58. *Über die allgemeinen algebraischen Systeme, IV**.

Von Kenjiro SHODA.
Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Osaka.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., June 12, 1942.)

§ 13. *Direktes Produkt.* Es seien $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_n$ algebraische Systeme mit denselben Verknüpfungen. Die Gesamtheit der Symbolen $a=(a_1a_2\cdots a_n)$ mit a_i aus $\mathfrak{A}_i$ bildet dann auch ein algebraisches System $\mathfrak{A}$, wenn man $(a_1a_2\cdots a_n)\alpha(b_1b_2\cdots b_n)$ für eine Verknüpfung α durch $(a_1\alpha b_1\, a_2\alpha b_2\cdots a_n\alpha b_n)$ definiert. $\mathfrak{A}$ heisst das direkte Produkt von den $\mathfrak{A}_i$; es wird mit $\mathfrak{A}=(\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\cdots\mathfrak{A}_n)$ bezeichnet. $\mathfrak{A}$ wird bis auf den Isomorphismus durch den direkten Komponenten $\mathfrak{A}_i$ (unabhängig von der Anordnung) eindeutig bestimmt. Sind die $\mathfrak{A}_i$ sämtlich primitive A-algebraische Systeme[1], so ist es auch das direkte Produkt.

Durchläuft a alle Elemente eines Untersysteme $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$, so durchläuft a_i ein Untersystem $\mathfrak{B}_i$ von $\mathfrak{A}$. Das Untersystem $\overline{\mathfrak{B}}=(\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\cdots\mathfrak{B}_n)$ heisst die Hülle von $\mathfrak{B}$ in bezug auf die Zerlegung $(\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\cdots\mathfrak{A}_n)$ von $\mathfrak{A}$; $\mathfrak{B}$ heisst ein subdirektes Produkt von den $\mathfrak{B}_i$. Setzt man $b\equiv b'$, wenn $b_i=b'_i$ für ein festes i ist, so erhält man ein zu $\mathfrak{B}_i$ isomorphes Restklassensystem von $\mathfrak{B}$; damit ist eine homomorphe Abbildung φ_i von $\mathfrak{B}$ auf einen Komponent $\mathfrak{B}_i$ aufgestellt. Die durch φ_i vermittelte Restklassenzerlegung von $\mathfrak{B}$ bezeichnen wir mit $\tilde{\varphi}_i$. Sind $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_n$ die Bilder von $\mathfrak{B}$ bei den homomorphen Abbildungen $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, so besitzt $\mathfrak{B}$ bekanntlich dann und nur dann eine isomorphe Darstellung als subdirektes Produkt von den $\mathfrak{B}$, wenn $\tilde{\varphi}_1 \frown \tilde{\varphi}_2 \frown \cdots \frown \tilde{\varphi}_n=0$ im Sinne der Verbände ist[2].

Wir werden nun gewisse Sätze in der Gruppentheorie auf unseren allgemeinen Fall übertragen. Zugrundliegend sind dabei die in § 11 angegebenen Voraussetzungen:

I. $\mathfrak{A}$ besitzt ein Nullelement.

II. Die Vereinigung zweier normalen Untersysteme eines Untersystems $\mathfrak{A}'$ von $\mathfrak{A}$ ist normal in $\mathfrak{A}'$.

III. Der Meromorphismus zweier zu $\mathfrak{A}'$ homomorphen Systeme ist stets ein Klassenmeromorphismus.

Zunächst setzen wir III voraus. Der Verband aller Restklassenzerlegungen von $\mathfrak{A}$ ist nach § 11 modulär. Daher kann man gewisse Sätze über die Darstellungen der Gruppen als subdirekte Produkte der irreduziblen Faktoren auf unseren allgemeineren Fall übertragen. Darunter nennen wir hier die folgenden zwei Sätze[3].

Gilt der aufsteigende Kettensatz im Verband der Restklassenzerlegungen von $\mathfrak{A}$, so ist die Anzahl der irreduziblen Faktoren der unver-

---

* I in Proc. **17** (1941, 323-327; II ebenda **18** (1942), 179-184; III ebenda **18** (1942), 227-232.

1) Vgl. § 2 in I.

2) G. Birkhoff, Lattice Theory (1940), Theorem 3.20.

3) G. Birkhoff a. a. O. Corollary von Theorem 3.23 und Theorem 5.15.

kürzbaren subdirekten Produktdarstellung von $\mathfrak{A}$ unabhängig von der Darstellung.

Unter derselben Voraussetzung ist die Darstellung dann und nur dann eindeutig, wenn der Verband der Restklassenzerlegungen distributiv ist.

Es sei nun $\mathfrak{A}=(\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2)$, $\mathfrak{B}$ ein Untersystem von $\mathfrak{A}$ und $\bar{\mathfrak{B}}=(\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2)$ die Hülle von $\mathfrak{B}$. Dann sind $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ meromorph, wenn man zwei Elemente $b_1\in\mathfrak{B}_1$, $b_2\in\mathfrak{B}_2$ mit $(b_1b_2)\in\mathfrak{B}$ zuordnet. Nach III gibt es isomorphe Restklassensysteme von $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$, so daß $\mathfrak{B}$ aus (b_1b_2) mit b_1 und b_2 aus den entsprechenden Restklassen besteht. Sind $C_1, D_1, \cdots$ bzw. $C_2, D_2, \cdots$ die nach dieser Anordnung entsprechenden Restklassen von $\mathfrak{B}_1$ bzw. $\mathfrak{B}_2$, so bilden die (C_1C_2), (D_1D_2), $\cdots$ ein Restklassensystem von $\mathfrak{B}$; diese Restklassenzerlegung bezeichnen wir mit $\tilde{\psi}$. Dann sind $\tilde{\varphi}_1$ und $\tilde{\varphi}_2$ beides Verfeinerungen von $\tilde{\psi}$, da in der Tat etwa (c_1C_2), (d_1D_2), $\cdots$ die Restklassen von $\tilde{\varphi}_1$ sind, wo $c_1\in C_1$, $d_1\in D_1, \cdots$ sind. Also enthält $\tilde{\psi}$ die Vereinigung $\tilde{\varphi}_1\cup\tilde{\varphi}_2$, Ist insbesondere $\tilde{\varphi}_1\cup\tilde{\varphi}_2=1$, d. h. keine wesentliche Zerlegung von $\mathfrak{B}$, so ist $\tilde{\psi}=1$, also ist $\mathfrak{B}=\bar{\mathfrak{B}}=(\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2)$. Ist umgekehrt $\mathfrak{B}=\bar{\mathfrak{B}}$, so ist ersichtlich $\tilde{\varphi}_1\cup\tilde{\varphi}_2=1$. Nach der Induktion beweist man: *Die Restklassenzerlegungen $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \cdots, \tilde{\varphi}_n$ definieren dann und nur dann eine Darstellung von $\mathfrak{B}$ als das direkte Produkt der Bilder $\mathfrak{B}_i$ von den $\tilde{\varphi}_i$, wenn $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \cdots, \tilde{\varphi}_n$ unabhängig unter 1 und $\tilde{\varphi}_1\cap\tilde{\varphi}_2\cap\cdots\cap\tilde{\varphi}_n=0$ sind. Dabei heissen $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \cdots, \tilde{\varphi}_n$ unabhängig unter 1, wenn $(\tilde{\varphi}_1\cap\tilde{\varphi}_2\cap\cdots\cap\tilde{\varphi}_k)\cup\varphi_{k+1}=1$ für $k=1, 2, \cdots, n-1$ ist*[1].

Mit Hilfe der von Ore angegebenen verbändetheoretischen Formulierung[2] des Remak-Schmidtschen Satzes kann man ohne Mühe behaupten:

Remak-Schmidtscher Satz 1. Hat der Verband der Restklassenzerlegungen von $\mathfrak{A}$ endliche Länge, so ist die Zerlegung von $\mathfrak{A}$ in das direkte Produkt der direkt unzerlegbaren Faktoren bis auf die Anordnung der Faktoren und bis auf die Verkettung eindeutig. Dabei kann man jeden direkten Faktor einer Zerlegung durch dem entsprechenden direkten Faktor einer anderen Zerlegung ersetzen.

Wir setzen nun I und III voraus. Ist $\mathfrak{A}=(\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\cdots\mathfrak{A}_n)$, $O=(O_1 O_2\cdots O_n)$, so ist O_i ein Nullelement von $\mathfrak{A}_i$. Die $(O_1\cdots O_{i-1}a_iO_{i+1}\cdots O_n)$ bilden ein zu $\mathfrak{A}_i$ isomorphes Untersystem von $\mathfrak{A}$ und zwar ein normales[3]; es wird auch mit $\mathfrak{A}_i$ bezeichnet. Nach der üblichen Schreibweise gebrauchen wir dann den Ausdrück $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_1\times\mathfrak{A}_2\times\cdots\times\mathfrak{A}_n$.

Es sei $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_1\times\mathfrak{A}_2$. Das durch $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ erzeugte Untersystem $\mathfrak{A}_1\cup\mathfrak{A}_2$ lässt sich als subdirektes Produkt von $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ darstellen. Da es aber alle Elemente von der Form (O_1a_2) und (a_1O_2) enthält, so ist es nach der obigen Überlegung gleich $\mathfrak{A}$. Nach der Induktion be-

1) Dies ist eine Verallgemeinerung eines Satzes in der Gruppentheorie. Vgl. G. Birkhoff a. a. O. Theorem 3.21.

2) O. Ore, On the foundation of abstract algebra I, II, Ann. Math. **36, 37** (1935–36).

3) Ist $\mathfrak{B}$ ein Untersystem von $\mathfrak{A}$, so heisst das direkte Produkt von $\mathfrak{B}\cap\mathfrak{A}_i$ den Kern von $\mathfrak{B}$. Im Fall $n=2$ ist die oben angegebene isomorphe Zuordnung der Restklassensysteme von $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ nichts anderes als eine Zuordnung von $\mathfrak{B}_1/\mathfrak{B}\cap\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B}_2/\mathfrak{B}\cap\mathfrak{A}_2$.

weist man: *Die direkten Faktoren* $\mathfrak{A}_i$ *erzeugen das ganze System* $\mathfrak{A}$. D. h. aus $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_1\times\mathfrak{A}_2\times\cdots\times\mathfrak{A}_n$ folgt $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_1\cup\mathfrak{A}_2\cup\cdots\cup\mathfrak{A}_n$.

Ist $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_1\times\mathfrak{A}_2$ *und ist* $\mathfrak{B}$ *ein* $\mathfrak{A}_1$ *enthaltendes Untersystem von* $\mathfrak{A}$, *so ist* $\mathfrak{B}=\mathfrak{A}_1\times(\mathfrak{A}_2\frown\mathfrak{B})$. Denn die Hülle $\bar{\mathfrak{B}}$ enthält $\mathfrak{A}_1$, also ist $\bar{\mathfrak{B}}=\mathfrak{A}_1\times\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}\leq\mathfrak{A}_2$. Nach der oben angegebenen Konstruktion von $\mathfrak{B}$ aus $\bar{\mathfrak{B}}$ überzeugt man sich leicht, daß $\mathfrak{B}=\bar{\mathfrak{B}}=\mathfrak{A}_1\times(\mathfrak{A}_2\frown\mathfrak{B})$ ist.

Ist $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}\times\mathfrak{C}=\mathfrak{B}\times\mathfrak{C}'$, *so sind* $\mathfrak{C}$ *und* $\mathfrak{C}'$ *isomorph*. Denn jedes Restklassensystem aus dem Schar $[\mathfrak{C}]$ bestimmt ersichtlich ein Restklassensystem aus $[\mathfrak{A}/\mathfrak{B}]$. Da aber $\mathfrak{B}\times\mathfrak{C}=\mathfrak{B}\cup\mathfrak{C}$ ist, so ist nach dem zweiten Isomorphiesatz $[\mathfrak{A}/\mathfrak{B}]$ zu $[\mathfrak{C}]$ einseitig isomorph, also sind die beiden Schare gegenseitig isomorph. Folglich sind $[\mathfrak{C}]$ und $[\mathfrak{C}']$ gegenseitig isomorph. Dann müssen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ als die feinsten Restklassensysteme zueinander isomorph sein.

Nach diesem Satz kann man den Remak-Schmidtschen Satz folgendermassen verbessern.

Remak-Schmidtscher Satz 2. Die nach dem Remak-Schmidtschen Satz 1 zugeordneten Faktoren zweier Zerlegungen von $\mathfrak{A}$ *sind nicht nur verkettet sondern auch isomorph.*

Das ist eine unmittelbare Folgerung der Ersetzbarkeit der entsprechenden Faktoren.

§ 14. *Direkte Vereinigung.* Es seien $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_n$ normale Untersystem von $\mathfrak{A}$. Ist $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_1\cup\mathfrak{A}_2\cup\cdots\cup\mathfrak{A}_n$, $O=(\mathfrak{A}_1\cup\mathfrak{A}_2\cup\cdots\cup\mathfrak{A}_k)\frown\mathfrak{A}_{k+1}$, $k=1, 2, \dots, n-1$, so heisst $\mathfrak{A}$ die direkte Vereinigung von den $\mathfrak{A}_i$. In der Gruppentheorie stimmt der Begriff der direkten Vereinigung bekanntlich mit dem Begriff des direkten Produktes überein. Wenn man den Verband der Restklassenzerlegungen und den Verband der normalen Untersysteme betrachtet, so erkennt man eine *Dualität* zwischen der Zerlegung in das direkte Produkt und der Zerlegung in die direkte Vereinigung. Man kann also den Remak-Schmidtschen Satz folgendermassen formulieren. Wir setzen I, II voraus.

Remak-Schmidtscher Satz 3. Hat $\mathfrak{A}$ *eine Hauptreihe, so ist die Zerlegung von* $\mathfrak{A}$ *in die direkte Vereinigung der direkt unzerlegbaren Faktoren bis auf die Anordnung und bis auf die Verkettung eindeutig. Dabei kann man jeden direkten Faktor einer Zerlegung durch dem entsprechenden direkten Faktor einer anderen Zerlegung ersetzen.*

Wenn I, II, III gelten und, wenn ausserdem die Restklassenzerlegung eines normalen Untersysteme nach seinem normalen Untersystem eindeutig ist, so stimmen die beiden Remak-Schmidtschen Sätze 2, 3 überein, wie man in der Gruppentheorie ersieht[1]. Wir setzen im folgenden I, II, III voraus.

Wir werden nun die Beziehungen zwischen den Zerlegungen von $\mathfrak{A}$ in die direkten Produkte und den Zerlegungen in die direkten Vereinigungen untersuchen. Wir beweisen: *Besitzt der Schar* $[\mathfrak{A}]$ *ein Restklassensystem* $\tilde{\mathfrak{A}}=\tilde{\mathfrak{B}}\times\tilde{\mathfrak{C}}$, *so lässt sich* $\mathfrak{A}$ *als direkte Vereinigung* $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}\cup\mathfrak{C}$ *darstellen und umgekehrt. Dabei ist* $\tilde{\mathfrak{B}}$ *bzw.* $\tilde{\mathfrak{C}}$ *in* $[\mathfrak{B}]$ *bzw.* $[\mathfrak{C}]$ *ent-*

1) Vgl. unten.

halten. Die in den Restklassen aus $\tilde{\mathfrak{B}}$ bzw. $\tilde{\mathfrak{C}}$ enthaltenen Elemente aus $\mathfrak{A}$ bilden ein normales Untersystem, das mit $\mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{C}$ bezeichnet wird. Da O die einzige gemeinsame Restklasse von $\tilde{\mathfrak{B}}$ und $\tilde{\mathfrak{C}}$ ist, so ist $\mathfrak{B} \frown \mathfrak{C} = 0$. Nach II ist aber $\mathfrak{B} \smile \mathfrak{C}$ normal in $\mathfrak{A}$, also ist nach IV § 11 $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \smile \mathfrak{C}$. Es sei umgekehrt $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \smile \mathfrak{C}$ die direkte Vereinigung von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$. Dann ist $[\mathfrak{A}/\mathfrak{C}]$ bzw. $[\mathfrak{A}/\mathfrak{B}]$ zu $[\mathfrak{B}]$ bzw. $[\mathfrak{C}]$ einseitig isomorph. Wir nehmen ein $\mathfrak{A}/\mathfrak{C}$ und ein $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ beliebig fest an. Die Vereinigung dieser beiden Zerlegungen ist wegen $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \smile \mathfrak{C}$ keine wesentliche Zerlegung von $\mathfrak{A}$. Der Durchschnitt ist eine Zerlegung $\mathfrak{A}/\mathfrak{B} \frown \mathfrak{C}$, also ist in $[\mathfrak{A}]$ enthalten. Dieses Restklassensystem aus $[\mathfrak{A}]$ ist nach dem Zusatz des ersten Isomorphiesatzes zum direkten Produkt $(\mathfrak{A}/\mathfrak{C}\ \mathfrak{A}/\mathfrak{B})$ isomorph[1]. Ist die Restklassenzerlegung eines normalen Untersystems nach seinem Untersystem stets eindeutig, so folgt aus der direkten Vereinigung $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \smile \mathfrak{C}$ stets das direkte Produktzerlegung $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \times \mathfrak{C}$, wie man sich leicht überzeugt. Also stimmt in diesem Fall der Begriff der direkten Vereinigung mit dem Begriff des direkten Produktes überein.

§ 15. *Vollständig reduzible Systeme.* Ein algebraisches System $\mathfrak{A}$ mit einem Nullelement heisst stark einfach, wenn es keine wesentliche, d. h. von 1 und 0 verschiedene Restklassenzerlegung besitzt. Ein stark einfaches System ist sicher einfach. Unter dem p-vollständig (v-vollständig) reduziblen System versteht man ein System $\mathfrak{A}$, welches das direkte Produkt (die direkte Vereinigung) von einfachen Systeme ist. Sind die direkten Komponenten sämtlich stark einfach, so spricht man von dem stark vollständig reduziblen System.

Der Verband der normalen Untersysteme eines v-vollständig reduziblen Systeme $\mathfrak{A}$ mit den Bedingungen I und II ist dann komplementiert. Also erhält man: Ist $\mathfrak{B}$ ein normales Untersystem eines v-vollständig reduziblen Systems $\mathfrak{A}$, so ist $\mathfrak{B}$ v-vollständig reduzibel und $\mathfrak{A}$ ist die direkte Vereinigung von $\mathfrak{B}$ mit einem v-vollständig reduziblen Untersystem. Nach der in § 14 aufgestellten Dualität erhält man: Ist $\mathfrak{B}$ zu einem stark p-vollständig reduziblen System $\mathfrak{A}$ mit der Bedingung III homomorph, so ist $\mathfrak{B}$ p-vollständig reduzibel und $\mathfrak{A}$ ist das direkte Produkt von $\mathfrak{B}$ mit einem p-vollständig reduziblen System. Setzt man I, II, III voraus, so ersieht man leicht, daß jedes stark p-vollständig reduzibles System stets stark v-vollständig reduzibel ist und umgekehrt. Die Restklassenzerlegung wird dabei durch das normale Untersystem eindeutig bestimmt.

1) Hier gebrauchen wir die in § 13 angegebene notwendige und hinreichende Bedingung für die Zerlegung in das direkte Produkt.