

114. Über einen Satz von Herrn Löwner.

Von Yûsaku KOMATU.

Mathematical Institute, Tokyo Imperial University.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., Dec. 12, 1940.)

Wir bezeichnen mit B einen Bereich, welcher dadurch hervorgeht, daß man den Einheitskreis längs eines von der Peripherie ausgehenden Jordanbogens aufschneidet, der den Nullpunkt nicht enthält. Bereiche dieser Art nennen wir nach Herrn Löwner beschränkte Schlitzbereiche. Um die extremalen Eigenschaften der schlichten Funktionen $w=f(z)$ im Innern des Einheitskreises $|z|<1$ zu untersuchen, braucht man nach dem Carathéodoryschen Satze¹⁾ über Gebietskerne nur die beschränkten Schlitzabbildungen, d. h. die schlichten (normierten) Abbildungen des Einheitskreises auf beschränkte Schlitzbereiche, zu behandeln.

Herr Löwner²⁾ hat den folgenden wichtigen Satz über solche Abbildungen bewiesen :

Zu jeder beschränkten Schlitzabbildung

$$f(z) = e^{-t_0} (z + \dots) \quad t_0 \geq 0$$

läßt sich eine stetige Funktion $\kappa(t)$ mit $0 \leq t \leq t_0$ und $|\kappa(t)|=1$ so finden, daß man mit ihrer Hilfe diese Funktion als Integral $f(z) = f(z, t_0)$ der Differentialgleichung

$$\frac{\partial f(z, t)}{\partial t} = -f(z, t) \frac{1 + \kappa(t)f(z, t)}{1 - \kappa(t)f(z, t)}$$

mit der Anfangsbedingung $f(z, 0) = z$ bestimmen kann.

In der vorliegenden Note soll ein kurzer Beweis dieses Satzes gegeben werden³⁾.

Es sei ein beliebiger beschränkter Schlitzbereich B mit dem vom Punkte $w = e^{-i\theta_0}$ ausgehenden Schlitze L gegeben. Wir stellen die Gleichung für L durch seinen Längenparameter s dar :

$$L: \quad w = \omega(s), \quad 0 \leq s \leq s_0; \quad \omega(0) = e^{-i\theta_0}.$$

Wir bezeichnen nun mit l_s das Anfangsstück von L , das den Parameterwerten von 0 bis s entspricht, und mit G_s den beschränkten Schlitzbereich mit dem Schlitze l_s . Es sei.

$$w = g(w_s, s) = \gamma(s) (w_s + \dots), \quad \gamma(s) > 0,$$

diejenige Funktion, die die schlichte normierte Abbildung von G_s auf

1) C. Carathéodory, Untersuchungen über die konformen Abbildungen von festen und veränderlichen Gebieten, Math. Ann. **72** (1912), 107-144.

2) K. Löwner, Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises. I, Math. Ann. **89** (1923), 103-121.

3) Kürzlich hat Herr J. Basilewitsch einen sehr einfachen Beweis des Löwnerschen Satzes berichtet in seiner Abhandlung: Sur les théorèmes de Koebe-Bieberbach, Rec. math. **1** (43) (1936), 283-292. Aber es scheint mir nicht ganz richtig zu sein.

$|w_s| < 1$ vermittelt, und vermöge dieser Abbildung gehe der Bereich B in den Schlitzbereich D_s über. Dann ist $\gamma(s)$ ($0 \leq s \leq s_0$) eine monoton abnehmende stetige positive Funktion von s mit $\gamma(0) = 1$. Es gilt dabei

$$f(z) = g(z, s_0), \quad \gamma(s_0) = e^{-t_0}.$$

Führen wir durch die Beziehung

$$t = t_0 + \log \gamma(s)$$

ein neues Parameter t ($0 \leq t \leq t_0$) ein, so wird $s = s(t)$ als eine monoton abnehmende Funktion von t eindeutig bestimmt. Gemäß dieser Parametertransformation setzen wir

$$h(w_t, t) = g(w_{s(t)}, s(t)) \quad \text{und} \quad B_t = D_{s(t)}.$$

Die Funktion

$$w_t = f(z, t) \quad (f(0, t) = 0, f'(0, t) > 0)$$

vermittele die beschränkte Schlitzabbildung von B_t auf $|z| < 1$. Dann gilt die Beziehung

$$f(z) = h(f(z, t), t) = g(f(z, t), s(t)),$$

und also

$$f'(0, t) = \frac{f'(0)}{g'(0, s)} = \frac{e^{-t_0}}{\gamma(s)} = e^{-t}.$$

Bezeichnen wir mit $e^{-i\theta(t)}$ den mittels der Abbildung $w = h(w_t, t)$ dem Punkte $\omega(s(t))$ entsprechenden Punkt in der w_t -Ebene, so ist $\theta(t)$ als stetige Funktion von t eindeutig bestimmt. Sei $t^* < t$, und die schlichte normierte Abbildungsfunktion von dem aus dem Bereiche $G_{s(t^*)}$ mittels $w = h(w_t, t)$ entstehenden Bereiche in der w_t -Ebene auf den Einheitskreis $|w_{t^*}| < 1$ sei

$$w_t = \Phi(w_{t^*}) \quad (\Phi(0) = 0, \Phi'(0) > 0).$$

Dann gilt bekanntlich

$$f(z, t) = \Phi(f(z, t^*)),$$

und die Funktion

$$\frac{\Phi(w_{t^*})}{w_{t^*}} \quad \left(\left[\frac{\Phi(w_{t^*})}{w_{t^*}} \right]_{w_{t^*}=0} = \Phi'(0) > 0 \right)$$

ist regulär und nullstellenfrei in $|w_{t^*}| < 1$ und stetig in $|w_{t^*}| \leq 1$. Daher gilt für $|w_{t^*}| < 1$

$$\log \frac{\Phi(w_{t^*})}{w_{t^*}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |\Phi(e^{i\varphi})| \frac{e^{i\varphi} + w_{t^*}}{e^{i\varphi} - w_{t^*}} d\varphi,$$

wobei $\log \frac{\Phi(w_{t^*})}{w_{t^*}}$ in $w_{t^*} = 0$ reell zu nehmen ist, nämlich für $|z| < 1$

$$\log \frac{f(z, t)}{f(z, t^*)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |\Phi(e^{i\varphi})| \frac{e^{i\varphi} + f(z, t^*)}{e^{i\varphi} - f(z, t^*)} d\varphi.$$

Entsprechen dem (doppelt zu zählenden) Punkte $e^{-i\theta(t)}$ in der w_t -Ebene vermöge der Abbildung $w_t = \varphi(w_{t^*})$ zwei Punkte $e^{i\alpha}$ und $e^{i\beta}$ ($\alpha = \alpha(t, t^*)$, $\beta = \beta(t, t^*)$, $\alpha < \beta$) in der w_{t^*} -Ebene, so ist der absolute Betrag von $\varphi(e^{i\varphi})$ für die Werte von φ außerhalb des Intervalles (α, β) stets gleich 1 und damit erhält man

$$\log \frac{f(z, t)}{f(z, t^*)} = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \log \left| \varphi(e^{i\varphi}) \right| \frac{e^{i\varphi} + f(z, t^*)}{e^{i\varphi} - f(z, t^*)} d\varphi.$$

Setzt man in dieser Beziehung insbesondere $z=0$, so ergibt sich die Gleichung

$$-(t-t^*) = \log \frac{f'(0, t)}{f'(0, t^*)} = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \log \left| \varphi(e^{i\varphi}) \right| d\varphi.$$

Dann erhält man nach dem Mittelwertsatze der Integralrechnung

$$\log \frac{f(z, t)}{f(z, t^*)} = \left(\Re \frac{e^{i\varphi'} + f(z, t^*)}{e^{i\varphi'} - f(z, t^*)} + i\Im \frac{e^{i\varphi''} + f(z, t^*)}{e^{i\varphi''} - f(z, t^*)} \right) \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \log \left| \varphi(e^{i\varphi}) \right| d\varphi,$$

also

$$\frac{\log f(z, t) - \log f(z, t^*)}{t-t^*} = - \left(\Re \frac{e^{i\varphi'} + f(z, t^*)}{e^{i\varphi'} - f(z, t^*)} + i\Im \frac{e^{i\varphi''} + f(z, t^*)}{e^{i\varphi''} - f(z, t^*)} \right),$$

worin φ' und φ'' irgendwelche Werte im Intervalle (α, β) bedeuten. Durch den Grenzübergang $t^* \rightarrow t$ streben α, β und damit auch φ', φ'' beide gegen $-\theta(t)$, und $f(z, t^*)$ gegen $f(z, t)$. Ganz Ähnliches gilt auch im Fall $t^* > t$. Daher genügt die Funktion $f(z, t)$ der Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \log f(z, t) = - \frac{e^{-i\theta(t)} + f(z, t)}{e^{-i\theta(t)} - f(z, t)},$$

nämlich

$$\frac{\partial f(z, t)}{\partial t} = -f(z, t) \frac{1 + \kappa(t)f(z, t)}{1 - \kappa(t)f(z, t)} \quad \kappa(t) = e^{i\theta(t)}.$$

Da $f(z, 0) = z$ ist, ist der Satz völlig bewiesen.

Bemerkung 1. Nach der Beziehung

$$f(z) = h(f(z, t), t)$$

genügt die Funktion $h(z, t)$ der Differentialgleichung

$$\frac{\partial h(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial h(z, t)}{\partial z} z \frac{1 + \kappa(t)z}{1 - \kappa(t)z}$$

mit der Anfangsbedingung

$$h(z, t_0) = z \quad \text{bzw.} \quad h(z, 0) = f(z).$$

Bemerkung 2. Wenn der gegebene Bereich B mehrere Schlitze besitzt, so sieht man aus der oben geschilderten Beweisführung sofort ein, daß die Funktion $\kappa(t)$ die entsprechenden Sprungstellen besitzt.