121. *Sur la distribution des valeurs**).

Par Yosiro TUMURA.
Sizuoka Kotogakko.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., Dec. 12, 1942.)

1. Soit $\varDelta$ des domaines du z-plan, dont la frontière finie γ consiste de nombre fini ou une infinité dénombrable des arcs analytiques, et ne converge que vers le point à l'infini. Soit encore $w=f(z)$ une fonction uniforme et méromorphe dans $\varDelta$ et sur sa frontière finie γ, qui prend dans $\varDelta$ une valeur appartenant au domaine D du w-plan entouré par le nombre fini des arcs analytiques Γ, et sur γ celle appartenant à Γ. Désignons par $\varDelta_r$ des domaines communs à $\varDelta$ et au cercle $|z|<r$, et par θ_r des arcs de $|z|=r$ contenus dans $\varDelta$. Définissons les quantités $m(r, w, f; \varDelta)$ $N(r, w, f; \varDelta)$, $T(r, w, f; \varDelta)$ et $T(r, f; \varDelta)$ comme le suivant:

$$m(r, w, f; \varDelta)=\frac{1}{2\pi}\int_{\theta_r}\overset{+}{\log}\frac{1}{|f(re^{i\varphi})-w|}d\varphi .$$

Désignant par $n(r, w, f; \varDelta)$ le nombre des racines de l'équation $f(z)-w=0$ dans $\varDelta$ compté suivant leurs multiplicités,

$$N(r, w, f; \varDelta)=\int_0^r[n(t, w, f; \varDelta)-n(0, w, f; \varDelta)]\frac{dt}{t}+n(0, w, f; \varDelta)\log r ,$$

et

$$T(r, w, f; \varDelta)=m(r, w, f; \varDelta)+N(r, w, f; \varDelta) .$$

Soient $A(r, f; \varDelta)$ l'aire sphérique (ou l'on peut admettre l'aire euclidienne si D est borné) des domaines qui sont l'images de $\varDelta_r$ par $w=f(z)$; et $A(D)$ celle de D. Posons

$$T(r, f; \varDelta)=\frac{1}{A(D)}\int_0^r A(t, f; \varDelta)\frac{dt}{t} .$$

Alors, M. Kunugui a conjecturé[1] que

i) Pour deux valeurs a et b appartenant à D, on ait

$$T(r, a, f; \varDelta)-T(r, b, f; \varDelta)=0\,(I) .$$

ii) Pour une valeur de D, on ait

$$T(r, a, f; \varDelta)=T(r, f; \varDelta)+0\,(I) .$$

Suivant cette conjecture, MM. Kunugui[2], Tuji[3] et moi[4] ont déjà obtenu quelques résultats.

2. Nos résultats obtenus sont suivants:

---

*) Monbusyo-Kagakukenkyu.

1) Mai, (1941).

2) K. Kunugi, Une généralisation des théorèmes de MM. Picard-Nevanlinna sur les fonctions méromorphes. Ce Proc. **17** (1941).

3) M. Tuji, On the behaviour of an inverse function of a meromorphic function at its transcendental singular point. III. Proc. **18** (1942).

4) Y. Tumura, a) Sur le problème de M. Kunugui. Proc. **17** (1941); b) Sur le premier théorème dans la théorie des fonctions méromorphes. Proc. **18**.

Théorème I. *Pour deux valeurs a et b de D, nous avons*

$$|T(r,a,f;\Delta)-T(r,b,f;\Delta)|<\Omega(r)+h(a,b),$$

où $h(a,b)$ désigne un constant ne dépendant que des distance entre a, b et la frontière de D et la valeur $f(0)$, et $\Omega(r)$ vérifie toutes les inégalités suivantes :

(A) $$\Omega(r)<\sqrt{2\pi A(r,f;\Delta)\log r}\,.$$

Par conséquent, si $\lim A(r,f;\Delta)=\infty$, sauf l'ensemble E_r où la variation de $\log\log r$ est bornée, nous avons

$$\Omega(r)<C\sqrt{T(r,f;\Delta)}\log T(r,f;\Delta)^{1)}\,.$$

Si $A(r,f;\Delta)$ est bornée,

$$\Omega(r)<C\sqrt{\log r}\,.$$

(B) $$\Omega(r)<C\int_{\gamma_r}|d\arg z|,$$

où γ_r désigne une portion de la frontière γ de Δ qui est contenue dans le cercle $|z|<r$.

(C) *Désignant par $\nu(r)$ une moitié du nombre des points communs à $|z|=r$ et γ,*

$$\Omega(r)<\int_0^r\frac{\nu(t)}{t}dt\,.$$

Le constant C dépend de a et b.

Théorème II. *Pour une valeur w de D, nous avons*

$$|T(r,w,f;\Delta)-T(r,f;\Delta)|<\Omega(r)+h(w),$$

où $\Omega(r)$ désigne une quantité satisfaisant à toutes deux conditions (A) *et* (B) *de théorème précédent.*

Nous venons prouver ces deux théorèmes sous l'hypothèse (H) : Si Δ consiste de nombreux domaines connexes, $f(z)$ peut être indépendante dans chaque de ses composants, c'est-à-dire il n'est pas nécessaire qu'une fonction définie dans un composant de Δ peut être prolongée à celle définie dans l'autre le long d'un chemin quelconque.

Sous cette hypothèse notre évaluation de $\Omega(r)$ est assez précise, comme l'exemple simple le montre. En effet nous pouvons construire une fonction pour laquelle $T(r,f;\Delta)=0\,(r^2)$ et

$$\Omega(r)>\text{const.}\,r\,.$$

Donc, la conjecture de M. Kunugui est en général répondue négativement[2].

---

1) De même, on peut prouver que, sauf E_r où la variation de $\log r$ est bornée,

$$\Omega(r)<C\sqrt{T(r,f;\Delta)\log r}\log T(r,f;\Delta)\,.$$

2) Récemment M. Kunugui a publié la Note : Sur la théorie de la distribution des valeurs Proc. **18** (1942), dans laquelle il a dónné une démonstration de (i). Mais dans sa démonstration il y a une erreur essentielle. Son hypothèse est aussi (H).

3. Dans le cas où $\varDelta$ est un seul domaine connexe, nous pouvons représenter $\varDelta$ conformément à un domaine δ du ζ-plan, tel que

i) Toutes les frontières de δ sont les coupures rectilignes $arg\,\zeta = const.$

ii) Tous les éléments frontières à $z=\infty$ correspond à ceux à $\zeta=\infty$.

iii) La frontière de δ ne converge que vers $\zeta=\infty$.

Soit $z=z(\zeta)$ la fonction qui représente $\varDelta$ à tel domaine δ. Alors nous avons le

Théorème III. *Si $\varDelta$ consiste d'un seul domaine représentant $\varDelta$ à un domaine δ ci-dessus par la fonction $z=z(\zeta)$, nous avons pour toute la valeur w de D*

$$T(r, w, g\,;\,\delta)-T(r, g\,;\,\delta)=0\,(I)$$

où $g(\zeta)=f\{z(\zeta)\}$.

4. De Théorème II, nous pouvons prouver le théorème de MM. Iversen-Kunugui[1]:

Théorème IV. *Soient B un domaine quelconque du z-plan, C l'ensemble de tous les points frontières de B, et z_0 un point qui n'est pas isolé dans C. Soient, encore, $w=f(z)$ une fonction uniforme et méromorphe dans B, $S^{(B)}_{z_0}$ et $S^{(C)}_{z_0}$ domaines d'indétermination*[2] *de $f(z)$ au point $z=z_0$ relatif au domaine B et relatif au contour C. Alors tout le point situé sur la frontière du $S^{(B)}_{z_0}$ appartiet à $S^{(C)}_{z_0}$.*

Supposons que $z_0=\infty$, ce qui n'implique aucune généralité. Faisons l'antithèse qu'il existe sur la frontière de $S^{(B)}_{z_0}$ un point ω qui n'appartienne pas à $S^{(C)}_{z_0}$. $S^{(C)}_{z_0}$ étant l'ensemble ferme, nous pouvons prendre le cercle D: $|w-\omega|<\rho$, tel que D ne contient aucun point de $S^{(C)}_{z_0}$ à son intérieur ou sur son contour, et que sur la frontière d'un domaine $\varDelta$ du z-plan correspondant à D $f(z)$ est méromorphe. ω étant un point frontière de $S^{(B)}_{z_0}$, D contient un point a qui n'appartient pas à $S^{(B)}_{z_0}$. Par conséquent, on a

$$T(r, a, f\,;\,\varDelta)=0\,(\log r)\,,$$

c'est-à-dire

$$T(r, f\,;\,\varDelta)=0\,(\log r)\,.$$

Or, c'est contradictoire avec la définition de $S^{(B)}_{z_0}$.

5. Revenons la fonctions méromorphe dans $\varDelta$ définie au no. 1.

Théorème V. *Si $T(r,f\,;\,\varDelta)=0\,(\log r)$, alors $\varDelta$ consiste d'un nombre fini des composants connexes, chacun desquels est finiment connexe, c'est-à-dire, il est enouré par le nombre limité des courbes.*

Théoreme VI. *Si $S^{(\varDelta)}_{\infty}$ contient un point de D au moins, nous avons*

$$\lim_{r\to\infty}\frac{T(r,f\,;\,\varDelta)}{\log r}=\infty\,,$$

par conséquent, $\lim\limits_{r\to\infty} A(r,f\,;\,\varDelta)=\infty$. De plus, $S^{(\varDelta)}_{\infty}$ coïncide à la fermeture de D.

---

1) F. Iversen, Sur quelques propriétés des fonctions monogènes au voisinage d'un point singulier. Öfv. af Finska Vet.-Soc. Förh., **58** (1916). K. Kunugui, Sur un théorème de MM. Seidel-Beurling. Proc. **15** (1939).

2) Voir les ouvrages cités de MM. Iversen et Kunugui.

Théorème VII. *Pour* $T(r,f;\Delta)=0(\log r)$, *il suffit et il faut que* $S_\infty^{(\Delta)}-S_\infty^{(\Gamma)}$ *soit nul.*

Théorème VIII (de M. Iversen[1]). *Si* $T(r,f;\Delta)=0(\log r)$, *le nombre des racines de l'équation* $f(z)-w=0$ *dans* Δ *est, pour toutes les valeurs de* D, *égale à*

$$\lim_{r\to\infty}\frac{T(r,f;\Delta)}{\log r}.$$

De plus, $S_\infty^{(\Delta)}$, *par conséquent* $S_\infty^{(\Gamma)}$ *aussi, est partout discontinu sur le contour de* D.

6. Désignons par $M(r,w,f;\Delta)$ maximum de $\dfrac{1}{|f(z)-w|}$ sur θ_r. Alors nous avons le

Théorème IX. *Pour une valeur* a *de* D, *si l'équation* $f(z)-a=0$ *ne possède aucune racine dans* Δ, *alors il existe dans* Δ *un chemin de détermination* a. *De plus, nous avons, pour* $k>1$,

$$T(r,a,f;\Delta)\leqq \overset{+}{\log} M(r,a,f;\Delta)\leqq\frac{k+1}{k-1}T(kr,a,f;\Delta)+\text{const.}$$

et
$$\log T(r,a,f;\Delta)>\varkappa\int^r\frac{dr}{r\theta(r)}-\text{const.}$$

7. Quant à second théorème fondamental, nous l'avons déjà établi[3]:

Théorème X. *Soient* w_ν q *points de* D, *alors on a*

$$\sum_1^q N(r,w_\nu,f;\Delta)-\sum_1^q N_1(r,w_\nu,f;\Delta)+\sum_1^p N(r,\Gamma_\mu)-\sum_1^p N_1(r,\Gamma_\mu)$$
$$>(p+q-2)T(r,f;\Delta)+2N(r,\Delta)-\Omega(r)$$
$$N(r,\Gamma_\mu)<T(r,f;\Delta)+\Omega(r)$$

où $\Omega(r)$ *est une fonction satisfaisant à* (*A*) *du Théorème* I, $N(r,\Gamma_\mu)$ *désigne l'intégral logarithmique du nombre des courbes* γ *qui sont fermées dans le cercle* $|z|<r$ *et couvrent* Γ_μ *par la correspondance* $w=f(z)$, *compté suivant leur multiplicité de recouvrement,* $N_1(r,\Gamma_\mu)$ *celle de la somme des multiplicités de recouvrement diminuées un, et* $N(r,\Delta)$ *celle du nombre des domaines parfaitement intérieurs à* $|z|<r$.

En particulier, ce théorème contient l'extension du théorème de M. Borel: le nombre des valeurs w_ν est au plus deux, dont les ordres, types, ou classes sont plus bas que celui de $T(r,f;\Delta)$

Quant au nombre des valeurs exceptionelles de Γ, ce théorème enseigne peu. Nous pouvons obtenir pour cet objet une proposition précise introduisant le nombre des arcs θ_r. Mais, en général, il peut exister une infinité des valeurs exceptionnelles sur Γ.

---

1) F. Iversen, loc. cit.

2) Cette proposition contient celle de MM. Iversen-Nosiro. Voir Iversen, loc. cit., ou K. Nosiro, On the theory of cluster sets of a analytic functions. Jour. Fac. Sc. Hokkaido Imp. Univ., S. I. **6** (1958).

3) Y. Tumura, loc. cit. a): Quelques apllications de la théorie de M. Ahlfors. Jap. Jour. Math., **18** (1942).

8. Considérons maintenant un domaine B qui est une portion d'une surface de Riemann, tel que

(K) Le nombre des points de B qui possèdent une coordonne commune z est au plus k. Nous pouvons admettre que pour une valeur z ce nombre est égal à k, mais pour l'autre inférieur à k, ou égal à zéro.

Soit $f(z)$ une fonction qui est uniforme et méromorphe (sauf le point critique algébrique) dans le domaine riemannien B. Par conséquent $f(z)$ est une fonction multiforme par rapport à z. Appelons la fonction possédant telle propriété, la fonction algébroïde généralisée.

Considérons encore un domaine ou des domaines Δ et une fonction méromorphe $f(z)$ dans Δ, tels que

i) Δ est des domaines riemanniens definis par la condition (K).

ii) La frontière de Δ consiste d'une nombre fini ou und infinité dénombrable des courbes analytiques, et ne converge que vers les points à l'infini.

iii) $f(z)$ est une fonction algébroïde généralisée dans Δ et sur sa frontière finie γ.

iv) $f(z)$ prend dans Δ une valeur appartenant à un domaine du w-plan entouré par un nombre fini des courbes analytiques Γ, et sur γ celle de Γ.

Introduisons les quantités $m(r, w, f; \Delta)$, $N(r, w, f; \Delta)$, $T(r, w, f; \Delta)$ et $T(r, f; \Delta)$ pour l'algébroïde généralisée de même manière que nr. I[1].

Tous les résultats dans les nr. 2–5 sont aussi prouvés pour une fonction algébroïde généralisée. Par exemple.

Théorème XI. *Soient B un domaine riemannien vérifiant la condition (K), C l'ensemble de tous les points frontières de B, z_0 un point qui n'est pas isolé dans C, et $f(z)$ l'algébroïde généralisée dans B. Soient encore $S_{z_0}^{(B)}$ et $S_{z_0}^{(C)}$ deux ensembles d'indétermination au point z_0 relatif au domaine B et relatif au son contour C. Alors la frontière de $S_{z_0}^{(B)}$ est contenue dans celle de $S_{z_0}^{(C)}$[2].*

Les démonstrations détaillées seront données dans un autre Mémoire[3].

1) Quant à la définition pour une fontion charactéristique d'une algébroïde dans le cercle, voir H. Selberg, Algebroide Funktionen und Umkehrfunktionen Abelscher Integrale. Avh. ut. av Det Norske Vid.-Akad. i Oslo, **1** (1934), No. 8.

2) J'ai prouvé ce théorème sous une condition moins générale dans [a].

3) Recherches sur la distribution des valeurs des fonctions analytiques.