100. *Teilweise geordnete Algebra.*[1]

Von Hidegorô NAKANO.
Mathematical Institute, Tokyo Imperial University.
(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Nov. 12, 1940.)

H. Freudenthal hat eine Spektraltheorie im teilweise geordneten Modul gebildet.[2] Unabhängig von Freudenthal, hat S. W. P. Steen die Spektraltheorie Hermitescher Operatoren im Hilbertschen Raum abstrakt behandelt, indem er teilweise geordnete Ringe definiert.[3] Wir wollen nun die beiden Theorien von Freudenthal und Steen in einer einzigen zusammenfassen, und zum komplexen Ring erweitern, welcher dem Abelschen Ring normaler Operatoren im Hilbertschen Raum entspricht. Neuerdings hat B. Vulich Relationen zwischen teilweise geordneten Moduln und Ringen betrachtet, indem er das Produkt zweier Elemente in teilweise geordneten Moduln definiert.[4] Die Resultate von Vulich werden auch in unserer Theorie umgefasst.

Diese Note besteht aus drei Teilen. Im ersten Teil erörtern wir Projektionen und Spektraltheorie im teilweise geordneten Modul.

Unter teilweise geordneten Moduln verstehen wir wie Freudenthal:

Definition. Ein Modul $\mathfrak{M}$ in bezug auf dem Körper reeller Zahlen heisst ein *teilweise geordneter Modul*, wenn 1) für irgendzwei $a, b \in \mathfrak{M}$ man Ordnung derart findet, dass aus $a > b$ und $b > c$ ja $a > c$ folgt; 2) $a \not> a$ ist; 3) für je zwei a, b das Element $c = a \frown b$ existiert: $c \leqq a, \leqq b$ und für jedes $x \leqq a, \leqq b$ stets $x \leqq c$; und das $d = a \smile b$ existiert: $d \geqq a, \geqq b$ und für jedes $x \geqq a, \geqq b$ stets $x \geqq d$; 4) $a + c > b + c$ aus $a > b$, 5) $\alpha a > 0$ aus $a > 0$ für jede reelle Zahl $\alpha > 0$ folgt, und 6) für jede absteigende Folge positiver Elemente $a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots$, das $c = \lim_{\nu\to\infty} a_\nu$ existiert, so dass $c \leqq a_\nu$, und für jedes $x \leqq a_\nu$ stets $x \leqq c$ ist.

Hieraus kann man aber den allgemeinen Limesbegriff herleiten: Wenn für irgendeine Folge positiver Elemente $l_1 \geqq l_2 \geqq \cdots$, $\lim_{\nu\to\infty} l_\nu = 0$,

$$|x_\nu - x_0| \leqq l_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

gilt, so bezeichnet man $\lim_{\nu\to\infty} x_\nu = x_0$. Diese Definition stimmt mit der von Steen, durch $\overline{\lim_{\nu\to\infty}}\, x_\nu$, $\underline{\lim_{\nu\to\infty}}\, x_\nu$, überein, aber ist bequemer, um andere Konvergenzen zu definieren.

Wir wollen Projektionen im allgemeineren Gestalt als Freudenthal definieren. Zwei Elemente x, y heissen *zueinander orthogonal*, wenn

---

1) Ausführliches erscheint nächstens in Japanese Journal of Mathematics.

2) H. Freudenthal: Teilweise geordnete Modul. Proc. Akad. Amsterdam. 39, 1936, S. 641–651.

3) S. W. P. Steen: An Introduction to the Theory of Operators (I), Proc. London Math. Soc. (2) 41, 1936, S. 361–392.

4) B. Vulich: Une Définition du Produit dans les Espaces semi-ordonnés linéaires, Comp. Reind. URSS, No. 9, XXVI, 1940, S. 850–854.

$|x| \frown |y|=0$ ist. Hierbei bedient man sich der Bezeichnung: $x_+ = x \smile 0$, $x_- = (-x)_+$, $|x| = x_+ + x_-$. Für je zwei x, p kann man stets x in eindeutiger Weise im Gestalt $x=h+k$ ausdrücken, so dass k zu p orthogonal, und h zu jedem, zu p orthogonalen Element orthogonal ist. Dieses h heisst die Projektion von x auf p, und man bezeichnet h mit $[p]x$. Dann kann man leicht beweisen, dass $[p]$ ein linearer Operator in $\mathfrak{M}$ ist. Daher nennen wir $[p]$ *Projektor*. Jeder Projektor ist beschränkt, stetig und positiv, d. h. $[p]x \geqq 0$ für $x \geqq 0$.

Über Projektoren bestehen mehrere Sätze wie Projektionsoperatoren im Hilbertschen Raum, z. B. $[p][p]=[p]$, $[|p|]=[p]$, $\big[[p], q\big]=\big[[q], p\big]=[p][q]=[q][p]=[|p| \frown |q|]$, $[p]+[q]=[|p| \smile |q|]+[|p| \frown |q|]$. Wenn p, q zueinander orthogonal sind, so gilt $[p+q]=[p]+[q]$. Wenn $|p_1| \leqq |p_2| \leqq \cdots$, $\lim_{\nu\to\infty} |p_\nu| = |p_0|$ ist, so gilt für jedes x $\lim_{\nu\to\infty}[p_\nu]x=[p]x$. Wenn der lineare Operator $[p]-[q]$ positiv in $\mathfrak{M}$ ist, so schreibt man $[p] \geqq [q]$. Dafür, dass $[p] \geqq [q]$ sei, ist notwendig und hinreichend, dass $[p][q]=[q][p]=[q]$ ist.

Durch diese Projektoren kann man leicht die Spektraltheorie in $\mathfrak{M}$ bilden. Dafür muss man aber Stieltjéssche Integrale erweitern. Ein Schar von Elementen a_λ heisst von *beschränkter Variation* im Intervall $\alpha \leqq \lambda \leqq \beta$, wenn für jede Zerlegung des Intervalls $\alpha=\lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_\varkappa = \beta$ stets $\sum_{\nu=1}^{\varkappa} |a_{\lambda_\nu} - a_{\lambda_{\nu-1}}| \leqq l$ für ein festes Element l gilt. $\varphi(\lambda)$ sei eine stetige Funktion im Intervall $\alpha \leqq \lambda \leqq \beta$, und a_λ eine Schar von beschränkter Variation. Dann kann man ganz ähnlich wie im Falle reeller Funktionen die Existenz des Integrals beweisen:

$$\int_\alpha^\beta \varphi(\lambda) da_\lambda = \lim_{\delta\to\infty} \sum_{\nu=1}^{\varkappa} \varphi(\tau_\nu)\,(a_{\lambda_\nu} - a_{\lambda_{\nu-1}}).$$

$$\lambda_{\nu-1} \leqq \tau_\nu \leqq \lambda_\nu, \qquad \lambda_\nu - \lambda_{\nu-1} \leqq \delta \qquad (\nu=1, 2, \dots, \varkappa).$$

Ein Element e heisst ein *Teil* von p, wenn e zu $p-e$ orthogonal ist. Eine Schar von Teilen e_λ von p heisst eine *Zerlegung des* p, wenn für $\lambda > \mu$ ja $e_\lambda \geqq e_\mu$, und $\lim_{\lambda\to\infty} e_\lambda = p$, $\lim_{\lambda\to-\infty} e_\lambda = 0$, $\lim_{\lambda\to\mu-0} e_\tau = e_\mu$ ist. Jede Zerlegung eines p ist stets von beschränkter Variation.

Für je zwei a, p gibt es eine und nur einzige Zerlegung e_λ des p, für die

$$[p]\,a = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda de_\lambda$$

gilt. Diese Zerlegung des p wird ja gegeben durch

$$e_\lambda = \Big[(\lambda p_+ - [p_+]\,a)_+ + (\lambda p_- + [p_-]\,a)_+\Big]\,p\,.$$

Im zweiten Teil betrachten wir besondere Operatoren, welche wir Dilatatoren nennen. Alle Dilatatoren bilden einen Ring, von welchem irgendein Untermodul mit $\mathfrak{M}$ isomorph ist.

Definition. Ein linearer Operator T mit dem Definitionsbereich $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{M}$ heisst ein *Dilatator*, wenn 1) $\mathfrak{D}$ überall dicht in $\mathfrak{M}$, 2) T mit jedem Projektor P vertauschbar: aus $a \in \mathfrak{D}$ folgt $Pa \in \mathfrak{D}$ und $TPa = PTa$,

3) T abgeschlossen ist: aus $\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = a_0$, $\lim_{\nu\to\infty} Ta_\nu = b$ folgt $a_0 \in \mathfrak{D}$ und $Ta_0 = b$.

Ein Element p heisst *vollständig* in $\mathfrak{M}$, wenn $[p] = I$ ist, wobei I den Identitätsoperator in $\mathfrak{M}$ bedeutet. Im folgenden nehmen wir an, dass $\mathfrak{M}$ mindestens ein vollständiges Element umfasst. Dann gibt es ein vollständiges p in $\mathfrak{D}$. Sei $a = Tp$, so gibt es die Zerlegun e_λ von p, für die

$$Tp = a = Ia = [p]\, a = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda de_\lambda$$

ist. Setzt man $[e_\lambda] = P_\lambda$, so kann man beweisen, dass man T in eindeutiger Weise im Gestalt

$$Tx = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dP_\lambda x$$

ausdrücken kann, wobei dieses Integral nur für x in $\mathfrak{D}$ konvergiert. Für diese Schar von Projektoren P_λ gilt, dass für $\lambda > \mu$ ja $P_\lambda \geqq P_\mu$, und $\lim_{\lambda\to\infty} P_\lambda = I$, $\lim_{\lambda\to-\infty} P_\lambda = 0$, $\lim_{\lambda\to\mu-0} P_\lambda = P_\mu$ ist. Wir nennen solche Schar von Projektoren eine *Zerlegung der Identität*. *Für jeden Dilatator T gibt es eine einzige Zerlegung der Identität P_λ, für die*

$$T = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dP_\lambda$$

ist, und für jede Zerlegung der Identität erhält man durch dieses Integral einen Dilatator. Damit ist die Spektraltheorie von Dilatatoren gebildet.

Ein Dilatator heisst *regulär*, wenn sein Definitionsbereich aus dem ganzen Modul $\mathfrak{M}$ besteht. Jeder beschränkte Dilatator ist regulär, aber alle Dilatatoren sind nicht immer regulär. Daher kann man die Summe und das Produkt zweier Dilatatoren durch die und das von Operatoren nicht definieren. Man kann aber beweisen: je zwei Dilatatoren T_1, T_2 haben in ihren Definitionsbereichen $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ ein vollständiges Element p gemeinsam, und, wenn für ein anderen Dilatator T_3 $T_1p + T_2p = T_3p$ gilt, so gehört jedes x in $\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2$ zum Definitionsbereich von T_3, und $T_1x + T_2x = T_3x$. Daher gibt es solches T_3 in eindeutiger Weise. Wir definieren T_3 als die *Summe von* T_1, T_2, und bezeichnen die Summe mit $T_1 \oplus T_2$. Dann ist die Menge aller Dilatatoren auch ein teilweise geordneter Modul. Hierbei ist die Ordnung $T_1 \geqq T_2$ durch $T_1 \ominus T_2 \geqq 0$ definiert. Da für vollständiges p und beliebiges a es einen und nur einzigen Dilatator T gibt, so dass $a = Tp$ ist, so bezeichnet man T mit $[a, p]$. Dann ist die Menge aller Dilatatoren $[a, p]$ für alle a und ein festes p mit $\mathfrak{M}$ isomorph unter der Zuordnung $[a, p] \leftrightarrow a$.

Ein teilweise geordneter Modul $\mathfrak{M}$ heisst *vollkommen*, wenn für jeder Folge $a_1, a_2, \cdots$, deren je zwei zueinander orthogonal sind, die Reihe $a_1 + a_2 + \cdots$ stets konvergiert. Dann ist der Modul aller Dilatatoren vollkommen. Wenn $\mathfrak{M}$ vollkommen ist, so sind alle Dilatatoren in $\mathfrak{M}$ regulär, und der Modul aller Dilatatoren ist isomorph mit $\mathfrak{M}$.

In ähnlicher Weise kann man das *Produkt* zweier Dilatatoren T_1, T_2 definieren: $T_1 \circ T_2$. Dann bilden alle Dilatatoren einen Abelschen Ring.

Nun definieren wir teilweise geordnete Ringe abstrakt.

Definition. Ein teilweise geordneter Modul $\mathfrak{R}$ heisst ein *teilweise geordneter Ring* oder ein *reeller Ring,* wenn das Produkt zweier Elemente wie folgt definiert ist: 1) $(ab)c=a(bc)$, 2) $a(b+c)=ab+ac$, $(b+c)a=ba+ca$, 3) $\alpha(ab)=(\alpha a)b=a(\alpha b)$ für jede reelle Zahl α, 4) aus $a\geqq 0$, $b\geqq 0$ folgt $ab\geqq 0$, 5) es gibt die Einheit $1>0$: $a1=1a=a$ für jedes a, und 6) aus $a\frown 1=0$ folgt $a=0$.

6) ist nicht anders als die Bedingung, dass die Einheit vollständig in $\mathfrak{R}$ ist. Man kann auch beweisen, dass man 6) durch die folgende Bedingung erstzen kann: $a(b\frown c)=ab\frown ac$, $(b\frown c)a=ba\frown ca$ für $a>0$.

Indem man Dilatatoren in $\mathfrak{R}$ betrachtet, kann man beweisen, dass für je zwei $a, x\in\mathfrak{R}$ $[a, 1]x=ax$ gilt. Hieraus folgt, dass der Dilatator $[a, 1]$ für jedes a regulär ist. *Weiterhin ist* $\mathfrak{R}$ *Abelsch und mit dem Ring aller regulären Dilatatoren isomorph.*

Wenn $\mathfrak{R}$ vollkommen ist, so sind alle Dilatatoren regulär, und folglich ist $\mathfrak{R}$ mit dem Ring aller Dilatatoren isomorph. Man kann auch beweisen; dafür, dass ein reeller Ring vollkommen sei, ist notwendig und hinreichend, dass jedes vollständige a sein inverses a^{-1} besitzt:

Steenscher reeller Ring ist daher vollkommen, denn er nimmt als Axiom, dass jedes vollständige Element sein inverses besitzt.

Man braucht nicht anzunehmen, dass der reelle Ring Abelsch sei, da die Vertauschbarkeit beweisbar ist. Wenn man 6) weglässt, so ist die Vertauschbarkeit nicht mehr beweisbar.

Drittens betrachten wir komplexe Ringe, welche aus reellen Ringen hergeleitet sind, wie man im Falle komplexer Zahlen getan hat.

$\mathfrak{R}$ sei ein reeller Ring. Durch $z=x+iy$, $x, y\in\mathfrak{R}$ erhält man den *komplexen Ring* $\mathfrak{K}$. Bezeichnungen im komplexen Zahlen sind auch hier benutzt: für $z=x+iy$, $\Re z=x$, $\Im z=y$, $\bar{z}=x-iy$, $|z|=(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$, da man beweisen kann, dass für $a>0$ es ein und nur einziges $x>0$ gibt, für das $x^\nu=a$ ist.

Man kann Projektoren ganz ähnlich wie im Falle reeller Elemente definieren, und erhält ähnliche Sätze. Über den Limesbegriff ist es ganz ähnlich wie im Falle reeller Ringe.

Dilatatoren in $\mathfrak{K}$ werden auch ähnlich definiert. Dabei braucht man aber die Bedingung hinzuzufügen, dass aus $z\in\mathfrak{D}$, $\bar{z}\in\mathfrak{D}$ folgt. Dann kann man jeden Dilatator T in $\mathfrak{K}$ als $T=[a, p]\oplus i[b, p]$, $a, b, p\in\mathfrak{R}$, schreiben: der Definitionsbereich $\mathfrak{D}$ besteht aus allen $z=x+iy$ für je zwei, in den Definitionsbereichen von $[a, p]$ und $[b, p]$ gemeinsam enthaltene x, y, und für solches z gilt

$$Tz=([a, p]x-[b, p]y)+i([a, p]y+[b, p]x)\,.$$

Alle Dilatatoren bilden auch einen komplexen Ring. Man kann auch beweisen, dass für vollständiges z und beliebiges w es stets einen und nur einzigen Dilatator T gibt, für den $w=Tz$ ist. Solchen Dilatator T beheichnet man mit $[z, w]$. Dann gilt $[u, z]\circ[v, w]=[uv, zw]$, $|[u, z]|=[|u|, |z|]$, $[u, z]\oplus[v, w]=[uw+zv, zw]$, und für $\lim_{\nu\to\infty} u_\nu=u_0$, $\lim_{\nu\to\infty}[u_\nu, z]=[u_0, z]$.

Aus $T=[a,p]\oplus i[b,p]$ erhält man die Spektraldarstellung von T durch Projektoren. Sei

$$[a,p]=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda dE_\lambda\,,\qquad [b,p]=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda dF_\lambda\,,$$

und setzt man $E(\varLambda)=(E_{\lambda_2}-E_{\lambda_1})(F_{\mu_2}-F_{\mu_1})$ für das halbabgeschlossene Intervall $\varLambda$ in der komplexen Ebene G: $\lambda_1\leqq\lambda<\lambda_2$, $\mu_1\leqq\mu<\mu_2$, so erhält man in eindeutiger Weise für $\zeta=\lambda+i\mu$

$$T=\int_G\zeta dE(\varLambda)\,.$$

Zuletzt definieren wir verschiedene Konvergenzen. Wenn im Ring aller Dilatatoren $\lim\limits_{\nu\to\infty}[z_\nu,1]=[z_0,1]$ ist, so heisst $z_1,z_2,\cdots$ nach z_0 *D-konvergent.* Ein Element l heisst *beschränkt,* wenn für eine grosse Zahl $\varkappa$ ja $|l|\leqq\varkappa 1$ gilt. Wenn für eine Folge beschränkter Elemente $l_1\geqq l_2\geqq\cdots$, $\lim\limits_{\nu\to\infty}l_\nu=0$, ja $|z_\nu-z_0|\leqq l_\nu$ gilt, so heisst $z_1,z_2,\cdots$ nach z_0 *B-konvergent.* Wenn für eine Folge positiver Zahlen $\varkappa_1\geqq\varkappa_2\geqq\cdots$, $\lim\limits_{\nu\to\infty}\varkappa_\nu=0$, ja $|z_\nu-z_0|\leqq\varkappa_\nu 1$ gilt, so heisst $z_1,z_2,\cdots$ nach z_0 *gleichmässig konvergent.*

Im Falle Abelscher Ringe von beschränkter Operatoren im Hilbertschen Raum, stimmt die B-Konvergenz mit der starken Kovergenz, und die gleichmässige mit der gleichmässige überein.

Als Anwendung kann man z. B. sogenannten Mittelergodensatz leicht beweisen: wenn $|z|\leqq 1$ ist, so gilt

$$B\text{-}\lim_{\mu-\nu\to\infty}\frac{z^{\nu+1}+z^{\nu+2}+\cdots+z^\mu}{\mu-\nu}=1-[1-z]1\,.$$