6. Über die mit einer Kollineation vertauschbaren Kollineationen.

Von Tiyoko KUROSAKI.
Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Osaka.
(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Jan. 13, 1941.)

Es sei eine Kollineation $[A]$ mit der zugehörigen Matrix A in einem beliebigen Körper K vorgegeben. Ist P die Matrix einer mit $[A]$ vertauschbaren Kollineation $[P]$, so ist

$$PA = cAP$$

mit c aus K. Die sämtlichen mit $[A]$ vertauschbaren Kollineationen bilden einen Multiplikationsbereich Γ. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Untersuchung dieses Bereiches.

Es sei

$$|xE-A| = \varphi_1^{e_1}(x)\varphi_2^{e_2}(x)\dots\varphi_t^{e_t}(x)$$

die Zerlegung der charakteristischen Determinante von A in irreduzible Polynome. Der Grad des irreduziblen Polynoms $\varphi_i(x)$ sei gleich k_i.

$$\varphi_i(x) = x^{k_i} + a_{k_i-1}^{(i)}x^{k_i-1} + \dots + a_0^{(i)}.$$

Dann lässt sich $|xE-cA|$ folgendermassen zerlegen:

$$|xE-cA| = \psi_1^{e_1}(x)\psi_2^{e_2}(x)\dots\psi_t^{e_t}(x),$$

$$\psi_i(x) = x^{k_i} + a_{k_i-1}^{(i)}cx^{k_i-1} + \dots + a_0^{(i)}c^{k_i}.$$

Dann und nur dann besitzt die Gleichung $PA=cAP$ eine Lösung P, wenn $|xE-A|$ und $|xE-cA|$ gemeinsamen Faktor hat, also, wenn $\varphi_j(x)=\psi_i(x)$ mindesten für ein Paar (i, j) ist. Wir nehmen nun eine Teilmenge M von K an, die aus von Null verschiedenen Elementen besteht. Dann kann man die Eigenwerte von A in Klassen einteilen, indem man zwei Eigenwerte γ, δ in eine Klasse zusammenfasst, wenn $\frac{\gamma}{\delta}$ oder $\frac{\delta}{\gamma}$ in M liegt. Dadurch kann man die t Polynome $\varphi_i(x)$ auch in Klassen einteilen, so dass zwei in einer selben Klasse gehörige Eigenwerte Nullstelle der in einer selben Klasse gehörigen Polynome sind. Besteht M nur aus 1, so handelt es sich um die Vertauschbarkeit der Matrizen in üblichem Sinne und jede Klasse der Polynome besteht aus einzelnem Polynom $\varphi_i(x)$[1].

Sind $\alpha, c\alpha$ beides Wurzeln einer selben Gleichung d. h. ist $\varphi_i(x)=$

---

1) G. Frobenius, Über die mit einer Matrix vertauschbaren Matrizen, Berliner Sitzungsberichte, (1910), 3-15. K. Shoda, Über die mit einer Matrix vertauschbaren Matrizen, Math. Zeitschr., **29** (1929), 696-712.

$\psi_i(x)$, so ersicht man leicht, dass c eine ρ-te Einheitswurzel ist, wo ρ ein Teiler des Grades k_i ist, und dass $\varphi_i(x)$ Polynom von x^ρ ist. Auf der anderen Seite sei $\varphi_i(x)=\psi_j(x)$ für zwei Faktoren c_1, c_2. Dann ist $\varphi_i(x)=\psi_i(x)$ für $c_1c_2^{-1}$, also ist $c_1c_2^{-1}$ eine ρ-te Einheitswurzel. Enthält M alle ρ-te Einheitswurzeln, so kann man jedem Polynom in einer Klasse genau ρ Faktoren $c\varepsilon$ zuordnen, wo ε eine ρ-te Einheitswurzel ist. Nach dieser Überlegung kann man alle Faktoren c bestimmen, worauf ich aber nicht eingehe.

Wir werden nun einen Faktor c festsetzen und die Matrix P konstruieren.

Man kann A in der Form

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_t \end{pmatrix}$$

zerlegen, wo die charakteristische Determinante $|xE_i-A_i|$ von A_i gleich $\varphi_i^{e_i}(x)$ ist. Zerlegt man P dementsprechend, so erhält man

$$P=\begin{pmatrix} P_{11}P_{12}\cdots P_{1t} \\ \vdots \\ P_{t1}P_{t2}\cdots P_{tt} \end{pmatrix}$$

$$P_{rs}A_s=cA_rP_{rs}\,.$$

Durch den Faktor c werden aber die Polynome $\psi_1(x), \ldots, \psi_t(x)$ bestimmt. Ist $\varphi_s(x)\neq\psi_r(x)$, so ist $P_{rs}=0$. Sind die Elementarteiler von A_s gleich $\varphi_s^{e_{1s}}(x), \ldots, \varphi_s^{e_{m_s s}}(x)$, so sind die Elementarteiler von cA_r gleich $\psi_r^{e_{1r}}(x), \ldots, \psi_r^{e_{m_r r}}(x)$. Ist $\varphi_s(x)=\psi_r(x)$, so ist die Anzahl der linear-unabhängigen Matrizen P_{rs} gleich

$$k_s\sum_{i,j}\text{Min.}\,(e_{is}, e_{jr})\,.$$

Daher erhält man:

Satz 1. Die Anzahl der linear-unabhängigen Lösungen P von $PA=cAP$ ist gleich $\sum_{s,r}k_{s,r}\sum_{i,j}\text{Min.}\,(e_{is}, e_{jr})$, wo $k_{s,r}$ gleich dem Grad des grössten gemeinsamen Teiler von $\varphi_s(x)$ und $\psi_r(x)$ ist.

Fasst man die Bestandteile in einer Matrix zusammen, deren charakteristischen Determinanten Potenzen der in einer selben Klasse gehörigen irreduziblen Polynome sind, so mögen man

$$A=\begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_d \end{pmatrix}$$

erhalten. Dann lässt sich jede Matrix P auch in der Form

$$P=\begin{pmatrix} Q_1 & & & \\ & Q_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & Q_d \end{pmatrix}$$

darstellen, wo $Q_iB_i=cB_iQ_i$ ist. Also ist der Multiplikationsbereich Γ direkt zerlegbar, wenn die Anzahl der Klasse grösser als 1 ist. Ist umgekehrt Γ direkt zerlegbar;

$$\Gamma=\begin{pmatrix} \Gamma_1 & 0 \\ 0 & \Gamma_2 \end{pmatrix},$$

so lässt sich A auch in der Form

$$A=\begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & A'' \end{pmatrix}$$

darstellen, also ist die Anzahl der Klasse grösser als 1, wie man leicht nach oben schliessen kann.

Satz 2. Der Multiplikationsbereich Γ ist dann und nur dann direkt zerlegbar, wenn die Anzahl der Klasse der Bestandteile B_i von A grösser als 1 ist. Genauer ist die Anzahl der direkt unzerlegbaren Bestandteile von Γ gleich der Anzahl der Klassen der Bestandteile B_i von A.

Für einen festen Faktor c bilden die sämtlichen Lössungen von $PA=cAP$ ersichtlich einen Modul. Zwei Matrizen P, Q aus Γ heissen addierbar, wenn die Summe $P+Q$ wieder in Γ liegt. Sind P, Q direkt zerlegbar in Bestandteile und sind die entsprechende Bestandteil addierbar, so sind P, Q auch addierbar. Daher beschränken wir uns von jetzt an auf den Fall, dass Γ direkt unzerlegbar ist, also dass die Anzahl d der Bestandteile B_i gleich 1 ist.

Ist die Determinante von A gleich Null, so sind die Eigenwerte von A sämtlich gleich Null, da die Anzahl der Bestandteile B_i gleich 1 ist. Dann ist A zu cA ähnlich für jedes (von Null verschiedenen) c aus M. Daher lässt sich jede Matrix P mit $PA=cAP$ in der Form PU darstellen, wo U mit A vertauschbar ist und die Determinante von P von Null verschieden ist. Stellt man nämlich A in der Normalform dar;

$$A=\begin{pmatrix} c_1 & & & \\ & c_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & c_r \end{pmatrix}, \qquad c_i=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & 1 \dots 0 \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & 1 \\ 0 \dots\dots & & 0 \end{pmatrix},$$

so kann man P in der Form

$$P=\begin{pmatrix} F_1 & & & \\ & F_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & F_r \end{pmatrix}, \qquad F_i=\begin{pmatrix} c^{q-1} & & & & \\ & c^{q-2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & c & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

annehmen.

Daher beschränken wir uns im folgenden auf den fall, dass die Determinante von A von Null verschieden ist.

Satz 3. Zwei von Null verschiedene Matrizen P, R mit $PA=cAP$, $QA=dAQ$ sind dann und nur dann addierbar, wenn $c=d$ ist.

Ist nämlich $(P+Q)A=kA(P+Q)$, so ist ersichtlich

$$(P+Q)A=A(cP+dQ)=A(kP+kQ).$$

Da $|A|\neq 0$ ist, so ist

$$(k-c)P+(k-d)Q=0.$$

Ist $k-c=0$, so ist, da $Q\neq 0$ ist, $k-d=0$, also $k=c=d$. Ist $k-c\neq 0$, so ist $P=-\dfrac{k-d}{k-c}Q$ und folgleich $d=c$, da Q bis auf Faktor aus K mit P übereinstimmt.

Mann kann also den Multiplikationsbereich Γ in Klassen einteilen, so dass die und nur die Matrizen in einer Klasse miteinander addierbar sind. Dann genügten die Matrizen in einer Klasse eine selbe Gleichung $PA=cAP$. Also ist die Anzahl der Klassen in Γ gleich der Anzahl der Faktoren c, die wir früher bestimmt haben.

Für ein vorgegebenes c gibt es dann und nur dann eine Matrix P mit nicht verschwindender Determinante, wenn A zu cA ähnlich ist. Die Gesamtheit der Matrizen P mit nicht verschwinden Determinanten bildet also eine Gruppe $\mathfrak{G}$.

Dann und nur dann ist aber A zu cA ähnlich, wenn $A_1, \dots, A_t$ bis auf Reihenfolge mit $cA_1, \dots, cA_t$ paarweise ähnlich sind. Daher muss c etwa λ-te Einheitswurzel sein, da die Determinante von A von Null verschieden ist. Dann lassen sich $A_1, \dots, A_t$ in Klassen einteilen, so dass eine Klasse aus den Matrizen etwa $A_1, cA_1, \dots, c^{\mu-1}A_1$, besteht, wo μ ein Teiler von λ ist. Nimmt man eine Lösung P von $PA=cAP$ mit nicht verschwindender Determinante an, so hat jede Lösung die Gestalt PU, wo U eine mit A vertauschbare Matrix bedeutet.

Setzt man in der Tat

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & cA_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & c^{\mu-1}A_1 \end{pmatrix}$$

$$P_1A_1=c^{\mu}A_1P_1,$$

so hat man nur

$$P=\begin{pmatrix} 0 & E & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & E \dots 0 \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & E \\ P_1 & 0 & 0 \dots 0 \end{pmatrix}$$

zu setzen. Damit bewiesen ist

Satz L. Die Gesamtheit der mit der Kollineation [A] vertauschbaren Kollineationen mit nicht verschwindenden Determinanten bildet einer Gruppe $\mathfrak{G}$, die einen Normalteiler $\mathfrak{H}$ mit zyklishen Faktorgruppe von der Ordnung μ besitzt, wo $\mathfrak{H}$ aus den Kollineationen [U] besteht, derart dass U mit A vertauschbar ist.