72. *Riesz-Fischerscher Satz im normierten teilweise geordneten Modul.*

Von Hidegorô NAKANO.

Mathematischer Institut, Kaiserliche Universität zu Tokyo.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., July 13, 1942.)

In einer früheren Abhandlung[1] haben wir normierte teilweisegeordnete Moduln betrachtet. Hier wollen wir eine hinreichende Bedingung geben, damit ein normierter teilweisegeordneter Modul vollständig über Norm ist.

Im folgenden sei $\mathfrak{M}$ ein normierter teilweisegeordneter Modul wie in einer früheren Abhandlung[2]:

1) aus $a > b$ und $b > c$ folgt $a > c$;
2) $a \not> a$;
3) für je zwei Elemente a, b gibt es $a \frown b$ und $a \smile b$;
4) aus $a > b$ folgt $a+c > b+c$;
5) aus $a > 0$ folgt $\alpha a > 0$ für jede positive Zahl α;
6) für jede absteigende Folge positiver Elemente $a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots$ gibt es $c = \lim_{\nu\to\infty} a_\nu$: $c \leqq a_\nu$ und $c \geqq x$ für jedes $x \leqq a_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$;

I) $\|a\| \geqq 0$, und $\|a\| = 0$ besteht nur im Falle $a = 0$;
II) $\|\alpha a\| = |\alpha|\,\|a\|$ für jede reelle Zahl α;
III) aus $|a| \leqq |b|$ folgt $\|a\| \leqq \|b\|$;
IV) $\|a+b\| \leqq \|a\| + \|b\|$.

Satz 1. *Ein normierter teilweisegeordneter Modul $\mathfrak{M}$ sei stetig: für jede Folge $a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots$, $\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = 0$, gilt stets $\lim_{\nu\to\infty} \|a_\nu\| = 0$. Es sei eine Cauchysche Folge von Elementen $x_1, x_2, \ldots$: für jede positive Zahl ε gibt es ein ν, damit*

$$\|x_\lambda - x_\mu\| \leqq \varepsilon \qquad \textit{für } \lambda, \mu \geqq \nu$$

gilt. Wenn die Folge $x_1, x_2, \ldots$ eine beschränkte Teilfolge enthält, d. h. bei einem passenden Element l gilt $|x_\nu| \leqq l$ für unendlich viele ν, so gibt es ein Element x, für das

$$\lim_{\nu\to\infty} \|x_\nu - x\| = 0$$

ist, und die Folge $x_1, x_2, \ldots$ enthält dann zwar eine Teilfolge, die gegen x konvergiert.

Beweis. Im folgenden verwenden wir Bezeichnungen in einer früheren Abhandlung[3]. Aus der Folge $x_1, x_2, \ldots$ kann man nach Voraussetzung eine derartige Teilfolge $y_1, y_2, \ldots$ auswählen, dass

1) H. Nakano: Über normierte teilweisegeordnete Moduln, Proc. **17** (1941), 311–317.

2) H. Nakano: Stetige lineare Funktionale auf dem teilweisegeordneten Modul. Diese Abhandlung erscheint nächstens in Jour. Fac. Sci. Imp. Un. Tokyo.

3) H. Nakano: Teilweise geordnete Algebra, Japanese Jour. Math. **17** (1941) 425–511.

(1) $$\| y_{\nu+1} - y_\nu \| \leqq \frac{1}{2^{2\nu}} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

und für ein positives Element l

(2) $$| y_\nu | \leqq l \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

ist. Setzt man

$$c_\nu = \left(| y_{\nu+1} - y_\nu | - \frac{1}{2^\nu} l \right)_+ ,$$

so gilt $[c_\nu] \leqq [l]$,

$$[c_\nu] \left(| y_{\nu+1} - y_\nu | - \frac{1}{2^\nu} l \right) = \left(| y_{\nu+1} - y_\nu | - \frac{1}{2^\nu} l \right)_+ \geqq 0 ,$$

$$([l] - [c_\nu]) \left(| y_{\nu+1} - y_\nu | - \frac{1}{2^\nu} l \right) = - \left(| y_{\nu+1} - y_\nu | - \frac{1}{2^\nu} l \right)_- \leqq 0 .$$

Daher erhält man

(3) $$[c_\nu] \, | y_{\nu+1} - y_\nu | \geqq \frac{1}{2^\nu} [c_\nu] l ,$$

(4) $$([l] - [c_\nu]) \, | y_{\nu+1} - y_\nu | \leqq \frac{1}{2^\nu} l .$$

Aus (3) folgt nach (1)

$$\frac{1}{2^\nu} \| [c_\nu] l \| \leqq \| y_{\nu+1} - y_\nu \| \leqq \frac{1}{2^{2\nu}}$$

d. h. $$\| [c_\nu] l \| \leqq \frac{1}{2^\nu} .$$

Da $\mathfrak{M}$ nach Voraussetzung stetig ist, ergibt sich hieraus

$$\| ([c_\nu] \dot{+} [c_{\nu+1}] \dot{+} \cdots) l \| \leqq \frac{1}{2^\nu} + \frac{1}{2^{\nu+1}} + \cdots = \frac{1}{2^{\nu-1}} .$$

Setzt man mithin

$$[p_\nu] = [c_\nu] \dot{+} [c_{\nu+1}] \dot{+} \cdots ,$$

so gilt $[p_\nu] \leqq [l]$, $\| (\lim_{\nu \to \infty} [p_\nu]) l \| = 0$, und folglich

(5) $$\lim_{\nu \to \infty} [p_\nu] = 0 .$$

Setzt man $[q_\nu] = [l] - [p_\nu]$, so folgt wegen $[q_\nu] \leqq [l] - [c_\mu]$ aus (4)

$$[q_\nu] \, | y_{\mu+1} - y_\mu | \leqq \frac{1}{2^\mu} l \qquad \text{für } \mu \geqq \nu .$$

Daher gilt für $\lambda, \mu \geqq \nu$

$$[q_\nu] \, | y_\lambda - y_\mu | \leqq [q_\nu] \, | y_{\nu+1} - y_\nu | + [q_\nu] \, | y_{\nu+2} - y_{\nu+1} | + \cdots$$
$$\leqq \frac{1}{2^\nu} l + \frac{1}{3^{\nu+1}} l + \cdots ,$$

d. h.

(6) $$[q_\nu] \, | y_\lambda - y_\mu | \leqq \frac{1}{2^{\nu-1}} l \qquad \text{für } \lambda, \mu \geqq \nu .$$

Setzt man nun

$$l_\nu = \frac{1}{2^{\nu-1}} l + 2[p_\nu] l ,$$

so gilt einerseits

$$l_1 \geqq l_2 \geqq \cdots ,$$

und nach (5)

$$\lim_{\nu\to\infty} l_\nu = 0 .$$

Andererseits besteht nach (2), (6) für $\lambda, \mu \geqq \nu$

$$|y_\lambda - y_\mu| = [q_\nu]\,|y_\lambda - y_\mu| + [p_\nu]\,|y_\lambda - y_\mu|$$

$$\leqq \frac{1}{2^{\nu-1}} l + 2[p_\nu] l = l_\nu .$$

Hieraus kann man schliessen, dass die Folge $y_1, y_2, \dots$ konvergiert[4], d. h. für ein x gilt $\lim_{\nu\to\infty} y_\nu = x$, und zwar nach Obigem

$$|y_\nu - x| \leqq l_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \dots) .$$

Nach Stetigkeit von $\mathfrak{M}$ ergibt sich hieraus

$$\lim_{\nu\to\infty} \| y_\nu - x \| = 0 .$$

Da $\lim_{\nu\to\infty} \| x_\nu - y_\nu \| = 0$ sein soll, erhält man mithin

$$\lim_{\nu\to\infty} \| x_\nu - x \| = 0 .$$

Satz 2. *Wenn ein normierter teilweisegeordneter Modul* $\mathfrak{M}$ *stetig und von folgender Beschaffenheit ist: wenn* $0 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots$ *besteht, und die Zahlenfolge* $\| a_1 \| \leqq \| a_2 \| \leqq \cdots$ *beschränkt ist, so ist die Folge positiver Elemente* $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots$ *schon beschränkt, d. h.* $a_\nu \leqq l$ $(\nu = 1, 2, \dots)$ *für ein positives Element* l, *so ist* $\mathfrak{M}$ *vollständig über Norm*[5].

Beweis. Man braucht nach Satz 1 nur zu beweisen, dass jede Cauchysche Folge eine beschränkte Teilfolge enthält. Aus jeder Cauchyschen Folge $x_1, x_2, \dots$ kann man stets eine derartige Teilfolge $y_1, y_2, \dots$ auswählen, dass

$$(1) \qquad \| y_{\nu+1} - y_\nu \| \leqq \frac{1}{2^\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \dots)$$

ist. Wegen $|y_1| \cup \cdots \cup |y_\nu| = |y_1| \cup \cdots \cup |y_\nu| \cup |y_\nu|$ gilt

$$|y_1| \cup \cdots \cup |y_\nu| \cup |y_{\nu+1}| \leqq |y_1| \cup \cdots \cup |y_\nu| + |(|y_{\nu+1}| - |y_\nu|)|^{6)} .$$

Da $|(|y_{\nu+1}| - |y_\nu|)| \leqq |y_{\nu+1} - y_\nu|$ ist, besteht nach (1) mithin

---

4) Vgl. 3) Satz 2.15.

5) L. Kantorovitch hat einen ähnlichen Satz unter der stärkeren Bedingung bewiesen: aus $|a| < |b|$ folgt stets $\|a\| < \|b\|$, Lineare halbgeordnete Räume, Rec. Math. Moskow, 2 (44), N. 1 (1937) 121–165. Eine Umkehrung dieses Satzes ist unter starkerer Voraussetzung gegeben: 2) Satz 14.4.

6) $a \cup b \leqq (a + |b-c|) \cup (c + |b-c|) = (a \cup c) + |b-c|$.

$$\|(|y_1| \cup \cdots \cup |y_{\nu+1}|)\| \leqq \|(|y_1| \cup \cdots \cup |y_\nu|)\| + \frac{1}{2^\nu}.$$

Hieraus erhält man

$$\|(|y_1| \cup \cdots \cup |y_\nu|)\| \leqq \|y_1\| + 1.$$

Nach Voraussetzung ist dann die Folge $|y_1|$, $|y_1| \cup |y_2|$, $\cdots$ beschränkt, und folglich ist die Folge $y_1, y_2, \cdots$ natürlich beschränkt, damit die Behauptung bewiesen ist.

Bemerkung. Aus diesem Satz 2 folgt sofort der sogenannte Riesz-Fischersche Satz im L_p-Raum. Denn, wenn man Ordnung unter messbaren Funktionen wie folgt definiert: $f \geqq g$ besteht dann und nur dann, wenn $f(x) \geqq g(x)$ bis auf eine Nullmenge gilt, so kann man leicht einsehen, dass der L_p-Raum ein normierter teilweisegeordneter Modul ist. Die Stetigkeit des L_p-Raumes folgt aus der wohlbekannten Eigenschaft des Lebesgueschen Integrals. Die Bedingung des Satzes 2 ist nämlich der sogenannte Lebesguesche Satz über Integral von monotoner Folge integrierbarer Funktionen.