokkaido Imperial University, Ser. I, Bd. **9** (1940), S. 153–188.

Eine zwei-dimensionale Fläche $\mathfrak{F}$ sei dadurch definiert, dass die Koordinaten x^i Funktionen zweier Parameter u^a gleichgesetzt werden[1]; die Ableitungen nach letzteren seien in der üblichen Weise mit $p^i_a = \frac{\partial x^i}{\partial u^a}$ bezeichnet. Dann wird (1) ein über ein zwei-dimensionales Flächenstück $\mathfrak{F}$ erstrecktes Doppelintegral

$$O = \iint \mathfrak{L}(x^j, p^j_\beta)\, du^{\dot 1} du^{\dot 2}, \tag{2}$$

das sich als Flächeninhalt des Flächenstückes auffassen lässt.

Dieses Integral sollte durch das gegebene Flächenstück $\mathfrak{F}$ allein bestimmt sein, aber nicht von der besonderen Natur des Zusammenhanges zwischen den x^i einerseits und den u^a andererseits abhängen. Dafür ist es notwendig und hinreichend, dass die Identität

$$\bar{\mathfrak{L}}(\bar{x}^j, \bar{p}^j_\beta) = \mathfrak{L}(x^k, p^k_\gamma) \left| \frac{\partial u^\rho}{\partial \bar{u}^\sigma} \right| \tag{3}$$

bei allen Koordinaten- und Parametertransformationen besteht. Die Grundfunktion $\mathfrak{L}(x^j, p^j_\beta)$ soll nämlich bei der Koordinatentransformation $\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^j)$ eine absolute Invariante und bei der Parametertransformation $\bar{u}^a = \bar{u}^a(u^\beta)$ eine Skalardichte vom Gewichte eins sein. Aus (3) folgen die bekannten Formeln $\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial p^j_a} p^j_\beta = \delta^a_\beta \mathfrak{L}$, d. h. $\mathfrak{L}(x^j, p^j_\beta)$ ist in den p^i_a positiv homogen von erster Ordnung.

Die Fläche $\mathfrak{F}$ sei durch $x^i = x^i(u^{\dot 1}, u^{\dot 2})$ gegeben, dann habe die Matrix $((p^i_a))$ den höchsten Rang 2. Wir bezeichnen die aus der Matrix gebildeten Determinanten zweiter Ordnung mit p^{ij}, d. h. $p^{ij} = 2p^{[i}_{\dot 1} p^{j]}_{\dot 2}$. Dann können wir sogleich beweisen, dass der zwei-dimensionale Flächeninhalt eines Bereiches der Fläche $\mathfrak{F}$ durch ein über den Bereich erstrecktes zwei-faches Integral in der Gestalt

$$O = \iint F(x^j, p^{ij})\, du^{\dot 1} du^{\dot 2} \tag{4}$$

gegeben wird, wobei F aus $\mathfrak{L}$ analytisch abgeleitet wird und in den Grössen p^{ij} positiv homogen von erster Ordnung ist. F ist bei der Koordinatentransformation invariant und bei der Parametertransformation eine Skalardichte vom Gewichte eins. Von F setzen wir voraus, dass es in einem gewissen Bereiche etwa regulär analytisch ist, ausserdem wesentlich positiv.

2. Die Grössen p^{ij} sind die Bestimmungszahlen eines sogenannten Bivektors vom Gewichte eins bei der Parametertransformation und einfach, d. h.

$$\bar{p}^{ij} = p^{ij} \left| \frac{\partial u^\rho}{\partial \bar{u}^\sigma} \right|, \qquad p^{i[j} p^{kl]} = 0. \tag{5}$$

1) In dieser Arbeit laufen die lateinischen bzw. griechischen Indizes immer die Werte 1, 2, 3, 4, 5 bzw. $\dot 1$, $\dot 2$.

Also ist

$$l^{ij} = F^{-1} p^{ij} \tag{6}$$

ein einfacher Bivektor vom Gewichte Null bei der Parametertransformation. Setzt man weiterhin

$$L = \frac{1}{2} F^2, \qquad L_{ij,\,kl} = \frac{\partial^2 L}{\partial p^{ij} \partial p^{kl}}, \tag{7}$$

so ist $L_{ij,\,kl}$ ein Affinor vom Gewichte Null.

Ist $v_{i_1 i_2 i_3 i_4}$ ein kovarianter 4-Vektor, der natürlich stets einfach ist, so hat der Vektor im allgemeinen wesentlich fünf nicht sämtlich verschwindende Bestimmungszahlen:

$$v_{2345}, \quad v_{3451}, \quad v_{4512}, \quad v_{5123}, \quad v_{1234}.$$

Diese Grössen der Reihe nach mit $\mathfrak{v}^1, \mathfrak{v}^2, \mathfrak{v}^3, \mathfrak{v}^4, \mathfrak{v}^5$ bezeichnend, kann man schliessen, dass dem kovarianten 4-Vektor $v_{i_1 i_2 i_3 i_4}$ eine kontravariante Vektordichte vom Gewichte eins $\mathfrak{v}^{i_5}$ entspricht. Aus diesem Grund können wir setzen

$$g^{-1} g^{i_5 j_5} = L_{[i_1 i_2,\, [j_1 j_2} L_{i_3 i_4],\, j_3 j_4]}, \tag{8}$$

wobei die Grösse $g^{i_5 j_5}$ sich bei den Parameter- und Koordinatentransformationen wie ein kontravarianter Tensor zweiter Stufe vom Gewichte Null verhält und g die Determinante $|g^{ij}|$ bedeutet. Wir setzen hierbei voraus, dass die Matrix $((g^{ij}))$ den höchsten Rang 5 hat und überdies die Determinante $|g^{-1} g^{ij}|$ positiv ist. Der Tensor g^{ij} wird als der Fundamentaltensor angenommen. Wir bezeichnen das inverse System der g^{ij} mit g_{ij} und definieren, wie üblich, das Hinauf- und Herunterziehen der Indizes mit Hilfe von denen. Die Fundamentaltensoren g^{ij} und g_{ij} sind natürlich von dem Flächenelemente (x^j, p^j_β) abhängig und sind in den p^{ij} homogen von nullter Ordnung.

3. Wir wollen nun einige Identitäten aufstellen, die im Folgenden nötig sind. Wenn wir zwecks Abkürzung der Bezeichnung setzen

$$\mathfrak{C} = 5^4 L_{[i_1 i_2,\, [j_1 j_2} L_{i_3 i_4,\, j_3 j_4} L_{i_5] [k_5,\, j_5] [l_5} L_{k_4 k_3,\, l_4 l_3} L_{k_2 k_1],\, l_2 l_1]},$$

so zeigt sich, dass $\mathfrak{C}$ wegen der Determinanteneigenschaft eine bestimmte Skalardichte vom Gewichte 4 ist. Dann besteht die Identität zwischen den $L_{ij,\,kl}$ und g^{ij}:

$$L_{ij,\,kl} g^{ik} g^{jl} = g^2 \mathfrak{C}, \tag{9}$$

die aus (8) unmittelbar folgt. Es besteht weiter die Identität:

$$2!\, g^{[i_4 [j_4} g^{i_5] j_5]} = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{4} \right)^2 g^2 L_{[k_1 k_2,\, [l_1 l_2} L_{k_3 k_4,\, l_3 l_4} L_{k_5] [i_1,\, l_5] [j_1} L_{i_2 i_3],\, j_2 j_3]}. \tag{10}$$

Wie man wohl weiss, gelten die Beziehungen

$$\begin{cases} 2!\, g^{[i_4 [j_4} g^{i_5] j_5]} = 3!\, g g_{[i_1 [j_1} g_{i_2 j_2} g_{i_3] j_3]}, \\ 2!\, g g_{[i_4 [j_4} g_{i_5] j_5]} = 3!\, g^{[i_1 [j_1} g^{i_2 j_2} g^{i_3] j_3]}; \end{cases} \tag{11}$$

deshalb kann man die Identität (10) nach $(11)_1$ in die andere Gestalt umschreiben:

$$3!\, g_{[i_1[j_1} g_{i_2 j_2} g_{i_3] j_3]} = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{4}\right)^2 g L_{[k_1 k_2, [l_1 l_2} L_{k_3 k_4, l_3 l_4} L_{k_5][i_1, l_5][j_1} L_{i_2 i_3], j_2 j_3]} \,. \tag{12}$$

Eine etwas komplizierte Rechnung lehrt uns, dass die Identitäten

$$\begin{cases} 3!\, g^{[i_1[j_1} g^{i_2 j_2} g^{i_3] j_3]} = \dfrac{2}{12^3} g^3 \mathfrak{C} L_{i_4 i_5, j_4 j_5} \,, \\[2ex] 2!\, g_{[i_4[j_4} g_{i_5] j_5]} = \dfrac{2}{12^3} g^2 \mathfrak{C} L_{i_4 i_5, j_4 j_5} \end{cases} \tag{13}$$

infolge (8) und (11) gelten, die eine wichtige Rolle in unserer Untersuchung spielt. Die Grösse $C = g^2\mathfrak{C}$ ist nicht nur ein Skalar, sondern auch eine absolute Konstante. Denn es besteht die Identität

$$2!\, g_{[i[k} g_{j]l]} = \frac{2}{12^3} C L_{ij, kl} \tag{14}$$

gemäss $(13)_2$. Multipliziert man diese Gleichungen mit $g^{ik} g^{jl}$ und überschiebt nach $i, \ldots, l$, so folgt unter Berücksichtigung von (9) $C = 10 \times 12^3$.

4. Die Stellung eines Flächenelementes im Punkte (x^i) wird analytisch durch 10 nicht sämtlich verschwindende Parameter p^{ij} gegeben, die in dem Sinne homogen sind, dass sie alle mit demselben willkürlichen positiven Faktor multipliziert werden dürfen. Adjungieren wir nun in jedem Punkte von X_5 ein beliebiges Wertesystem p^{ij}, so kommt eine Mannigfaltigkeit $\mathfrak{X}_5^{(2)}$ von 14 Dimensionen zustande, die aus allen zwei-dimensionalen Flächenelementen (x^i, p^{ij}) besteht. Es versteht sich von selbst, dass alle geometrischen Grössen in unserer Mannigfaltigkeit $\mathfrak{X}_5^{(2)}$ stets Funktionen von x^i und p^{ij} sind, die in den p^{ij} homogen von irgendeiner Ordnung sind. Aber wir können, ohne der Allgemeinheit wesentlich zu schaden, annehmen, dass alle Grössen in den p^{ij} homogen von nullter Ordnung sind.

Mit Hilfe von g_{ij} können wir das Quadrat der Länge eines Vektors v^i im Flächenelemente (x^i, p^{ij}) durch

$$v^2 = g_{ij}(x^k, p^{kl})\, v^i v^j \tag{15}$$

definieren.

Nun wollen wir die Parallelübertragung in unserer Theorie definieren. Es sei v^i ein willkürlicher Vektor in einem beliebigen Flächenelemente (x^i, p^{ij}), dessen Bestimmungszahlen in den p^{ij} homogen von nullter Ordnung sind. Dann definieren wir das kovariante Differential des Vektors v^i in der Gestalt

$$Dv^i = dv^i + (\Gamma^i_{jk} dx^k + C^i_{jkl} dp^{kl})\, v^j \,. \tag{16}$$

Unter der Parallelübertragung des Vektors v^i vom Flächenelemente (x^i, p^{ij}) nach einem unendlich benachbarten $(x^i + dx^i, p^{ij} + dp^{ij})$ verstehen wir somit, dass man v^i nach dv^i im Flächenelemente $(x^i + dx^i, p^{ij} + dp^{ij})$ überträgt, wo dv^i durch $Dv^i = 0$ bestimmt ist. Da die Dv^i in den p^{ij} homogen von nullter Ordnung sein sollen, sind $\Gamma^i_{jk}(x, p)$ in den p^{ij}

homogen auch von derselben Ordnung und $C^i_{jkl}(x, p)$ von der Ordnung -1.

Um die Parameter Γ^i_{jk} und C^i_{jkl} aus g_{ij} und ihren Ableitungen zu bestimmen, wird verlangt, dass der durch die Parallelübertragung erzeugte Zusammenhang euklidisch sein soll, d. h. die Länge eines beliebigen Vektors in einem willkürlichen Flächenelemente wird durch jede Parallelübertragung stets nicht geändert. Dies gibt uns

$$(17) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = g_{hj}\Gamma^h_{ik} + g_{ih}\Gamma^h_{jk} = \Gamma_{ijk} + \Gamma_{jik}\,, \\ \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial p^{kl}} = g_{hj}C^h_{ikl} + g_{ih}C^h_{jkl} = C_{ijkl} + C_{jikl}\,. \end{cases}$$

Wenn wir voraussetzen, dass die Funktionen C^i_{jkl} in bezug auf i und j symmetrisch sind, d. h. $C_{ijkl} = C_{jikl}$, so ergibt sich vermöge $(17)_2$

$$(18) \qquad C_{ijkl} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial p^{kl}}\,.$$

Da der Fundamentaltensor g_{ij} in den p^{ij} homogen von nullter Ordnung ist, folgt sogleich aus (18) die Beziehung

$$(19) \qquad C_{ijkl}p^{kl} = 0\,;$$

und die Grössen

$$A_{ijkl} = FC_{ijkl} = \frac{1}{2}g_{ij//kl}$$

sind die Bestimmungszahlen eines Affinors, der in den p^{ij} homogen von nullter Ordnung sind.

5. Ehe wir weitergehen, besprechen wir die Grundübertragung. Die beiden Seiten von (6) differenzierend, lautet

$$dl^{ij} = F^{-1}dp^{ij} + p^{ij}dF^{-1}\,;$$

und es gilt die Identität wegen (19)

$$C^i_{jkl}dp^{kl} = A^i_{jkl}dl^{kl}\,.$$

Somit nimmt das kovariante Differential Dv^i auch die Gestalt

$$Dv^i = dv^i + (\Gamma^i_{jk}dx^k + A^i_{jkl}dl^{kl})\,v^j$$

an; insbesondere dasjenige der Parameter l^{ij} des Flächenelementes lässt sich geben in der Gestalt

$$Dl^{ij} = dl^{ij} + (l^{hj}\Gamma^i_{hk} + l^{ih}\Gamma^j_{hk})\,dx^k + (l^{hj}A^i_{hkl} + l^{ih}A^j_{hkl})\,dl^{kl}\,.$$

Wie man leicht verifiziert, erhält man die Beziehungen

$$(20) \qquad l^{hj}A^i_{hkl} + l^{ih}A^j_{hkl} = 2l^{pq}g^{im}g^{jn}\{g_{[m\,[p}g_{n]\,q]}\}_{//kl}\,;$$

deswegen verschwindet die Grösse $l^{hj}A^i_{hkl} + l^{ih}A^j_{hkl}$ identisch, wie aus (20) und (14) unmittelbar zu entnehmen ist. Dann gilt schliesslich

(21) $$Dl^{ij}=dl^{ij}+G^{ij}{}_k dx^k\,,$$

wobei einfachheitshalber gesetzt ist:

$$G^{ij}{}_k=l^{hj}\Gamma^i_{hk}+l^{ih}\Gamma^j_{hk}=2l^{[i|h|}\Gamma^{j]}_{hk}\,.$$

(21) ist nichts anderes als die sogenannte Grundübertragung in unserem Raume.

Mit Hilfe von (21) geht das kovariante Differential Dv^i in

(22) $$Dv^i=dv^i+(\Gamma^{*i}_{jk}dx^k+A^i_{jkl}Dl^{kl})\,v^j$$

über, wobei gesetzt ist:

(23) $$\Gamma^{*i}_{jk}=\Gamma^i_{jk}-A^i_{jhl}G^{hl}{}_k\,;$$

daraus bekommen wir die kovarianten Ableitungen eines Vektors v^i

$$\nabla_k v^i=\frac{\partial v^i}{\partial x^k}+v^i_{j//hl}G^{hl}{}_k+\Gamma^{*i}_{jk}v^j\,,$$

$$\nabla_{kl}v^i=v^i_{//kl}+A^i_{jkl}v^j\,.$$

Die beiden Grössen $\nabla_k v^i$ und $\nabla_{kl}v^i$ sind in den p^{ij} homogen von nullter Ordnung, und überdies ist die letztere schiefsymmetrisch in bezug auf k und l. Die kovarianten Ableitungen des Fundamentaltensors g_{ij} sowie g^{ij} sind offenbar Null, d. h. $\nabla_k g_{ij}=0$, $\nabla_{kl}g_{ij}=0$.

6. Zur Festlegung der Übertragungsparameter Γ^{*i}_{jk} fordern wir zunächst, dass es bei der Parallelübertragung von einem beliebigen Parameter p^{ij} nach irgend einem dazu parallelen ein infinitesimales Parallelogramm gibt. Diese Forderung ist gleichbedeutend mit der Beziehung

(24) $$\Gamma^{*i}_{jk}=\Gamma^{*i}_{kj}\,.$$

Dann folgt aus $(17)_1$ und (23)

$$\Gamma^*_{jik}+\Gamma^*_{ijk}=\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}-2A_{jihl}G^{hl}{}_k\,;$$

deshalb ergibt sich durch dieselbe Rechnung wie im Falle des Finslerschen Raumes

(25) $$\Gamma^*_{ikj}=\gamma_{ikj}-A_{kihl}G^{hl}{}_j-A_{jkhl}G^{hl}{}_i+A_{jihl}G^{hl}{}_k\,,$$

wo γ_{ikj} das aus dem Fundamentaltensor g_{ij} gebildete Christoffelsche Symbol ist, d. h.

$$\gamma_{ikj}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right).$$

Setzen wir nun $\Gamma_{ikj}=\gamma_{ikj}+S_{ikj}$, so ist S_{ikj} vermöge $(17)_1$ in bezug auf die ersten zwei Indizes schiefsymmetrisch. Wenn die Grössen S_{ikj} sich aus der Grundfunktion F eindeutig einführen lassen, so sind die Übertragungsparameter Γ_{ijk} und damit auch Γ^*_{ijk} vollständig bestimmt.

Die Forderung (24) wird mit Hilfe der letzten Beziehung so umgeschrieben:

$$S_{ijk} - S_{kji} = A_{ijhl} G^{hl}{}_{k} - A_{kjhl} G^{hl}{}_{i} .$$

Die Beziehungen $S_{ijk} + S_{jki} + S_{kij} = 0$ benutzend, erhält man schliesslich

$$S_{kij} = 2A_{ijhl}{}^{[h|n|}(\gamma^{l]}_{n\,k} + S_{n}{}^{l]}{}_{k}) - 2A_{kjhl}{}^{[h|n|}(\gamma^{l]}_{n\,i} + S^{l]}_{n\,i}) . \tag{26}$$

Mit einer ähnlichen Methode wie E. Cartan können wir die S_{ijk} nach (26) aus F eindeutig bestimmen, aber es ist schwer, ihre explizite Form hinzuschreiben. Wir werden diese Theorie an anderer Stelle noch ausführlicher behandeln.