38. Über die allgemeinen algebraischen Systeme II*.

Von Kenjiro SHODA.
Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Osaka.
(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., April 13, 1942.)

§ 6. *Bemerkungen über die freien Gruppen.* Die durch eine Menge E der Elemente erzeugte freie Gruppe, die nach § 3 und § 5 als freies algebraisches System definiert ist, wird dadurch charakterisiert, daß jede durch E erzeugte Gruppe ihr homomorph ist. Setzt man den entsprechenden Satz für die wie üblich definierte freie Gruppe[1] als bekannt voraus, so erkennt man, daß die beiden Definitionen äquivalent sind. Man kann in der Tat die üblich definierte freie Gruppe als eine treue Darstellung unserer freien Gruppe ansehen, wie folgt. Man bilde zunächst das absolut freie algebraische System mit Verknüpfungen $\cdot$, $\backslash$, $/$ oder nach der üblichen Schreibweise $a\cdot b=ab$, $a\backslash b=a^{-1}b$, $a/b=ab^{-1}$. Setzt man das Assoziativgesetz der Multiplikation voraus, so erkennt man, daß jedes Element sich in der Form $x_{i_1}^{\varepsilon_1}\cdots x_{i_r}^{\varepsilon_r}$, $\varepsilon=\pm 1$, mit x_i aus E darstellen lässt. Dann führen wir die beiden Bedingungen $a(a^{-1}b)=b$, $(ab^{-1})b=a$ ein; d. h. man nimmt in der obigen Ausdrücke $x_{i_\lambda}^{\varepsilon_\lambda}x_{i_{\lambda+1}}^{\varepsilon_{\lambda+1}}$ weg, falls $x_{i_\lambda}=x_{i_{\lambda+1}}$, $\varepsilon_\lambda=-\varepsilon_{\lambda+1}$ ist. Die so entstehenden Ausdrücke bilden bekanntlich eine durch E erzeugte Gruppe mit dem Einselement $aa^{-1}=bb^{-1}$. Die freie Gruppe muss aber ihr homomorph, also nach § 3 ihr isomorph sein.

Es sei $\mathfrak{F}$ eine freie Gruppe. Mit f, f' sind afa^{-1}, ff'^{-1} sind Relationen[2]. Ist $R=\{f_1, f_2, \ldots,\}$ ein Relationensystem, so bilden die aus den f durch endlichmalige Division und Transformation erhältlichen Ausdrücke einen Normalteiler $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{F}$, der nur aus den Folgerelationen besteht. Die Faktorgruppe $\mathfrak{F}/\mathfrak{R}$ ist ersichtlich eine Gruppe mit Relationen R. Daher besteht $\mathfrak{R}$ aus den sämtlichen Folgerelationen von R und $\mathfrak{F}/\mathfrak{R}$ ist die freie Gruppe mit Relationen R im Sinne von § 3.

In einer allgemeinen Gruppe $\mathfrak{G}$ bezeichnen wir mit C_1 das Produkt endlichvieler Kommutatoren, C_k das Produkt endlichvieler Kommutatoren der $(k-1)$-ten Ableitung von $\mathfrak{G}$. Dann lässt sich C_k als eine Verknüpfungsfunktion darstellen. $\mathfrak{G}$ ist dann und nur dann auflösbar, wenn die sämtlichen Verknüpfungsfunktionen C_k für gewisses k Einselement werden. D. h. die auflösbaren Gruppen von der Länge k der Kommutatorreihe werden durch $C_k=1$ charakterisiert. Damit ist gezeigt, daß der Begriff der auflösbaren Gruppen von der Länge k primitiv im Sinne von § 2. Daher kann man etwa auch von den freien auflösbaren Gruppen von der Länge k sprechen. Dagegen ist der Begriff der auflösbaren

---

*) Der erste Teil erschient in Proc. **17** (1941), 323–327.

1) Vgl. O. Schreier, Die Untergruppen der freien Gruppen, Hamburger Abh. **5** (1927). K. Reidemeister, Einführung in die kombinatorische Topologie, Braunschweig (1932). S. Iyanaga, Freie Gruppen (japanisch) (1940).

2) Nach unserer Schreibweise $f=1$.

Gruppen (von der unbestimmten Länge) nicht primitiv. Analog kann man für nilpotente Gruppen vorgehen, wenn man statt die Kommutatorreihe die absteigende Zentralreihe betrachtet. Ist $k=1$, so erhält man den Begriff der freien abelschen Gruppen als speziale freie Gruppen. Man ersieht leicht, daß man aus einer freien abelschen Gruppe durch Hinzufügung gewisser Verknüpfungsgleichungen nur Gruppen erhalten kann, deren Typus $(r, r, \cdots)$ sind. Besteht das Erzeugendensystem E aus endlichvielen Elemente, so ist diese Gruppe endlich; sie wird freie endliche abelsche Gruppe genannt.

Die übliche Definition des freien Produktes mehrer Gruppen $\mathfrak{A}_i$ folgt auch aus unserer allgemeinen in § 4 unmittelbar. Man bilde nämlich zunächst absolut freies Produkt. Setzt man dann die Gruppenaxiome voraus, so müssen die Einselemente von den $\mathfrak{A}_i$ alles kongruent sein. Daher kann man vorher die sämtlichen Einselemente identifizieren und so kann man die übliche Definition des freien Produktes erhalten.

§ 7. *Bemerkungen über die Polynombereiche und die Algebren.* Da die Gruppen schon in § 5 als primitive algebraische Systeme definiert sind, so ist der Begriff der Ringe auch primitiv. Es sei $\mathfrak{o}$ ein Ring mit Einselement[1] 1, $\mathfrak{M}$ eine Menge von Elementen $x_1, x_2, \cdots$ ohne Verknüpfung. Das freie Produkt von $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{M}$ bezüglich Subtraktion und Multiplikation[2] heisst einen allgemeinen Polynombereich $\mathfrak{o}[x_1, x_2, \cdots]$ von den Variablen x_i mit Koeffizienten aus $\mathfrak{o}$, falls man die Ringaxiome und die Relation $1x_i = x_i 1 = x_i$ voraussetzt.

Nun betrachten wir gewisse Spezialisierungen des allgemeinen Polynombereiches. Der Einfachheithalber beschränken wir uns auf den Fall, das $\mathfrak{M}$ aus endlichvielen, etwa n Variablen besteht. Im unendlichen Fall kann man durch kleine Modifizierung analog vorgehen[3]. Zunächst setzen wir die Relationen $ax_i = \sum_{j=0}^{n} x_j a_{ij}$, $x_0 = 1$, mit a aus $\mathfrak{o}$ voraus, die unter Benützung der Matrizen $A = (a_{ij})$ kurz in der Form $a(x_1, \cdots, x_n) = (x_1, \cdots, x_n)A$ order noch kürzer in der Form $a(x) = (x)A$ dargestellt wird. Dann lässt sich jedes Element aus $\mathfrak{o}[x_1, \cdots, x_n]$ als Summe der Elemente von der Form $x_{\varkappa_1}^{a_1} \cdots x_{\varkappa_m}^{a_m} a$, $1 \leq \varkappa_i \leq n$, darstellen. Ist $b(x) = (x)B$, so ist nach dem Assoziativgesetz $ab(x) = (x)AB$ und nach dem Distributivgesetz $(a+b)(x) = (x)(A+B)$. Bleiben $x_1, \cdots, x_n$ nach der Hinzufügung der Relationen als Elemente eines $\mathfrak{o}$-Rechtsmoduls noch linear unabhängig, so bilden die Matrizen A eine Darstellung von $\dot{\mathfrak{o}}$ in $\mathfrak{o}$. Bilden umgekehrt die Matrizen A eine Darstellung, so bleiben die x_i nach der Hinzufügung der Relationen $a(x) = (x)A$ noch linear unabhängig. Denn wenn man etwa $x_i x_j = 0$, $i, j = 0$, voraussetzt, so bildet der $\mathfrak{o}$-Rechtsmodul[4] mit

1) Über die Definition der Ringe mit Einselement vgl. § 8.

2) Additiv geschriebene abelsche Gruppe wird nach § 5 durch Subtraktion definiert. Also wird Ring durch Subtraktion und Multiplikation definiert.

3) Im Fall der unendlichvielen x_i setzen wir nämlich die Relationen $ax_i = \sum_{j=0}^{\infty} x_i a_{ij}$ mit endlichvielen von Null verschiedenen Elemente a_{ij} aus $\mathfrak{o}$ voraus.

4) Man betrachte die direkte Modulsumme von $\mathfrak{o}$, die aus $(a_1 a_2 \ldots a_n)$ besteht. Man definiere dann das Produkt mit einem Element a aus $\mathfrak{o}$ durch $(a_1 a_2 \ldots a_n)a = (a_1 a\, a_2 a \ldots a_n a)$. Ein ihr isomorphes Modul $\mathfrak{M}$ mit Elemente α heisst ein $\mathfrak{o}$-Rechtsmodul mit n Basen, wenn αa für $\alpha \sim (a_1 \ldots a_n)$ durch $\alpha a \sim (a_1 \ldots a_n) a$ definiert ist.

den (linear unabhängigen) Basen x_i nach unseren Relationen einen Ring. Die Relationen zeigen dabei nur den Regel der Multiplikation, die in den Modul eingeführt wird.

Wenn man ferner das Kommutativgesetz $x_ix_j=x_jx_i$ voraussetzt, so erhält man die übliche Definition des nichtkommutativen Polynombereiches mehrer Variablen[1]. Ist die Darstellung A von $\mathfrak{o}$ eine identische, d. h. ist $ax_i=x_ia$, so erhält man die Definition des kommutativen Polynombereiches.

Nun setzen wir ausser die Relationen $a(x)=(x)A$ noch die Relationen $x_ix_j=\sum_{k=0}^{n} x_k a_{ij}^{(k)}$ voraus, die in der Form $x_i(x)=(x)A_i^*$ dargestellt wird. Man beweist analog wie früh, daß $x_1, \dots, x_n$ dann und nur dann linear unabhängig bleiben, wenn die Gleichungen $\sum_{\kappa,\lambda} a_{\kappa\lambda}^{\nu} a_{ij,k\lambda}^{\kappa} = \sum_{\kappa} a_{i\kappa}^{\nu} a_{jk}^{\kappa}$ bestehen. Dabei ist $a_{ij}^{\kappa} x_k = \sum_{\lambda} x_\lambda a_{ij,k\lambda}^{\kappa}$. Hat die Darstellung A die Diagonalform $ax_i=x_ia^{(i)}$, so ist die Abbildung von a auf $a^{(i)}$ ein Endomorphismus von $\mathfrak{o}$, und unsere Bedingungen reduzieren sich in die Form $\sum_{\kappa} a_{\kappa k}^{\nu} a_{ij}^{\kappa(k)} = \sum_{\kappa} a_{i\kappa}^{\nu} a_{jk}^{\kappa}$. Ist $\mathfrak{o}$ ein kommutativer Körper, so erhält man damit eine Verallgemeinerung des Gruppenringes bezüglich der halblinearen Transformationen[2]. Sind nämlich $x_ix_j=x_k$ und bilden die x_i nach dieser Multiplikation eine Gruppe, so ist unseres System nichts anderes als der Gruppenring bezüglich der halblinearen Transformationen. Ist noch speziell die Darstellung A die identische, so erhält man den Gruppenring im üblichen Sinne.

Ist die Darstellung A die identische und sind die Relationen $x_i(x)=(x)A_i^*$ beliebig, so reduzieren sich unsere Gleichungen über α auf $\sum_{\kappa} a_{\kappa k}^{\nu} a_{ij}^{\kappa} = \sum_{\kappa} a_{ik}^{\nu} a_{jk}^{\kappa}$ und wir erhalten die Definition der Algebren (über dem Körper $\mathfrak{o}$) mit Einselement[3]. Die allgemeinen Algebren mit oder ohne Einselement soll als Unteralgebren der Algebren mit Einselement definiert werden.

§ 8. *Primitive algebraische Systeme mit Abbildungen.* In einem algebraischen System heisst eine eindeutige Funktion $f(a)$ eines Elementes a eine Abbildung in sich, wenn sie für alle Elemente a de-

---

1) In der Literatur ist nur der Fall untersucht, wo $n=1$ und $\mathfrak{o}$ ein Körper ist. Ist $\mathfrak{o}$ ein kommutativer Körper und n beliebig, so reduziert sich die Darstellung A bekanntlich in die Form

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \dots a_{0n} \\ 0 & a_{11} \dots a_{1n} \\ 0 & 0 \ \dots a_{nn} \end{pmatrix}$$

und zwar $a_{00}=1$, da 1 als ein Basiselement angenommen werden kann.

2) T. Nakayama und K. Shoda, Über die Darstellungen einer endlichen Gruppe durch halblineare Transformationen, Jap. Journal Math. **12** (1936). Vgl. auch M. Osima, Über die Darstellung einer Gruppe durch halblineare Transformationen, Proc. Physico-Math. Soc. Japan, **20** (1938).

3) Die übliche Definition der Algebren als $\mathfrak{o}$-Doppelmoduln, die zugleich Ringe sind, ist natürlich mit unserer äquivalent. Wir haben hier nur gezeigt, daß Algebren mit Einselemente als freie Produkte (freie Ringe) mit Relationen definiert werden, wenn die Definition der Körper bekannt ist. Auf die Definition der Körper komme ich nachher zurück.

finiert ist. Wir betrachten nun primitive algebraische System derart, daß gewisse Abbildungen definiert sind. Dann hat man den Begriff des Isomorphismus (Homomorphismus, Meromorphismus) so zu verallgemeinern, daß aus $a \sim a'$ stets $f(a) \sim f(a')$ folgt. An der Stelle der Verknüpfungsfunktion tritt jetzt die Funktion auf, die durch Verknüpfungen und Abbildungen darstellbar ist. Ein durch gewisse Gleichheiten solcher Funktionen definiertes algebraisches System heisst ein primitives mit Abbildungen. Ein Untersystem des primitiven algebraischen Systems mit Abbildungen ist ein Untersystem des primitiven Systems im Sinne von § 2, welches mit a alle Bilder von a enthält. Bei der Definition der freien algebraischen Systeme nimmt man auch die Abbildungen hinzu. Dann gelten die Satze in § 1–4 auch für primitive algebraische Systeme mit Abbildungen[1].

Es sei $\mathfrak{A}$ ein primitives algebraisches System mit Abbildungen, Ω die Menge der Abbildungen $\theta_1, \theta_2, \dots$, V die Menge der Verknüpfungen $\alpha_1, \alpha_2, \dots$. Man bilde dann das absolut freie algebraische System Ω^* mit dem Erzeugendensystem Ω und dem Verknupfungssystem V. Jedes Element θ aus Ω^* bedeutet eine Abbildung von $\mathfrak{A}$, wenn man $a^{\theta\alpha\theta'} = a^\theta \alpha a^{\theta'}$ setzt. Fasst man die Elemente aus Ω^* in einer Klasse, wenn sie dieselbe Abbildung von $\mathfrak{A}$ bewirken, so erhält man eine Klasseneinteilung von Ω^* und man erhält damit ein Restklassensystem $\bar{\Omega}^*$ von Ω^*. Man kann noch eine Verknüpfung (Multiplikation) der Abbildungen durch $a^{(\theta\theta')} = (a^\theta)^{\theta'}$ einführen. Dann gilt das Linksdistributivgesetz $\theta(\theta_1\alpha\theta_2) = \theta\theta_1\alpha\theta\theta_2$ in $\bar{\Omega}^*$.

Gilt insbesondere $(a\alpha b)^\theta = a^\theta \alpha b^\theta$ für jedes α, so heisst θ einen Operator, welches einen Homomorphismus in sich (Endomorphismus) bewirkt. Ist θ ein Operator, so ist $(\theta_1\alpha\theta_2)\theta = \theta_1\theta\alpha\theta_2\theta$ in $\bar{\Omega}^*$ für jede Abbildungen θ_1, θ_2. Das Produkt zweier Operatoren ist wieder ein Operator, dagegen ist $\theta\alpha\theta'$ für zwei Operatoren θ, θ' nicht notwendig Operator. Ist $\mathfrak{A}$ ein A-algebraisches System und besteht $\bar{\Omega}^*$ aus Operatoren, so ist $\bar{\Omega}^*$ auch ein A-algebraisches System[2]. Denn ist $f(a, \dots) = g(a, \dots)$ eine Verknüpfungsgleichung von $\mathfrak{A}$, so ist $a^{f(\theta, \dots)} = f(a^\theta, \dots) = g(a^\theta, \dots) = a^{g(\theta, \dots)}$.

Die primitiven algebraischen Systeme mit einem Element a, das einer Gleichung $f(a, b, \dots, d) = g(a, b, \dots, d)$ für jede $b, \dots, d$ genügt, werden als die primitiven Systeme mit einer Abbildung φ definiert, so daß $a^\varphi = b^\varphi$, $f(a^\varphi, b, \dots, d) = g(a^\varphi, b, \dots, d)$ z. B. Ringe mit Einselement. Bei der üblichen Definition werden die Gruppen als primitive Systeme bezüglich der Multiplikation mit einer Abbildung definiert, die jedes Element in ihre Reziproke überführt.

---

1) Noch allgemeinere Systeme werden schon von G. Birkhoff betrachtet. Er hat ein System „abstract algebra" untersucht, wo gewisse Funktionen von n Elemente definiert sind. Für solche allgemeine System kann man auch analog vorgehen. Wichtig ist aber nur der Fall, den wir jetzt betrachten. Ein primitives System mit Abbildungen kann man als primitives System in Sinne von § 2 auffassen, wie folgt. Man hat dafür nur $a * b$ mit $a * b = a * c$ statt a^θ zu betrachten, wo $*$ eine neue Verknüpfung bedeutet. Vgl. hierzu G. Birkhoff, On the structure of abstract algebras, Proc. Camb. Phil. Soc. **31** (1935).

2) Z. B. der Endomorphismenring der abelschen Gruppe.

Als wichtige Beispiele der primitiven Systeme mit Operatoren nennen wir die Gruppen mit Operatoren, Darstellungsmoduln in der Noetherschen Darstellungstheorie. Weitere Beispiele der primitiven Systeme mit Abbildungen finden sich in der Theorie der Verbände.

§ 9. *Bemerkungen über die Verbände.* Die Verbände werden bekanntlich als die primitiven algebraischen Systeme mit den Verknüpfungen $\frown$, $\smile$ und den Verknüpfungsgleichungen $a \frown a = a$, $a \smile a = a$; $a \frown b = b \frown a$, $a \smile b = b \smile a$; $a \frown (b \frown c) = (a \frown b) \frown c$, $a \smile (b \smile c) = (a \smile b) \smile c$; $a \frown (a \smile b) = a$, $a \smile (a \frown b) = a$ definiert. Die modulären Verbände werden etwa als Verbände mit der Gleichung $(a \frown c) \smile (b \frown c) = \big((a \frown c) \smile b\big) \frown c$ definiert[1]. Setzt man das Distributivgesetz $a \frown (b \smile c) = (a \frown b) \smile (a \frown c)$ voraus, so erhält man bekanntlich die Definition der distributiven Verbände. Diese drei Begriffe sind also primitiv.

Ein Verband mit einer Abbildung θ heisst komplementiert, wenn $(a \frown a^\theta) \smile b = b$, $(a \smile a^\theta) \frown b = b$ sind. Also werden die komplementierten Verbände, die komplementierten modulären Verbände und die komplementierten distributiven Verbände (Boolsche Algebren) als primitive algebraische Systeme definiert.

Ist ein komplementierter modulärer Verband $\mathfrak{L}'$ einem anderen $\mathfrak{L}$ homomorph, so wird der Homomorphismus bekanntlich durch dem 0 aus $\mathfrak{L}'$ entsprechenden Ideal von $\mathfrak{L}$ charakterisiert. Man beweist auch leicht: *In den komplementierten modulären Verbände ist jeder Meromorphismus ein Klassenmeromorphismus*[2]. Ist nämlich nach § 1 $a \sim a'$, $b \sim a'$, $b \sim b'$, so ist $b \sim c' = a' \frown b'$. Wegen der Modularität folgt hieraus $a = a \frown (b^\theta \smile b) \sim a' \frown (a'^\theta \smile c') = (a' \frown a'^\theta) \smile c' = c'$ und $a = a \smile (b^\theta \frown b) \sim c' \smile (c'^\theta \frown b') = b'$, da nach der Definition des Meromorphismus aus $a \sim b$ stets $a^\theta \sim b^\theta$ folgt.

Die Boolschen Ringe werden als die aus Idempotenten bestehenden assoziativen Ringe, d. h. durch die Gleichungen $a^2 = a$ definiert; also sind sie primitiv. Um die Existenz des Einselements 1 vorauszusetzen, hat man, wie wir in § 8 erwähnten, eine Abbildung φ mit $a^\varphi b = b a^\varphi = b$ zu betrachten. Die beiden Begriffe der Boolschen Algebren und der Boolschen Ringe mit Einselement 1 sind bekanntlich nach $a \smile b = a + b - ab$, $a \frown b = ab$, $a^\theta = 1 - a$ äquivalent im Sinne von § 2. Um die Existenz der relativen Komplementen bezüglich Null[3] vorauszusetzen, führen wir eine neue Verknüphungen $*$ mit den Gleichungen $a \smile (a * b) = a \smile b$, $\big(a \frown (a * b)\big) \smile c = c$ ein. Die distributiven Verbände mit relativen Kom-

---

1) Vgl. etwa O. Ore, On the foundation of abstract algebra, I, Ann. Math. **36** (1935).

2) Im allgemeinen gibt es Meromorphismus der Verbände, der nicht Klassenmeromorphismus ist. Es seien nämlich $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}'$ isomorph nach der Zuordnung $a \sim a'$. Ordnet man einem Element a alle Elemente $x' \leq a'$ und einem Element a' alle Elemente $x \geq a$ zu, so erhält man einen Meromorphismus von $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}'$, der aber ersichtlich nicht Klassenmeromorphismus ist.

3) D. h. relative Komplemente mit Durchschnitt Null. Die Existenz des allgemeinen relativen Komponents wird durch eine ternären Funktion $\varphi(a, b, c)$ mit den Gleichungen $a \smile \varphi(a, b, c) = a \smile b$, $a \frown \varphi(a, b, c) = a \frown c$ definiert. Vgl. die Anmerkung 1), S. 182.

plementen bezüglich Null sind bekanntlich mit den Boolschen Ringe nach $a \cup b = a + b - ab$, $a \cap b = ab$, $a * b = b - ab$ äquivalent[1].

Einen anderen Beispiel bildet der Begriff der topologischen Verbände[2], darunter wir die Boolschen Algebren mit einer Abbildung, Abschliessung α, verstehen, die den Gleichungen $a^{\alpha\alpha} = a$, $a \cap a^{\alpha} = a$, $(a \cup b)^{\alpha} = a^{\alpha} \cup b^{\alpha}$ genügt.

---

1) Vgl. M. H. Stone, The theory of representations for Boolean algebras, Trans. Amer. Math. Soc. **40** (1936).

2) Vgl. H. Terasaka, Die Theorie der topologischen Verbände, Fund. Math. **33** (1939).