123. Über Erweiterungen von allgemein teilweisegeordneten Moduln, I.

Von Hidegorô NAKANO.
Mathematical Institute, Tokyo Imperial University, Tokyo.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Dec. 12. 1942.)

Einen Modul $\mathfrak{A}$ in bezug auf die reellen Zahlen nennen wir im folgenden einen *allgemein teilweisegeordneten Modul*, wenn

1) aus $a > b$, $b > c$ ja $a > c$ folgt;
2) $a > a$;
3) für je zwei a, b stets ein $c \geqq a$, b existiert;
4) für jedes c aus $a > b$ stets $a + c > b + c$ folgt;
5) für jede positive Zahl α aus $a > 0$ stets $\alpha a > 0$ folgt.

Wenn ein allgemein teilweisegeordneter Modul $\mathfrak{A}$ der Archimedesschen Bedingung genügt: $\lim_{\nu\to\infty} \frac{1}{\nu} a \left(= \bigcap_{\nu>0} \frac{1}{\nu} a \right) = 0$ für $a > 0$, so kann man $\mathfrak{A}$ durch Schnitte zu einem universal teilweisegeordneten Modul erweitern[1]. Diese Erweiterung nennnn wir die *Schnitterweiterung*. Wir haben schon gefunden, dass die Schnitterweiterung öfters zu schönem Nutzen gekommen ist. Wenn man ein lineares Funktional auf $\mathfrak{A}$ zu betrachten ist, so darf man die Schnitterweiterung nicht mehr verwenden. Daher muss man dann eine andere Methode erdenken, was die Absicht dieser Abhandlung ist.

§ 1. Funktionalerweiterung.

Im folgenden nehmen wir an, dass ein allgemein teilweisegeordneter Modul $\mathfrak{A}$ noch den zwei Bedingungen genügt:

I) Wenn $0 \leqq x \leqq a + b$, $a \geqq 0$, $b \geqq 0$ ist, so gibt es zwei Elemente a_1, b_1, für welche $x = a_1 + b_1$, $0 \leqq a_1 \leqq a$, $0 \leqq b_1 \leqq b$ ist[2].

II) Für jedes $a > 0$ gibt es ein positives lineares Funktional P auf $\mathfrak{A}$ mit $P(a) > 0$.

Ein lineares Funktional L auf $\mathfrak{A}$ heisst *relativ beschränkt*, wenn für jedes $a > 0$ stets

$$\underset{0 \leq x \leq a}{\text{Obere Grenze}}\, L(x) < +\infty$$

ist. Jedes positive lineare Funktional auf $\mathfrak{A}$ ist dann offenbar relativ beschränkt.

Setzt man für ein relativ beschränktes lineares Funktional L auf $\mathfrak{A}$

---

1) H. Nakano: Eine Spektraltheorie, Proc. Phys.-Math. Soc. Japan, **23** (1941), 485-511, Anhang II.

2) Diese Bedingung I) ist gleichbedeutend mit der Bedingung: wenn $x+y=a+b$ für vier Elemente $a, b, x, y \geqq 0$ besteht, so gibt es vier Elemente $u_1, u_2, v_1, v_2 \geqq 0$, für welche $x=u_1+u_2$, $y=v_1+v_2$, $a=u_1+v_1$, $b=u_2+v_2$ ist, was zuerst von F. Riesz gegeben ist: Sur quelques notions fondamentales dans la théorie générale des operations linéaires, Ann. Math. **41** (1940), 174-206. Wenn $a \frown b$ stets sinnvoll in $\mathfrak{A}$ ist, so kann man leicht einsehen, dass $\mathfrak{A}$ der Bedingung I) genügt.

$$L^+(a)=\underset{0\leqq x\leqq a}{\text{Obere Grenze}}\ L(x) \qquad (a\geqq 0),$$

so kann man nach I) leicht beweisen[1], dass

$$L^+(a+b)=L^+(a)+L^+(b) \qquad (a,\ b\geqq 0)$$
$$L^+(\alpha a)=\alpha L^+(a) \qquad (a\geqq 0,\ \alpha\geqq 0)$$

ist. Da man nach 3) jedes Element x stets in der Form $x=a-b$, $a\geqq 0$, $b\geqq 0$ schreiben kann, erhält man durch

$$L^+(x)=L^+(a)-L^+(b) \qquad (x=a-b,\ a\geqq 0,\ b\geqq 0)$$

ein positives lineares Funktional L auf $\mathfrak{A}$. Für jedes $a\geqq 0$ gilt offenbar $L^+(a)\geqq L(a)$, was man kurz mit $L^+\geqq L$ bezeichnet. Für jedes lineare Funktional $G\geqq L, \geqq 0$ gilt $G(a)\geqq G(x)\geqq L(x)$ für $0\leqq x\leqq a$, und folglich ist auch $G\geqq L^+$. Daher kann man schreiben: $L^+=L\cup 0$. Hieraus kann man leicht schliessen, dass für je zwei L, G stets $L\cup G$ und $L\cap G$ existieren: $L\cup G=(L-G)^+-G$, $L\cap G=L-(L-G)^+$. Man kann weiterhin leicht beweisen[2], dass man für jede abnehmende Menge $\{P_\alpha\}$ von positiven Funktionalen auf A durch

$$(*) \qquad P(a)=\underset{\alpha}{\text{Untere Grenze}}\ P_\alpha(a) \qquad (a\geqq 0)$$

ein positives lineares Funktional P auf $\mathfrak{A}$ erhält, und zwar $P=\bigcap_\alpha P_\alpha$. Daher bildet die Menge aller relativ beschränkten Funktionale auf $\mathfrak{A}$ einen universal teilweisegeordneten Modul[3], den man hier mit $\hat{\mathfrak{A}}$ bezeichnet.

Satz 1. *Wenn ein allgemein teilweisegeordneter Modul* $\mathfrak{A}$ *den Bedingungen* I), II) *genügt, so ist der teilweisegeordnete Modul* $\hat{\mathfrak{A}}$ *von allen relativ beschränkten linearen Funktionalen auf* $\mathfrak{A}$ *reflexiv*[4].

Beweis. Man kann jedes Element $a\in\mathfrak{A}$ als ein lineares Funktional auf $\hat{\mathfrak{A}}$ betrachten: $a(L)=L(a)$ für $L\in\hat{\mathfrak{A}}$. Dann kann man nach (*) leicht beweisen, dass $a(L)$ linear und universal stetig ist[5]. Wenn eine zunehmende Menge $\{P_\alpha\}$ von positiven Elementen in $\hat{\mathfrak{A}}$ schwach beschränkt[6] ist, so muss die Zahlenmenge $\{P_\alpha(a)\}$ für $a\geqq 0$, $a\in\mathfrak{A}$ beschränkt sein. Dann kann man leicht beweisen[7], dass man durch

$$P(a)=\underset{\alpha}{\text{Obere Grenze}}\ P_\alpha(a) \qquad (a\geqq 0)$$

ein positives lineares Funktional P auf $\mathfrak{A}$ erhält. Für dieses P gilt offenbar $P\geqq P_\alpha$. Daher ist $\hat{\mathfrak{A}}$ reflexiv[8].

Nun betrachten wir den konjugierten Modul $\bar{\hat{\mathfrak{A}}}$ von $\hat{\mathfrak{A}}$. Da man

1) H. Nakano: Stetige lineare Funktionale auf dem teilweisegeordneten Modul, Jour. Fac. Sci. Imp. Univ. Tokyo, **4** (1942), 201-382, Beweis des Satzes 2.4.
2) Vgl. 1), Beweis des Hilfssatzes 6.1.
3) Vgl. 1), Definition 6.2.
4) Vgl. 1), Definition 13.1.
5) Vgl. 1), Beweis des Hilfssatzes 6.1.
6) Vgl. 1), Definition 13.4.
7) Vgl. 1), Beweis des Hilfssatzes 13.4.
8) Vgl. 1), Satz 13.6.

jedes Element $a \in \mathfrak{A}$ als ein universal stetiges lineares Funktional auf $\hat{\mathfrak{A}}$ betrachten kann, ist $\bar{\hat{\mathfrak{A}}}$ eine Erweiterung von $\mathfrak{A}$, welche die Ordnung, die Summe unter den Elementen von $\mathfrak{A}$ und das Product mit den reellen Zahlen bewahrt. Diese Erweiterung $\bar{\hat{\mathfrak{A}}}$ von $\mathfrak{A}$ nennen wir die *Funktionalerweiterung* von $\mathfrak{A}$ und bezeichnet mit $\tilde{\mathfrak{A}}$.

Satz 2. *Ein allgemein teilweisegeordneter Modul $\mathfrak{A}$ genüge den zwei Bedingungen* I) *und* II). *Jedes relativ beschränkte lineare Funktional L auf $\mathfrak{A}$ lässt sich in eindeutiger Weise universal stetig*[1] *auf die Funktionalerweiterung $\tilde{\mathfrak{A}}$ von $\mathfrak{A}$ erweitern, d. h. es gibt ein einziges universal stetiges lineares Funktional $\tilde{L}$ auf $\tilde{\mathfrak{A}}$, für das $\tilde{L}(a) = L(a)$ für jedes* $a \in \mathfrak{A}$ *besteht.*

Beweis. Jedes $L \in \hat{\mathfrak{A}}$ kann man als ein universal stetiges lineares Funktional $\tilde{L}$ auf dem konjugierten Modul $\tilde{\mathfrak{A}}$ von $\hat{\mathfrak{A}}$ betrachten, für das $\tilde{L}(a) = L(a)$ für $a \in \mathfrak{A}$ besteht. Daher kann man L universal stetig auf $\tilde{\mathfrak{A}}$ erweitern. Da $\hat{\mathfrak{A}}$ nach Satz 1 reflexiv ist, entspricht jedem universal stetigen linearen Funktional $\tilde{L}$ auf $\tilde{\mathfrak{A}}$ ein einziges Element L in $\hat{\mathfrak{A}}$, für das $\tilde{L}(a) = L(a)$ für $a \in \mathfrak{A}$ besteht. Daher ist die Erweiterung $\tilde{L}$ von L eindeutig bestimmt.

Satz 3. *Wenn die Gleichnung $c = a \frown b$ oder $d = a \smile b$ in $\mathfrak{A}$ gilt, so besteht sie auch in der Funktionalerweiterung $\tilde{\mathfrak{A}}$ von $\mathfrak{A}$, d. h. die zwei Relationen $\frown$, $\smile$ sind invariant bei der Funktionalerweiterung.*

Beweis. Es sei ein positives Element $p > 0$ in $\mathfrak{A}$. Nun bezeichnet man mit $\mathfrak{B}_p$ die Menge aller derartigen Elemente a von $\mathfrak{A}$, dass $0 \leqq a \leqq \nu p$ für eine positive Zahl ν besteht. P sei ein positives lineares Funktional auf $\mathfrak{A}$ mit $P(p) > 0$. Setzt man

$$Q(a) = \underset{\mathfrak{B}_p \ni x \leq a}{\text{Obere Grenze}} \; P(x), \tag{**}$$

so gilt für je zwei positive Elemente a, b

$$Q(a) + Q(b) = \underset{\substack{\mathfrak{B}_p \ni x \leq a \\ \mathfrak{B}_p \ni y \leq b}}{\text{Obere Grenze}} \; P(x+y) \leqq Q(a+b),$$

da aus $\mathfrak{A}_p \in x, y$ stets $\mathfrak{B}_p \ni x+y$ folgt. Für $0 \leqq z \leqq a + b$ gibt es nach I) zwei Elemente x, y, für welche $z = x+y$, $0 \leqq x \leqq a$, $0 \leqq y \leqq b$ besteht, und dabei folgt x, $y \in \mathfrak{B}_p$ aus $z \in \mathfrak{B}_p$ wegen $x, y \leqq z$. Daher besteht auch

$$Q(a+b) = \underset{\mathfrak{B}_p \ni z \leq a+b}{\text{Obere Grenze}} \; P(z) \leqq Q(a) + Q(b).$$

Schliesslich ergibt sich für je zwei a, $b \geqq 0$

$$Q(a+b) = Q(a) + Q(b).$$

Da $x \in \mathfrak{B}_p$ mit $\alpha x \in \mathfrak{B}_p$ für jede positive Zahl α gleichbedeutend ist, gilt auch

---

1) Vgl. H. Nakano: Stetige lineare Funktionale..., Definition 11.1.

$$Q(aa) = \underset{\mathfrak{V}_p \ni x \leqq aa}{\text{Obere Grenze}}\ \mathrm{P}(x) = \underset{\mathfrak{B}_p \ni y \leqq a}{\text{Obere Grenze}}\ P(ay) = aQ(a).$$

Nach Obigem erhält man durch

$$Q(x) = Q(a) - Q(b) \qquad (x = a - b,\ a \geqq 0,\ b \geqq 0)$$

ein positives lineares Funktional Q auf $\mathfrak{A}$. Für dieses Q gilt wegen $p \in \mathfrak{B}_p$

$$(***) \qquad Q(p) = P(p) > 0.$$

Wenn $p \frown q = 0$ in $\mathfrak{A}$ besteht, so gilt

$$({}^{\ *}_{***}) \qquad Q(q) = \underset{\mathfrak{A}_p \ni x \leqq q}{\text{Obere Grenze}}\ P(x) = 0.$$

denn aus $0 \leqq x \leqq \nu p$, $x \leqq q$ $(\nu > 1)$ folgt $\frac{1}{\nu}\ x \leqq p \frown q = 0$, d. h. $x = 0$. Diese zwei Funktionale P, Q lassen sich nach Satz 2 in eindeutiger Weise universal stetig auf $\tilde{\mathfrak{A}}$ erweitern. Nun sei $p \frown q = 0$ in $\mathfrak{A}$ und $p \geqq \tilde{c}$, $q \geqq \tilde{c}$ für ein Element $\tilde{c} \geqq 0$ in $\tilde{\mathfrak{A}}$. Da nach $(**)$ offenbar $P \geqq Q$ ist, folgt $P[p] = Q[p]$ aus $(***)$[1]. Daher gilt $P(\tilde{c}) = Q(\tilde{c})$ wegen $p \geqq \tilde{c} \geqq 0$. Aus $q \geqq \tilde{c} \geqq 0$ folgt andererseits nach $({}^{\ *}_{***})$

$$0 \leqq Q(\tilde{c}) \leqq Q(q) = 0.$$

Daher muss $P(\tilde{c}) = 0$ sein. Da P beliebig sein mag, erhält man $\tilde{c} = 0$. Daher besteht $p \frown q = 0$ auch in $\tilde{\mathfrak{A}}$.

Aus Obigem kann man die Behauptung leicht schliessen, denn $c = a \frown b$ oder $d = a \smile b$ ist gleichbedeutend bzw. mit $(a - c) \frown (b - c) = 0$ oder $(d - a) \frown (d - b) = 0$.

§ 2. Boolesche Moduln.

$\mathfrak{B}$ sei eine Boolesche Algebra. Für zwei Elemente A, $B \in \mathfrak{B}$ verwenden wir hier die Bezeichnung $A + B$ oder AB bzw. statt $A \smile B$ oder $A \frown B$. Die Menge aus allen linearen Formen

$$a = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \cdots + \alpha_\varkappa A_\varkappa$$

$$A_\mu A_\nu = 0 \qquad (\mu \neq \nu)$$

für endlich viele Elemente $A_\nu \in \mathfrak{B}$ und reelle Zahlen α_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, \varkappa)$ bildet einen allgemein teilweisegeordneten Modul, den wir mit $\mathfrak{A}_{\mathfrak{B}}$ bezeichnen wollen. Hierbei soll $A + B = A \dot{+} B$ für $AB = 0$ sein. $\mathfrak{A}_{\mathfrak{B}}$ ist sogar ein Abelscher Ring mit der Einheit I. Wir nennen $\mathfrak{A}_{\mathfrak{B}}$ den *Booleschen Modul* oder *Ring* auf der Booleschen Algebra $\mathfrak{B}$.

Da $a \frown b$ und $a \smile b$ für je zwei a, $b \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{B}}$ immer sinnvoll sind, genügt $\mathfrak{A}_{\mathfrak{B}}$ offenbar der Bedingung I). $\mathfrak{A}_{\mathfrak{B}}$ genügt auch der Bedingung II), was sofort folgt aus dem

Satz 4. *Wenn ein allgemein teilweisegeordneter Modul* $\mathfrak{A}$ *ein derartiges positives Element* e *enthält, dass für jedes* $a \in \mathfrak{A}$ *eine positive*

1) Vgl. H. Nakano: Stetige lineare Funktionale .., Hilfsatz 3.1.

Zahl α mit $-\alpha e \leqq a \leqq \alpha e$ existiert, so gibt es für jedes Element $a > 0$ in $\mathfrak{A}$ ein positives lineares Funktional P mit $P(a) > 0$.

Beweis. $\mathfrak{S}$ sei die Schnitterweiterung von $\mathfrak{A}$. Dann ist das relative Spektrum[1] $\left(\frac{a}{e}, \mathfrak{p}\right)$ in $\mathfrak{S}$ immer endlich, und folglich erhält man durch $P(a) = \left(\frac{a}{e}, \mathfrak{p}\right)$ ein positives lineares Funktional P auf $\mathfrak{A}$. Zwar gibt es für jedes $a > 0$ ein Maximalideal von Projektoren $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{S}$, für das $\left(\frac{a}{e}, \mathfrak{p}\right) > 0$ ist[2].

Aus jedem (endlich additiven) Mass m auf der Booleschen Algebra $\mathfrak{B}$ erhält man durch

$$(^{**}) \qquad P(a) = \alpha_1 mA_1 + \alpha_2 mA_2 + \cdots + \alpha_\varkappa mA_\varkappa$$

ein positives lineares Funktional P auf dem Booleschen Modul $\mathfrak{A}_{\mathfrak{B}}$. Umgekehrt erhält man ein Mass m durch

$$(^{**}_{\ *}) \qquad mA = P(A)$$

aus einem positiven linearen Funktional P auf $\tilde{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{B}}$.

$\tilde{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{B}}$ sei die Funktionalerweiterung von $\mathfrak{A}_{\mathfrak{B}}$. Die Menge aller Teile[3] der Einheit I in $\tilde{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{B}}$ bildet eine *universale Boolesche Algebra*,[4] welche man hier mit $\tilde{\mathfrak{B}}$ bezeichnet. $\tilde{\mathfrak{B}}$ enthält offenbar alle Elemente von $\mathfrak{B}$. jedem Mass m auf $\mathfrak{B}$ entspricht nach $(^{**})$ ein positives lineares Funktional P auf $\mathfrak{A}_{\mathfrak{B}}$. Dieses P lässt sich nach Satz 2 eindeutig und universal stetig auf $\tilde{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{B}}$ erweitern, und folglich erhält man nach $(^{**}_{\ *})$ die einzige Erweiterung von m auf $\tilde{\mathfrak{B}}$, die *universal totaladditiv*[5] ist. Daher besteht der

Satz 5. *Für jede Boolesche Algebra $\mathfrak{B}$ gibt es eine universale Erweiterung*[6] $\tilde{\mathfrak{B}}$ *von $\mathfrak{B}$, auf welche man jedes (endlich additive) Mass auf $\mathfrak{B}$ in eindeutiger Weise universal totaladditiv erweitern kann.*

---

1) Vgl. H. Nakano: Eine Spektraltheorie, Definition 3.1.

2) Vgl. 1), Satz 4.4.

3) H. Nakano: Teilweise geordnete Algebra, Japanese Jour. Math. **17** (1941), 425-511, Definition 5.1.

4) Eine Boolesche Algebra $\mathfrak{A}$ heisst *universal*, wenn $\bigwedge_\alpha A_\alpha$, $\bigvee_\alpha A_\alpha$ für jede Menge von Elementen $\{A_\alpha\}$ stets sinnvoll sind.

5) Ein Mass m auf einer Booleschen Algebra $\mathfrak{A}$ heisst *universal totaladditiv*, wenn für jede abnehmende Menge von Elementen $\{A_\alpha\}$ mit $\bigwedge_\alpha A_\alpha = 0$ stets

$$\underset{\alpha}{\text{Untere Grenze}}\ mA_\alpha = 0$$

ist.

6) eine $\mathfrak{B}$ umfassende universale Boolesche Algebra.