

96. Sätze über ein System von Pfaffschen Ausdrücken in der Mannigfaltigkeit von K -dimensionalen Flächenelementen und ihre Anwendungen.

Von Shisanji HOKARI.

Geometrisches Seminar der Hokkaido Kaiserlichen Universität, Sapporo.

(Comm. by S. KAKIYA, M.I.A., Dec. 12, 1941.)

1. Wir haben in der vorhergehenden Arbeit einige Sätze über ein intrinsikales System von Pfaffschen Ausdrücken in $K_n^{(m)}$ oder $K_n^{*(m)}$ betrachtet¹⁾. Wir können diese Sätze in der Mannigfaltigkeit von K -dimensionalen Flächenelementen übersetzen. Es seien x^i ($i, j, k, \dots = 1, 2, \dots, n$) die Koordinaten eines Punktes in einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit X_n und u^a ($a, \beta, \gamma, \dots = 1, 2, \dots, K$; $K \leq n$) voneinander unabhängige Parameter. Mittels dieser Parameter wird jede K -dimensionale Fläche in X_n durch die Gleichungen $x^i = x^i(u^1, u^2, \dots, u^K)$ gegeben. In jedem Punkte der K -dimensionalen Fläche bestimmt ein Wertesystem der Grössen

$$(1) \quad x^i = x^i(u^a), \quad p_{a(1)}^i \equiv p_{a_1}^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^{a_1}}, \quad \dots, \quad p_{a(m)}^i = p_{a_1 a_2 \dots a_m}^i = \frac{\partial^m x^i}{\partial u^{a_1} \partial u^{a_2} \dots \partial u^{a_m}},$$

welches ein Flächenelement m -ter Ordnung genannt wird. Wenn wir jetzt in jedem Punkte von X_n ein beliebiges Wertesystem $(x^i, p_{a(1)}^i, \dots, p_{a(m)}^i)$

adjungieren, so kommt bekanntlich die $n \binom{m+K}{K}$ -dimensionale Mannigfaltigkeit $F_n^{(m)}$ zustande, die aus allen Wertesystemen $(x^i, p_{a(1)}^i, \dots, p_{a(m)}^i)$ besteht. Wir bezeichnen auch im Folgenden die $F_n^{(m)} \times u$ -Mannigfaltigkeit mit $F_n^{*(m)}$, welche aus allen Wertesystemen $(u^a, x^i, p_{a(1)}^i, \dots, p_{a(m)}^i)$ besteht. So beschäftigen wir uns mit der Untersuchung des Systems von Pfaffschen Ausdrücken

$$(2) \quad Q_{i(s)}^i = \sum_{r=0}^s P_{j\gamma(s)}^{ia(r)} dp_{a(r)}^j + Q_{i(s)a}^i du^a, \quad 0 \leq s \leq m$$

in $F_n^{*(m)}$, wobei die Funktionen $P_{j\gamma(s)}^{ia(r)}$ und $Q_{i(s)a}^i$ Grössen in $F_n^{*(m)}$ und bezüglich $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s$ symmetrisch sind.

2. Die sogenannte intrinsike Theorie im Sinne von E. Bortolotti besagt, dass sie unter den Koordinaten- und Parametertransformationen

$$(3a) \quad x^{i'} = x^{i'}(x^i), \quad (3b) \quad u^{a'} = u^{a'}(u^a)$$

invariant ist. Bei der Parametertransformation (3b) transformiert sich die Grösse $p_{a(r)}^i$ folgendermassen:

$$(4) \quad p_{a'(r)}^{i'} = \sum_{s=1}^r A_{a'(r)}^{a(s)} p_{a(s)}^i,$$

1) S. Hokari, Einige Sätze über ein System von Pfaffschen Ausdrücken und ihre Anwendungen, Proc. **17** (1941), 434-443.

wobei die Koeffizienten $A_{a(r)}^{(s)}$ Polynomen der Ableitungen von u^a nach $u^{a'}$ und durch den folgenden Algorithmus bestimmt werden:

$$(5) \quad A_{a(r)}^{(s)} = \begin{cases} U_{a(r)}^{(a(r))} & \text{für } r=s, \\ A_{a(r-1)}^{(a(r-1))} U_{a_r}^{a_s} + D_{a_r} A_{a(r-1)}^{a_s} & \text{für } r>s>1, \\ U_{a_1 a_2 \dots a_r}^{a_1} & \text{für } s=1. \end{cases}$$

Hier bedeutet D_{a_r} die totale Ableitung in bezug auf u^{a_r} und

$$U_{a'}^a = \frac{\partial u^a}{\partial u^{a'}}, \quad U_{a_1 a_2 \dots a_r}^{a_1} = \frac{\partial^r u^{a_1}}{\partial u^{a_1} \partial u^{a_2} \dots \partial u^{a_r}}, \quad U_{a(r)}^{a(r)} = U_{a_1}^{a_1} U_{a_2}^{a_2} \dots U_{a_r}^{a_r}, \quad \text{usw.}$$

Berücksichtigend die Symmetrie von $p_{a(r)}^i$ bezüglich $a_1, a_2, \dots, a_r$, definieren wir den Operator

$$f_{;i}^{(a(r))} \equiv \frac{\bar{\partial} f}{\bar{\partial} p_{a(r)}^i} = \frac{\nu_1! \nu_2! \dots \nu_s!}{r!} \frac{\partial f}{\partial p_{a(r)}^i},$$

wenn die Indizes $a_1, a_2, \dots, a_r$ aus $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_s$ gleichen Indizes bestehen ($\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_s = r$). So ist z. B. die folgende Schreibweise gestattet:

$$(6) \quad df = \sum_{r \geq 1} f_{;i}^{(a(r))} dp_{a(r)}^i, \quad \frac{\bar{\partial} p_{a_1 a_2 \dots a_r}^{i_1 i_2 \dots i_r}}{\bar{\partial} p_{a_1 a_2 \dots a_r}^{j_1 j_2 \dots j_r}} = \delta_{j_1}^{i_1} \delta_{a_1}^{a'_1} \delta_{a_2}^{a'_2} \dots \delta_{a_r}^{a'_r} = \delta_{j_1}^{i_1} \delta_{a(r)}^{a'(r)}.$$

Wenn die geometrischen Grössen, z. B. $T_{j\beta}^{ia}(u^\nu, x^k, p_{\nu(1)}^k, \dots, p_{\nu(m)}^k)$ und $T_{j'\beta'}^{i'a'}(u^{\nu'}, x^{k'}, p_{\nu'(1)}^{k'}, \dots, p_{\nu'(m)}^{k'})$ unter den beiden Transformationen (3) folgendermassen verbunden werden:

$$T_{j'\beta'}^{i'a'} = T_{j\beta}^{ia} X_i^{i'} X_j^j U_a^{a'} U_{\beta'}^{\beta},$$

so nennen wir $T_{j\beta}^{ia}$ intrinsike Grösse oder genauer intrinsiker gemischter Affinor vierter Stufe, wo $X_i^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}$, $X_j^j = \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}$.

3. Wenn wir ferner den Parameter u^a festhalten und nur die Koordinatentransformation (3a) anwenden, so stellen die Differentiale $dp_{a(r)}^{i'}$ sich in den homogenen Linearformen in bezug auf $dx^i, dp_{a(1)}^i, \dots, dp_{a(r)}^i$ dar, d. h.

$$(7) \quad dp_{a(r)}^{i'} = \sum_{t=0}^r M_j^{i'\beta(t)} dp_{a(r)}^j,$$

wobei $M_j^{i'\beta(t)}$ ein Polynom der Ableitungen von $\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}$ nach u^a ist und durch die rekurrenten Formeln

$$(8) \quad M_j^{i'\beta(t)} = \begin{cases} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} \delta_{a(r)}^{\beta(t)} & \text{für } r=t, \\ M_j^{i'(\beta(t-1))} \delta_{a_r}^{\beta(t)} + D_{a_r} M_j^{i'\beta(t)} & \text{für } r>t>0, \\ D_{a_r} M_j^{i'\beta(t)} & \text{für } t=0 \end{cases}$$

bestimmt wird. Wir können jetzt die folgenden beiden Sätze behaupten, die auf ganz ähnliche Weise wie in Satz 1 und 2 der vorhergehenden Arbeit bewiesen werden.

Satz 1. Damit das System der Pfaffschen Ausdrücke (2) unter der Parametertransformation (3b) intrinsiker Affinor bezüglich $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s$ sei, ist es notwendig und hinreichend, dass deren Koeffizienten $P_{j\gamma(s)}^{ia(r)}$ und $Q_{\gamma(s)a}^i$ die Gleichungen

$$(9) \quad \begin{cases} U_{\gamma(s)}^{\gamma(s)} P_{j\gamma(s)}^{ia(t)} = \sum_{r=t}^s P_{j\gamma(s)}^{ia(r)} A_{a(r)}^{a(t)} & \text{für } t=0, 1, 2, \dots, s, \\ U_{\gamma(s)}^{\gamma(s)} U_a^a Q_{\gamma(s)a}^i = Q_{\gamma(s)a'}^i + \sum_{t=1}^s p_{a(t)}^j \sum_{r=t}^s P_{j\gamma(s)}^{ia(r)} D_{a'} A_{a(r)}^{a(t)} \end{cases}$$

befriedigen, wo $A_{a(r)}^0 = 0$ für $r \geq 1$, $A_0^0 = 1$, $A_{a(r)}^{a(s)} = 0$ für $s > r$ und $A_{a(r)}^{a(s)} = 0$ für $r < 0$.

Satz 2. Notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, dass die Pfaffschen Ausdrücke (2) sich unter der Koordinatentransformation (3a) in derselben Weise wie ein kontravarianter Vektor transformieren, sind, dass die Funktionen $P_{j\gamma(s)}^{ia(t)}$ und $Q_{\gamma(s)a}^i$ die Transformationsformeln

$$(10) \quad \begin{cases} P_{j\gamma(s)}^{ia(t)} = X_{i'}^i \sum_{r=t}^s P_{j'\gamma(s)}^{i'\beta(r)} M_{j\beta(r)}^{j'a(t)} & \text{für } t=0, 1, \dots, s, \\ Q_{\gamma(s)a}^i = X_{i'}^i Q_{\gamma(s)a'}^{i'} \end{cases}$$

haben.

Die obigen Ergebnisse zusammenfassend erreichen wir

Satz 3. Dafür, dass die Pfaffschen Ausdrücke $\mathcal{Q}_{\gamma(s)}^i$ sich in derselben Weise wie Bestimmungszahlen eines intrinsiken gemischten Affinors transformieren, ist es notwendig und hinreichend, dass deren Koeffizienten $P_{j\gamma(s)}^{ia(r)}$ und $Q_{\gamma(s)a}^i$ unter den betreffenden Transformationen (3) folgenden Transformationsformeln haben :

$$(11) \quad \begin{cases} U_{\gamma(s)}^{\gamma(s)} X_{i'}^i P_{j\gamma(s)}^{ia(t)} = \sum_{r=t}^s A_{a(r)}^{a(t)} \sum_{p=r}^s P_{j'\gamma(s)}^{i'\beta(p)} M_{j\beta(p)}^{j'a(r)} & t=0, 1, \dots, s, \\ U_{\gamma(s)}^{\gamma(s)} U_a^a X_{i'}^i Q_{\gamma(s)a}^i = Q_{\gamma(s)a'}^{i'} + \sum_{t=1}^s p_{a(t)}^{j'} \sum_{r=t}^s P_{j'\gamma(s)}^{i'a(r)} D_{a'} A_{a(r)}^{a(t)} \end{cases}$$

4. Wenn die Koeffizienten $P_{j\gamma(s)}^{ia(t)}$ und $Q_{\gamma(s)a}^i$ in $\mathcal{Q}_{\gamma(s)}^i$ unter den betreffenden Transformationen (3) den Beziehung (11) genügen, so sind $\mathcal{Q}_{\gamma(s)}^i$ die Bestimmungszahlen eines intrinsiken Affinors; infolgedessen kann man die intrinsike Grösse

$$(12) \quad \omega_{\gamma(s)a}^i = \mathcal{Q}_{\gamma(s)}^i / du^a = \sum_{t=0}^s P_{j\gamma(s)}^{ia(t)} p_{a(t)}^j + Q_{\gamma(s)a}^i$$

herleiten, die bezüglich $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s$ symmetrisch ist. Um die neuen Pfaffschen Ausdrücke aus den vorgegebenen $\mathcal{Q}_{\gamma(s)}^i$ herzuleiten, nehmen wir an, dass in unserer Mannigfaltigkeit zwei Grössen Γ_{ja}^i und $G_{a\beta}^{\gamma}$ mit der Eigenschaft

$$(13) \quad \begin{cases} U_{\alpha'}^{\alpha} \Gamma_{j'\alpha'}^{i'} = \Gamma_{ja}^i X_{i'}^{j'} - X_{ij}^{i'} X_{j'}^j p_a^j, \\ U_{\gamma'}^{\gamma} G_{\alpha'\beta'}^{\gamma'} = G_{\alpha\beta}^{\gamma} U_{\alpha'}^{\alpha} U_{\beta'}^{\beta} + U_{\alpha'\beta'}^{\gamma} \end{cases}$$

unter den betreffenden Transformationen (3) gegeben seien.

Definieren wir für $0 \leq t \leq s+1 \leq m+1$ die Grössen

$$(14) \quad \begin{cases} P_{j\gamma(s+1)}^{ia(t)} = P_{j(\gamma(s))}^{i(a(t-1))} \delta_{\gamma(s+1)}^{a(t)} + D_{(\gamma(s+1))} P_{|j|\gamma(s)}^{ia(t)} \\ \quad + \Gamma_{k(\gamma(s+1))}^i P_{|j|\gamma(s)}^{ka(t)} - s G_{(\gamma(s+1))}^{\beta} P_{|j|\gamma(s-1)}^{ia(t)\beta}, \\ Q_{\gamma(s+1)\alpha}^i = \Gamma_{k(\gamma(s+1))}^i Q_{\gamma(s)\alpha}^k + D_{(\gamma(s+1))} Q_{\gamma(s)\alpha}^i \\ \quad - G_{\alpha(\gamma(s+1))}^{\beta} \omega_{\gamma(s)\beta}^i - s G_{(\gamma(s+1))}^{\beta} Q_{\gamma(s-1)\beta\alpha}^i, \end{cases}$$

dann ergeben sich die neuen Pfaffschen Ausdrücke bezüglich $dp_{\alpha(s+1)}^i, \dots, dx^i, du^a$

$$(15) \quad \mathcal{Q}_{\gamma(s+1)}^i = \sum_{t=0}^{s+1} P_{j\gamma(s+1)}^{ia(t)} dp_{a(t)}^j + Q_{\gamma(s+1)\alpha}^i du^a.$$

Dabei setzen wir der Kürze halber voraus:

$$(16) \quad P_{j\gamma(s)}^{ia(s+1)} = P_{j\gamma(s)}^{ia(-1)} = 0.$$

Für den speziellen Fall $t=s+1$ erhalten wir aus (14) und (15)

$$(17) \quad P_{j\gamma(s+1)}^{ia(s+1)} = P_{j(\gamma(s))}^{i(a(s))} \delta_{\gamma(s+1)}^{a(s+1)}.$$

Mann erkennt sogleich, dass die Koeffizienten in $\mathcal{Q}_{\gamma(s+1)}^i$ im allgemeinen die in $F_n^{*(m+1)}$ enthaltenden Grössen sind und die Grösse $\mathcal{Q}_{\gamma(s+1)}^i$ symmetrisch in bezug auf $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{s+1}$ ist. Da die Pfaffschen Ausdrücke $\mathcal{Q}_{\gamma(s+1)}^i$ aus den vorgegebenen $\mathcal{Q}_{\gamma(s)}^i$ vermöge (14) hergeleitet werden, wollen wir dies nun einfacher durch die Form

$$(18) \quad \mathcal{Q}_{\gamma(s+1)}^i = \mathfrak{D}_{\gamma(s+1)} \mathcal{Q}_{\gamma(s)}^i$$

bezeichnen.

Wir betrachten nun die Eigenschaft der oben-definierten Pfaffschen Ausdrücke $\mathcal{Q}_{\gamma(s+1)}^i$. Wenn man erstens die Parametertransformation (3b) festhält und nur die Koordinatentransformation anwendet, so entstehen aus (13) für die Grössen Γ_{ja}^i und $G_{\alpha\beta}^{\gamma}$

$$\Gamma_{j'a}^{i'} = \Gamma_{ja}^i X_{i'}^{j'} - X_{ij}^{i'} X_{j'}^j p_a^j, \quad G_{\alpha\beta}^{\gamma} = G_{\alpha\beta}^{\gamma} (= \text{Inv}).$$

Deshalb erhalten wir wegen (10) und (14)

$$(19) \quad \begin{aligned} Q_{\gamma(s+1)\alpha}^i &= (\Gamma_{k'(\gamma(s+1))}^{i'} X_{|i'|}^{k'} X_{k'}^j - X_{i'j'}^{i'} X_{j'}^k p_{(\gamma(s+1))}^k) Q_{\gamma(s)\alpha}^{l'} + X_{l'm'}^{i'} p_{(\gamma(s+1))}^{m'} Q_{\gamma(s)\alpha}^{l'} \\ &\quad + X_{l'}^{i'} D_{(\gamma(s+1))} Q_{\gamma(s)\alpha}^{l'} - X_{i'}^{i'} G_{\alpha(\gamma(s+1))}^{\beta} \omega_{\gamma(s)\beta}^{i'} - s X_{i'}^{i'} G_{(\gamma(s+1))}^{\beta} Q_{\gamma(s-1)\beta\alpha}^{i'} \\ &= X_{i'}^{i'} Q_{\gamma(s+1)\alpha}^{i'}; \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
P_{j\tau(s+1)}^{ia(t)} &= X_{i'}^i \sum_{r=t-1}^s P_{j'\tau(s)}^{i'\beta(r)} M_{|j\beta(r)|}^{j'(a(t-1))} \delta_{\tau s+1}^{a_t} + X_{i'j'}^i p_{\tau s+1}^{j'} \sum_{r=t}^s P_{|m'|\tau(s)}^{i'\beta(r)} M_{j\beta(r)}^{m'a(t)} \\
&\quad + X_{i'}^i \sum_{r=t}^s D_{(\tau s+1)} P_{|j'|\tau(s)}^{i'\beta(r)} M_{j\beta(r)}^{j'a(t)} + X_{i'}^i \sum_{r=t}^s P_{j'\tau(s)}^{i'\beta(r)} D_{\tau s+1} M_{j\beta(r)}^{j'a(t)} \\
&\quad + (I_{k'(\tau s+1)}^{i'} X_{i'}^i X_{k'}^{k'} - X_{i'j'}^i X_{k'}^{k'} p_{\tau s+1}^{j'}) X_{|l'|}^k \sum_{r=t}^s P_{m'|\tau(s)}^{i'\beta(r)} M_{j\beta(r)}^{m'a(t)} \\
&\quad - s G_{(\tau s+1)}^\beta X_{i'}^i \sum_{r=t}^s P_{|j'|\tau(s-1)}^{i'\beta(r)} \beta M_{j\beta(r)}^{j'a(t)} \\
&= X_{i'}^i \left\{ \sum_{r=t-1}^s P_{j'\tau(s)}^{i'\beta(r)} M_{|j\beta(r)|}^{j'(a(t-1))} \delta_{\tau s+1}^{a_t} + \sum_{r=t}^s D_{(\tau s+1)} P_{|j'|\tau(s)}^{i'\beta(r)} M_{j\beta(r)}^{j'a(t)} \right. \\
&\quad + \sum_{r=t}^s P_{j'\tau(s)}^{i'\beta(r)} D_{\tau s+1} M_{j\beta(r)}^{j'a(t)} + I_{k'(\tau s+1)}^{i'} \sum_{r=t}^s P_{|l'|\tau(s)}^{i'\beta(r)} M_{j\beta(r)}^{l'a(t)} \\
&\quad \left. - s G_{(\tau s+1)}^\beta \sum_{r=t}^s P_{|j'|\tau(s-1)}^{i'\beta(r)} \beta M_{j\beta(r)}^{j'a(t)} \right\}.
\end{aligned}$$

Da $D_{\tau s+1} M_{j\beta(r)}^{j'a(t)} = M_{j\beta(r)\tau s+1}^{j'a(t)} - M_{j\beta(r)}^{j'(a(t-1))} \delta_{\tau s+1}^{a_t}$ sind, so folgt

$$\begin{aligned}
(20) \quad P_{j\tau(s+1)}^{ia(t)} &= X_{i'}^i \left\{ \sum_{r=t-1}^s P_{j'\tau(s)}^{i'\beta(r)} M_{|j\beta(r)|}^{j'(a(t-1))} \delta_{\tau s+1}^{a_t} + \sum_{r=t}^s D_{(\tau s+1)} P_{|j'|\tau(s)}^{i'\beta(r)} \cdot M_{j\beta(r)}^{j'a(t)} \right. \\
&\quad + \sum_{r=t}^s P_{j'\tau(s)}^{i'\beta(r)} M_{j\beta(r)\tau s+1}^{j'a(t)} - \sum_{r=t}^s P_{j'\tau(s)}^{i'\beta(r)} M_{|j\beta(r)|}^{j'(a(t-1))} \delta_{\tau s+1}^{a_t} \\
&\quad + I_{k'(\tau s+1)}^{i'} \sum_{r=t}^s P_{|l'|\tau(s)}^{i'\beta(r)} M_{j\beta(r)}^{l'a(t)} - s G_{(\tau s+1)}^\beta \sum_{r=t}^s P_{|j'|\tau(s-1)}^{i'\beta(r)} \beta M_{j\beta(r)}^{j'a(t)} \left. \right\} \\
&= X_{i'}^i \left\{ P_{j'\tau(s)}^{i'\beta(t-1)} M_{|j\beta(t-1)|}^{j'(a(t-1))} \delta_{\tau s+1}^{a_t} + \sum_{r=t+1}^{s+1} P_{j'\tau(s)}^{i'\beta(r-1)} M_{|j\beta(r-1)|}^{j'a(t)} \right. \\
&\quad + \sum_{r=t}^s \left[D_{(\tau s+1)} P_{|j'|\tau(s)}^{i'\beta(r)} + I_{k'(\tau s+1)}^{i'} P_{|j'|\tau(s)}^{k'\beta(r)} \right. \\
&\quad \left. - s G_{(\tau s+1)}^\beta P_{|j'|\tau(s-1)}^{i'\beta(r)} \beta \right] M_{j\beta(r)}^{j'a(t)} \left. \right\} \\
&= X_{i'}^i \left\{ P_{j'\tau(s)}^{i'\beta(s)} M_{|j\beta(s)|}^{j'a(t)} + \sum_{r=t}^s \left[P_{j'\tau(s)}^{i'\beta(r-1)} \delta_{\tau s+1}^{a_t} + D_{(\tau s+1)} P_{|j'|\tau(s)}^{i'\beta(r)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + I_{k'(\tau s+1)}^{i'} P_{|j'|\tau(s)}^{k'\beta(r)} - s G_{(\tau s+1)}^\beta P_{|j'|\tau(s-1)}^{i'\beta(r)} \beta \right] M_{j\beta(r)}^{j'a(t)} \right\} \\
&= X_{i'}^i \left\{ P_{j'\tau(s+1)}^{i'\beta(s+1)} M_{j\beta(s+1)}^{j'a(t)} + \sum_{r=t}^s P_{j'\tau(s+1)}^{i'\beta(r)} M_{j\beta(r)}^{j'a(t)} \right\} \\
&= X_{i'}^i \sum_{r=t}^{s+1} P_{j'\tau(s+1)}^{i'\beta(r)} M_{j\beta(r)}^{j'a(t)}.
\end{aligned}$$

Aus (19) und (20) können wir wegen Satz 2 schliessen, dass die Pfaffschen Ausdrücke $\mathcal{Q}_{i(s+1)}^i$ die Bestimmungszahlen eines kontravarianten Vektors bezüglich i sind.

5. Wir betrachten zweitens die Eigenschaft von $\mathcal{Q}_{i(s+1)}^i$ unter der Parametertransformation (3b), indem wir das Koordinatensystem festhalten. In diesem Falle verwandeln sich die Grössen Γ_{ja}^i und $G_{a\beta}^i$ folgendermassen:

$$(21) \quad \Gamma_{ja'}^i = \Gamma_{ja}^i U_{a'}^a, \quad U_{\gamma'}^r G_{a'\beta'}^r = G_{a\beta}^r U_{a'}^a U_{\beta'}^{\beta} + U_{a'\beta'}^r.$$

Dann ergibt sich wegen (9), (14) und (21)

$$\begin{aligned} P_{j\gamma(s+1)}^{ia(t)} &= U_{\gamma(s)}^{\gamma(s)} \sum_{r=t-1}^s P_{j\gamma(s)}^{ia(r)} A_{|a'(r)|}^{(a(t-1))} \delta_{\gamma(s+1)}^{|a'_t|} U_{a'_t}^{a_t} U_{\gamma(s+1)}^{\gamma(s+1)} \\ &+ U_{\gamma(s+1)}^{\gamma(s+1)} \sum_{r=t}^s D_{(\gamma'_{s+1})} P_{|j|\gamma(s)}^{ia(r)} \cdot A_{a'(r)}^{a(t)} + U_{\gamma(s+1)}^{\gamma(s+1)} \sum_{r=t}^s P_{j\gamma(s)}^{ia(r)} A_{|a'(r)|\gamma'_{s+1}}^{a(t)} \\ &+ D_{(\gamma_{s+1})} U_{\gamma(s)}^{\gamma(s)} \cdot \sum_{r=t}^s P_{j\gamma(s)}^{ia(r)} A_{a'(r)}^{a(t)} + \Gamma_{k(\gamma'_{s+1})}^i U_{\gamma(s+1)}^{\gamma(s+1)} U_{\gamma(s)}^{\gamma(s)} \sum_{r=t}^s P_{j|\gamma(s)}^{ka(r)} A_{a'(r)}^{a(t)} \\ &- s(G_{\gamma'_s \gamma'_{s+1}}^{\beta'} U_{\gamma_s}^{\gamma_s} U_{\gamma_{s+1}}^{\gamma_{s+1}} + U_{\gamma_s \gamma_{s+1}}^{\beta'}) U_{\gamma(s-1)}^{\gamma(s-1)} U_{\beta'}^{\beta'} \sum_{r=t}^s P_{j\gamma(s-1)}^{ia(r)} \delta' A_{a'(r)}^{a(t)} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} (22) \quad U_{\gamma(s+1)}^{\gamma(s+1)} P_{j\gamma(s+1)}^{ia(t)} &= \sum_{r=t-1}^s P_{j\gamma(s)}^{ia(r)} \delta_{\gamma'_{s+1}}^{a'_t} A_{a'(r)}^{(a(t-1))} U_{a'_t}^{a_t} + \sum_{r=t}^s D_{(\gamma'_{s+1})} P_{|j|\gamma(s)}^{ia(r)} \cdot A_{a'(r)}^{a(t)} \\ &+ \sum_{r=t}^s P_{j\gamma(s)}^{ia(r)} A_{|a'(r)|\gamma'_{s+1}}^{a(t)} + \Gamma_{k(\gamma'_{s+1})}^i \sum_{r=t}^s P_{|j|\gamma(s)}^{ka(r)} A_{a'(r)}^{a(t)} \\ &- s G_{(\gamma'_s \gamma'_{s+1})}^{\beta'} \sum_{r=t}^s P_{j\gamma(s-1)}^{ia(r)} A_{a'(r)}^{a(t)} \\ &= \sum_{r=t}^s P_{j\gamma(s)}^{ia(r)} \delta_{\gamma'_{s+1}}^{a'_t} A_{a'(r)}^{(a(t-1))} U_{a'_t}^{a_t} + P_{j\gamma(s)}^{ia(t-1)} \delta_{\gamma'_{s+1}}^{a'_t} U_{a'_t}^{a_t} \\ &+ \sum_{r=t}^s \left\{ D_{(\gamma'_{s+1})} P_{|j|\gamma(s)}^{ia(r)} + \Gamma_{k(\gamma'_{s+1})}^i P_{|j|\gamma(s)}^{ka(r)} - s G_{\gamma'_s \gamma'_{s+1}}^{\beta'} P_{|j|\gamma(s-1)}^{ia(r)} \delta' \right\} A_{a'(r)}^{a(t)} \\ &+ \sum_{r=t}^s P_{j\gamma(s)}^{ia(r)} (A_{|a'(r)|\gamma'_{s+1}}^{a(t)} - A_{|a'(r)|}^{(a(t-1))} U_{\gamma'_{s+1}}^{a_t}) \\ &= \sum_{r=t+1}^{s+1} P_{j\gamma(s)}^{ia(r-1)} \delta_{\gamma'_{s+1}}^{a'_r} A_{a'(r)}^{a(t)} + \sum_{r=t}^s \left\{ D_{(\gamma'_{s+1})} P_{|j|\gamma(s)}^{ia(r)} + \Gamma_{k(\gamma'_{s+1})}^i P_{|j|\gamma(s)}^{ka(r)} \right. \\ &\quad \left. - s G_{\gamma'_s \gamma'_{s+1}}^{\beta'} P_{|j|\gamma(s-1)}^{ia(r)} \delta' \right\} A_{a'(r)}^{a(t)} + P_{j\gamma(s)}^{ia(t-1)} \delta_{\gamma'_{s+1}}^{a'_t} U_{a'_t}^{a_t} \\ &= \sum_{r=t}^{s+1} P_{j\gamma(s+1)}^{ia(r)} A_{a'(r)}^{a(t)}. \end{aligned}$$

Die Grössen $P_{j\gamma(s+1)}^{ia(t)}$ haben also die Transformationsformeln ganz analog wie $P_{j\gamma(s)}^{ia(t)}$ in $\mathcal{Q}_{\gamma(s)}^i$. Für die Grössen $Q_{\gamma(s+1)a}^i$ können wir auch wegen (9), (14) und (21) berechnen:

$$\begin{aligned} Q_{\gamma(s+1)a}^i &= \Gamma_{j\gamma'_{s+1}}^i U_{\gamma(s+1)}^{\gamma(s+1)} U_{\gamma(s)}^{\gamma(s)} U_{a'}^a \left\{ Q_{\gamma(s)a'}^i + \sum_{t=1}^s p_{a(t)}^k \sum_{r=t}^s P_{k\gamma(s)}^{ja(r)} D_{a'} A_{a'(r)}^{a(t)} \right\} \\ &+ U_{\gamma(s+1)}^{\gamma(s+1)} U_{a'}^a \left\{ D_{(\gamma'_{s+1})} Q_{\gamma(s)a'}^i + \sum_{t=1}^s p_{a(t)}^j \sum_{r=t}^s D_{(\gamma'_{s+1})} P_{|j|\gamma(s)}^{ia(r)} \cdot D_{a'} A_{a'(r)}^{a(t)} \right. \\ &+ \sum_{t=1}^s p_{a(t)}^j \sum_{r=t}^s P_{j\gamma(s)}^{ia(r)} D_{\gamma'_{s+1}} D_{a'} A_{a'(r)}^{a(t)} \left. \right\} \\ &+ U_{\gamma(s)}^{\gamma(s)} U_{a'}^a \sum_{t=1}^s p_{a(t)|\gamma_{s+1}}^j \sum_{r=t}^s P_{j\gamma(s)}^{ia(r)} D_{a'} A_{a'(r)}^{a(t)} \\ &+ D_{(\gamma_{s+1})} U_{\gamma(s)}^{\gamma(s)} \cdot U_{a'}^a \left\{ Q_{\gamma(s)a'}^i + \sum_{t=1}^s p_{a(t)}^j \sum_{r=t}^s P_{j\gamma(s)}^{ia(r)} D_{a'} A_{a'(r)}^{a(t)} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + U_{(\gamma(s))}^{\gamma(s)} U_{(\gamma(s+1))}^{\alpha'} \left\{ Q_{(\gamma(s))}^i \alpha' + \sum_{t=1}^s p_{\alpha(t)}^j \sum_{r=t}^s P_{j\gamma(s)}^{i\alpha'(r)} D_{\alpha'} A_{\alpha(r)}^{\alpha(t)} \right\} \\
& - (G_{\alpha'(\gamma(s+1))}^{\delta'} U_{\alpha'}^{\alpha'} U_{(\gamma(s+1))}^{\gamma(s+1)} + U_{\alpha'(\gamma(s+1))}^{\delta'} U_{|\delta'|}^{\beta'} U_{(\gamma(s))}^{\gamma(s)} U_{\beta'}^{\beta'} \omega_{(\gamma(s))}^{\gamma(s)\beta'}) \\
& - s (G_{\gamma(s)}^{\delta'} U_{(\gamma(s))}^{\gamma(s)} U_{(\gamma(s+1))}^{\gamma(s+1)} + U_{(\gamma(s)\gamma(s+1))}^{\delta'}) U_{(\gamma(s-1))}^{\gamma(s-1)} U_{\alpha'}^{\alpha'} \left\{ Q_{(\gamma(s-1))}^i \delta' \alpha' \right. \\
& \left. + \sum_{t=1}^s p_{\alpha(t)}^j \sum_{r=t}^s P_{j\gamma(s-1)}^{i\alpha'(r)} D_{\alpha'} A_{\alpha(r)}^{\alpha(t)} \right\} \\
& = U_{(\gamma(s+1))}^{\gamma(s+1)} U_{\alpha'}^{\alpha'} Q_{(\gamma(s+1))}^i \alpha' + U_{(\gamma(s+1))}^{\gamma(s+1)} U_{\alpha'}^{\alpha'} \left\{ \Gamma_{j\gamma(s+1)}^i \sum_{t=1}^s p_{\alpha(t)}^k \sum_{r=t}^s P_{k|\gamma(s)}^{j\alpha'(r)} D_{\alpha'} A_{\alpha(r)}^{\alpha(t)} \right. \\
& + \sum_{t=1}^s p_{\alpha(t)}^j \sum_{r=t}^s D_{(\gamma(s+1))} P_{|j|\gamma(s)}^{i\alpha'(r)} \cdot D_{\alpha'} A_{\alpha(r)}^{\alpha(t)} \\
& + \sum_{t=1}^s p_{\alpha(t)}^j \sum_{r=t}^s P_{j(\gamma(s))}^{i\alpha'(r)} D_{\gamma(s+1)} D_{\alpha'} A_{\gamma(r)}^{\alpha(t)} \\
& + \sum_{t=1}^s p_{\alpha(t)}^j \sum_{r=t}^s U_{(\gamma(s+1))}^{\alpha_{t+1}} \sum_{r=t}^s P_{|j|\gamma(s)}^{i\alpha'(r)} D_{\alpha'} A_{\alpha(r)}^{\alpha(t)} \\
& \left. - s G_{(\gamma(s)\gamma(s+1))}^{\delta'} \sum_{t=1}^s p_{\alpha(t)}^j \sum_{r=t}^s P_{j|\gamma(s-1)}^{i\alpha'(r)} \delta' D_{\alpha'} A_{\alpha(r)}^{\alpha(t)} \right\} \\
& + U_{(\gamma(s+1))}^{\gamma(s+1)} \left\{ - U_{\beta'}^{\beta'} U_{\beta'(\gamma(s+1))}^{\beta'} U_{\alpha'}^{\alpha'} \sum_{t=1}^s p_{\alpha(t)}^j \sum_{r=t}^s P_{j|\gamma(s)}^{i\alpha'(r)} D_{\alpha'} A_{\alpha(r)}^{\alpha(t)} \right. \\
& \left. + U_{\delta'}^{\delta'} U_{\beta'(\gamma(s+1))}^{\delta'} U_{\alpha'}^{\alpha'} \sum_{t=0}^s P_{j|\gamma(s)}^{i\alpha'(t)} p_{\alpha'(t)}^j \delta' \right\}.
\end{aligned}$$

Multiplizieren wir den beiden Seiten $U_{\sigma(s+1)}^{\gamma(s+1)} U_{\rho'}^{\alpha'}$ und umschreiben für $\sigma'_{(s+1)}$ bzw. ρ' mit $\gamma'_{(s+1)}$ bzw. α' , so ergibt sich

$$\begin{aligned}
U_{(\gamma(s+1))}^{\gamma(s+1)} U_{\alpha'}^{\alpha'} Q_{(\gamma(s+1))}^i \alpha' & = Q_{(\gamma(s+1))}^i \alpha' + \sum_{t=1}^s p_{\alpha(t)}^j \sum_{r=t}^s P_{j\gamma(s+1)}^{i\alpha'(r)} D_{\alpha'} A_{\alpha(r)}^{\alpha(t)} \\
& - \sum_{t=1}^s p_{\alpha(t)}^j \sum_{r=t}^s P_{j(\gamma(s))}^{i\alpha'(r-1)} \delta_{\gamma(s+1)}^{\alpha'} D_{\alpha'} A_{\alpha(r)}^{\alpha(t)} \\
& + \sum_{t=1}^s p_{\alpha(t)}^j \sum_{r=t}^s P_{j(\gamma(s))}^{i\alpha'(r)} D_{\gamma(s+1)} D_{\alpha'} A_{\alpha(r)}^{\alpha(t)} \\
& + \sum_{t=1}^s p_{\alpha(t+1)}^j \sum_{r=t}^s U_{(\gamma(s+1))}^{\alpha_{t+1}} P_{|j|\gamma(s)}^{i\alpha'(r)} D_{\alpha'} A_{\alpha(r)}^{\alpha(t)} \\
& - U_{\beta'}^{\beta'} U_{\alpha'(\gamma(s+1))}^{\beta'} \sum_{t=1}^s p_{\alpha(t)}^j \sum_{r=t}^s P_{j|\gamma(s)}^{i\alpha'(r)} D_{\beta'} A_{\alpha(r)}^{\alpha(t)} \\
& + U_{\delta'}^{\delta'} U_{\alpha'(\gamma(s+1))}^{\delta'} \sum_{t=0}^s P_{|j|\gamma(s)}^{i\alpha'(t)} p_{\alpha'(t)}^j \delta' \\
& = Q_{(\gamma(s+1))}^i \alpha' + \sum_{t=1}^{s+1} p_{\alpha(t)}^j \sum_{r=t}^{s+1} P_{j\gamma(s+1)}^{i\alpha'(r)} D_{\alpha'} A_{\alpha(r)}^{\alpha(t)} + R_{(\gamma(s+1))}^i \alpha'.
\end{aligned}$$

wobei gesetzt sind :

$$\begin{aligned}
R_{(\gamma(s+1))}^i \alpha' & = - p_{\alpha(s+1)}^j P_{j\gamma(s+1)}^{i\alpha'(s+1)} D_{\alpha'} A_{\alpha(s+1)}^{\alpha(s+1)} - \sum_{t=1}^s p_{\alpha(t)}^j P_{j\gamma(s+1)}^{i\alpha'(s+1)} D_{\alpha'} A_{\alpha(s+1)}^{\alpha(t)} \\
& - \sum_{t=1}^s p_{\alpha(t)}^j \sum_{r=t}^s P_{j(\gamma(s))}^{i\alpha'(r-1)} \delta_{\gamma(s+1)}^{\alpha'} D_{\alpha'} A_{\alpha(r)}^{\alpha(t)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{t=1}^s p_{a(t)}^j \sum_{r=t}^s P_{j(\gamma(s)}^{ia'(r)} D_{\gamma'_{s+1}} D_{a'} A_{a(r)}^{a(t)} \\
& + \sum_{t=2}^s p_{a(t)}^j \sum_{r=t-1}^s U_{(\gamma'_{s+1}}^{a_t} P_{|j|\gamma(s)}^{ia'(r)} D_{a'} A_{a(r)}^{a(t-1)} + p_{a(s+1)}^j U_{(\gamma'_{s+1}}^{a_{s+1}} P_{|j|\gamma(s)}^{ia'(r)} D_{a'} A_{a(s)}^{a(s)} \\
& - \sum_{t=1}^s p_{a(t)}^j \sum_{r=t}^s U_{\beta'}^{\beta'} U_{a'(\gamma'_{s+1}}^{\beta} P_{|j|\gamma(s)}^{ia'(r)} D_{\beta'} A_{a(r)}^{a(t)} \\
& + p_{a(s+1)}^j P_{j(\gamma(s)}^{ia'(s)} U_{\gamma'_{s+1}}^{\delta} A_{a(s)\delta'}^{a(s+1)} U_{\delta'}^{\delta'} \\
& + \sum_{t=1}^s p_{a(t)}^j \sum_{r=t-1}^s P_{j(\gamma(s)}^{ia'(r)} U_{\gamma'_{s+1}}^{\delta} A_{a(r)\delta'}^{a(t)} U_{\delta'}^{\delta'} .
\end{aligned}$$

Wir können mit Hilfe von (5) beweisen, dass die Grösse $R_{\gamma'_{s+1}a'}^i$ identisch verschwindet ; d. h.

$$\begin{aligned}
R_{\gamma'_{s+1}a'}^i & = p_{a(s+1)}^j \left\{ -P_{j(\gamma(s)}^{ia'(s)} \delta_{\gamma'_{s+1}}^{a'_{s+1}} D_{a'} A_{a(s+1)}^{a(s+1)} + P_{j(\gamma(s)}^{ia'(s)} \delta_{\gamma'_{s+1}}^{a'_{s+1}} U_{a'_{s+1}}^{a_{s+1}} D_{a'} A_{a(s)}^{a(s)} \right. \\
& \quad \left. + P_{j(\gamma(s)}^{ia'(s)} \delta_{\gamma'_{s+1}}^{a'_{s+1}} U_{a'_{s+1}a'}^{\delta} U_{\delta'}^{\delta'} A_{a(s)\delta'}^{a(s+1)} \right\} \\
& + \sum_{t=2}^s p_{a(t)}^j \left\{ \sum_{r=t}^s P_{j(\gamma(s)}^{ia'(r)} D_{\gamma'_{s+1}} D_{a'} A_{a(r)}^{a(t)} + \sum_{r=t-1}^s U_{(\gamma'_{s+1}}^{a_t} P_{|j|\gamma(s)}^{ia'(r)} D_{a'} A_{a(r)}^{a(t-1)} \right. \\
& \quad - \sum_{r=t}^s U_{\beta'}^{\beta'} U_{a'(\gamma'_{s+1}}^{\beta} P_{|j|\gamma(s)}^{ia'(r)} D_{\beta'} A_{a(r)}^{a(t)} - P_{j(\gamma'_{s+1})}^{ia'(s+1)} D_{a'} A_{a(s+1)}^{a(t)} \\
& \quad \left. + \sum_{r=t-1}^s P_{j(\gamma(s)}^{ia'(r)} U_{\gamma'_{s+1}}^{\delta} A_{a(r)\delta'}^{a(t)} U_{\delta'}^{\delta'} - \sum_{r=t}^s P_{j(\gamma(s)}^{ia'(r-1)} \delta_{\gamma'_{s+1}}^{a'_r} D_{a'} A_{a(r)}^{a(t)} \right\} \\
& + p_a^j \left\{ -P_{j(\gamma'_{s+1})}^{ia'(s+1)} D_{a'} A_{a(s+1)}^{a(s+1)} - \sum_{r=1}^s P_{j(\gamma(s)}^{ia'(r-1)} \delta_{\gamma'_{s+1}}^{a'_r} D_{a'} A_{a(r)}^{a(s)} \right. \\
& \quad + \sum_{r=1}^s P_{j(\gamma(s)}^{ia'(r)} D_{\gamma'_{s+1}} D_{a'} A_{a(r)}^{a(s)} - \sum_{r=1}^s U_{\beta'}^{\beta'} U_{a'(\gamma'_{s+1}}^{\beta} P_{|j|\gamma(s)}^{ia'(r)} D_{\beta'} A_{a(r)}^{a(s)} \\
& \quad \left. + \sum_{r=0}^s P_{j(\gamma(s)}^{ia'(r)} U_{\gamma'_{s+1}}^{\delta} A_{a(r)\delta'}^{a(s)} U_{\delta'}^{\delta'} \right\} \\
& = \sum_{t=2}^s p_{a(t)}^j \left\{ \sum_{r=t}^{s-1} P_{j(\gamma(s)}^{ia'(r)} \delta_{\gamma'_{s+1}}^{\beta'} (D_{\beta'} D_{a'} A_{a(r)}^{a(t)} + U_{\beta'}^{a_t} D_{a'} A_{a(r)}^{a(t-1)} \right. \\
& \quad - U_{\beta'}^{\gamma'} U_{a'_{\beta'}}^{\beta} D_{\gamma'} A_{a(r)}^{a(t)} + U_{\beta' a'}^{\delta} U_{\delta'}^{\delta'} A_{a(r)\delta'}^{a(t)} - D_{a'} A_{a(r)\beta'}^{a(t)} \\
& \quad + P_{j(\gamma(s)}^{ia'(s)} \delta_{\gamma'_{s+1}}^{\beta'} (D_{\beta'} D_{a'} A_{a(s)}^{a(t)} + U_{\beta'}^{a_t} D_{a'} A_{a(s)}^{a(t-1)} - U_{\beta'}^{\gamma'} U_{a'_{\beta'}}^{\beta} D_{\gamma'} A_{a(s)}^{a(t)} \\
& \quad - D_{a'} A_{a(s)\beta'}^{a(t)} + U_{a'_{\beta'}}^{\delta} U_{\delta'}^{\delta'} A_{a(s)\delta'}^{a(t)} + P_{j(\gamma(s)}^{ia'(t-1)} \delta_{\gamma'_{s+1}}^{\beta'} (U_{\beta'}^{a_t} D_{a'} A_{a(t-1)}^{a(t-1)} \\
& \quad + U_{\beta' a'}^{\delta} U_{\delta'}^{\delta'} A_{a(t-1)\delta'}^{a(t)} - D_{a'} A_{a(t-1)\beta'}^{a(t)} \left. \right\} + p_a^j \left\{ \sum_{r=1}^{s-1} P_{j(\gamma(s)}^{ia'(r)} \delta_{\gamma'_{s+1}}^{\beta'} \right. \\
& \quad \times (-D_{a'} A_{a(r)\beta'}^{a(s)} + D_{\beta'} D_{a'} A_{a(r)}^{a(s)} - U_{\beta'}^{\gamma'} U_{a'_{\beta'}}^{\beta} D_{\gamma'} A_{a(r)}^{a(s)} + U_{a'_{\beta'}}^{\delta} U_{\delta'}^{\delta'} A_{a(r)\delta'}^{a(s)} \\
& \quad + P_{j(\gamma(s)}^{ia'(s)} \delta_{\gamma'_{s+1}}^{a'_{s+1}} (-D_{a'} A_{a(s+1)}^{a(s)} + D_{a'_{s+1}} D_{a'} A_{a(s)}^{a(s)} - U_{\beta'}^{\gamma'} U_{a'_{a'_{s+1}}}^{\beta} D_{\gamma'} A_{a(s)}^{a(s)} \\
& \quad + U_{a'_{s+1}a'}^{\delta} U_{\delta'}^{\delta'} A_{a(s)\delta'}^{a(s)} + P_{j(\gamma(s)}^{ia'(s)} \delta_{\gamma'_{s+1}}^{\beta'} (-D_{a'} A_{a(s)\beta'}^{a(s)} + U_{\beta' a'}^{\delta} U_{\delta'}^{\delta'} U_{\delta'}^{\delta'})) \left. \right\} \\
& = 0 .
\end{aligned}$$

Die durch (14) definierten Grössen $P_{j\tau(s+1)}^{ia(t)}$ bzw. $Q_{\tau(s+1)^a}^i$ haben also unter der Parametertransformation (3b) dieselbe Eigenschaft wie $P_{j\tau(s)}^{ia(t)}$ bzw. $Q_{\tau(s)^a}^i$ in $\mathcal{Q}_{\tau(s)}^i$; deshalb können wir wegen Satz 1 und 2 schliessen, dass die Grösse $\mathcal{Q}_{\tau(s+1)}^i$ nicht nur in bezug auf i kontravariant sondern auch in bezug auf $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{s+1}$ kovariant ist; mit anderen Worten sind $\mathcal{Q}_{\tau(s+1)}^i$ die Bestimmungszahlen eines gemischten Affinors $(s+2)$ -ter Stufe. Die obigen Ergebnisse zusammenfassend erreichen wir

Satz 4. Sind die Pfaffschen Ausdrücke (2), welche in $F_n^{*(m)}$ enthalten sind, in bezug auf i bzw. $\tau(s)$ kontravariant bzw. kovariant, so bestimmen sich die in $F_n^{*(m+1)}$ enthaltenden neuen Pfaffschen Ausdrücke (15), die sich unter den betreffenden Transformationen (3) wie ein intrinsiker gemischter Affinor transformieren, wenn zwei Grössen Γ_{ja}^i und $G_{a\beta}^r$ mit den Transformationsformeln (13) gegeben werden.

6. Die Geometrie des Systems der partiellen Differentialgleichungen m -ter Ordnung ist kürzlich vom Verfasser behandelt worden¹⁾; aber das zugehörige vollständige System der Pseudo-Differentialkomitanten ist nicht hergeleitet worden. Um dies zu erhalten, müssen wir die sogenannten Grundübertragungen definieren. Als Anwendung des obigen Satzes wollen wir hier die Grundübertragungen zeigen. Wir ziehen das System der partiellen Differentialgleichungen m -ter Ordnung

$$(23) \quad p_{a(m)}^i + H_{a(m)}^i(u^r, x^k, p_{r(1)}^k, \dots, p_{r(m-1)}^k) = 0$$

in Betracht, wo die Funktionen $H_{a(m)}^i$ in bezug auf $a_1, a_2, \dots, a_m$ symmetrisch sind. Da die Funktionen $H_{a(m)}^i$ von $u^r, x^k, p_{r(1)}^k, \dots, p_{r(m-1)}^k$ abhängen, so ist unsere Mannigfaltigkeit die oben erklärte Mannigfaltigkeit $F_n^{*(m-1)}$. Wenn es einen intrinsiken symmetrischen Affinor $h_{a\beta}^{(m)}$ in $F_n^{*(m-1)}$ gibt und bei dem die Matrix $((h_{a\beta}^{(m)}))$ den höchsten Rang K hat, so bestimmt sich in $F_n^{*(m-1)}$ eine intrinsike Übertragung längs der Integralhyperfläche von (23); anders gesagt: Wir erhalten die zwei Übertragungsparameter Γ_{ja}^i und $G_{a\beta}^r$ aus $h_{a\beta}^{(m)}$ und $H_{a(m)}^i$.

Wir gehen von den speziellen Ausdrücken dx^i aus, und erhalten mit Hilfe von Satz 4 sukzessiv die folgenden intrinsiken Systeme der Pfaffschen Ausdrücke

$$(24) \quad \mathcal{Q}^i = dx^i, \quad \mathcal{Q}_{\tau(s)}^i = \mathfrak{D}_{\tau_s} \mathcal{Q}_{\tau(s-1)}^i, \quad s = 2, 3, \dots, m-1.$$

Diese Pfaffschen Ausdrücke $\mathcal{Q}_{\tau(s)}^i$ sind wegen $P_{j\tau(s)}^{ia(s)} = \delta_j^i \delta_{\tau(s)}^{a(s)}$ von der Gestalt

$$(25) \quad \mathcal{Q}_{\tau(s)}^i = dp_{\tau(s)}^i + \sum_{t=0}^{s-1} P_{j\tau(s)}^{ia(t)} dp_{a(t)}^j + Q_{\tau(s)^a}^i du^a, \quad s = 0, 1, \dots, m-1,$$

1) S. Hokari, Die intrinsike Theorie der Geometrie des Systems der partiellen Differentialgleichungen, Proc. **16** (1940), 320-332.

in denen die Koeffizienten $P_{j\gamma(s)}^{ia(t)}$, $Q_{\gamma(s)a}^i$ infolge (14) durch die rekurrenten Formeln

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_{j\gamma(s+1)}^{ia(s)} = P_{j\gamma(s)}^{i(a(s-1))} \delta_{\gamma(s+1)}^{a(s)} + \Gamma_{k(\gamma(s+1))}^i P_{|j|\gamma(s)}^{ka(s)} - s G_{(\gamma(s+1)\gamma_s)}^\beta P_{|j|\gamma(s-1)}^{ia(s)} \\ \quad = (s+1) \Gamma_{j(\gamma(s+1))}^i \delta_{\gamma(s)}^{a(s)} - \frac{s(s+1)}{2} \partial_j^i G_{(\gamma(s+1)\gamma_s)}^\beta \delta_{\gamma(s-1)}^{a(s)} \\ \quad \quad \quad \text{für } 0 \leq s \leq m-2, \\ P_{j\gamma(s+1)}^{ia(t+1)} = P_{j\gamma(s)}^{i(a(t))} \delta_{\gamma(s+1)}^{a(t+1)} + D_{(\gamma(s+1))} P_{|j|\gamma(s)}^{ia(t+1)} + \Gamma_{k(\gamma(s+1))}^i P_{|j|\gamma(s)}^{ka(t+1)} \\ \quad - s G_{(\gamma(s+1)\gamma_s)}^\beta P_{|j|\gamma(s-1)}^{ia(t+1)} \quad \text{für } 0 \leq t, \quad t+2 \leq s \leq m-2, \\ P_{j\gamma(s+1)}^i = D_{(\gamma(s+1))} P_{|j|\gamma(s)}^i + \Gamma_{k(\gamma(s+1))}^i P_{|j|\gamma(s)}^k - s G_{(\gamma(s+1)\gamma_s)}^\beta P_{|j|\gamma(s-1)}^{i\beta} \\ \quad \quad \quad \text{für } 1 \leq s \leq m-2, \\ Q_{(\gamma(s+1))a}^i = \Gamma_{k(\gamma(s+1))}^i Q_{\gamma(s)a}^k + D_{(\gamma(s+1))} Q_{\gamma(s)a}^i - G_{a(\gamma(s+1))}^\beta \omega_{\gamma(s)}^{i\beta} \\ \quad - s G_{(\gamma(s+1)\gamma_s)}^\beta Q_{\gamma(s-1)\beta}^i \quad \text{für } 0 \leq s \leq m-2 \end{array} \right.$$

gegeben werden. Hierbei bedeutet die Ableitung D_a für die Grösse f in $F_n^{*(m-1)}$, dass

$$(27) \quad D_a f = \frac{\partial f}{\partial u^a} + \sum_{t=0}^{m-2} f^{(\gamma(t))}_{;j} p_{\gamma(t)a}^j - f^{(\gamma(m-1))}_{;j} H_{\gamma(m-1)a}^j;$$

und alle Pfaffschen Ausdrücke (25) sind also in der Mannigfaltigkeit $F_n^{*(m-1)}$ enthalten. Ist (23) dabei vollständig integrabel, ist die Ableitung (27) nichts anderes als die Ableitung von f längs der Integralfläche von (23). Da $\Omega_{\gamma(s)}^i$ ($s=0, 1, \dots, m-1$) in bezug auf i kontravariant und $\gamma(s)$ kovariant sind, können wir deshalb durch $\Omega_{\gamma(s)}^i$ die Grundübertragungen in der Mannigfaltigkeit $F_n^{*(m-1)}$ definieren, und danach die kovarianten Ableitungen einer vorgegebenen Grösse erhalten.

Insbesondere gibt es für den Fall $m=3$ im allgemeinen die symmetrische Grösse $h_{a\beta}^{(3)}$; deshalb können die Übertragungsparameter Γ_{ja}^i , $G_{a\beta}^\gamma$ aus $H_{a(3)}^i$ und ihren Ableitungen nach $p_{a(2)}^i$ bestimmt werden¹⁾. In diesem Falle haben wir die Grundübertragungen

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega^i = dx^i, \\ \Omega_j^i = dp_j^i + \Gamma_{jr}^i dx^j - G_{r\beta}^a p_a^i du^\beta, \\ \Omega_{\gamma(2)}^i = dp_{\gamma(2)}^i + P_{j\gamma(2)}^{ia} dp_a^j + P_{j\gamma(2)}^i dx^j + Q_{\gamma(2)\beta}^i du^\beta, \end{array} \right.$$

wobei gesetzt sind:

1) S. Hokari, Über die Geometrie des Systems der partiellen Differentialgleichungen dritter Ordnung, Proc. **16** (1940), 104-108.

$$(29) \quad \begin{cases} P_{j\gamma(2)}^{ia} = 2\Gamma_{j(\gamma_1}\delta_{\gamma_2)}^a - \delta_j^i G_{\gamma_1\gamma_2}^a, \\ P_{j\gamma(2)}^i = D_{(\gamma_1}\Gamma_{|j|\gamma_2)}^i + \Gamma_{k(\gamma_1}^i\Gamma_{|j|\gamma_2)}^k - G_{\gamma_1\gamma_2}^\beta \Gamma_{j\beta}^i, \\ Q_{\gamma(2)a}^i = -\Gamma_{k(\gamma_1}^i G_{\gamma_2)a}^\beta p_\beta^k - D_{(\gamma_1} G_{\gamma_2)a}^\beta p_\beta^i - G_{a(\gamma_1}^\beta \omega_{\gamma_2)\beta}^i + G_{\gamma_1\gamma_2}^\beta G_{\beta a}^\gamma p_\gamma^i, \\ \omega_{a\beta}^i = p_{a\beta}^i + \Gamma_{ja}^i p_\beta^j - G_{a\beta}^\gamma p_\gamma^i. \end{cases}$$

Wir werden diese Theorie an anderer Stelle noch ausführlich behandeln.
