118. *Zur projektiven Theorie der Bahnkurven dritter Ordnung.*

Von Hitoshi HOMBU und Misao MIKAMI.
Kyusyu Teikoku-Daigaku und Hukuoka Koto-Gakko.
(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., Dec. 12, 1942.)

1. In einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit wird ein System der „paths" (oder Bahnkurven) 3-ter Ordnung durch ein System der Differentialgleichungen 3-ter Ordnung

$$x^{(3)i}+H^i(t, x, x^{(1)}, x^{(2)})=0 \qquad (i=1, 2, \dots, n) \tag{1}$$

$(x^{(m)i}=d^m x^i/dt^m)$ gegeben. Vor kurzem hat einer von uns eine Begründung der projektiven Theorie der „paths", die mit einer merkwürdigen Eigenschaft Γ ausgestattet sind, gegeben[1]. Um diese Eigenschaft kurz zu erläutern, beachten wir vorerst den Unterschied zwischen dem Linien- und dem Kurvenelement. Durch Angabe einer beliebigen Parametrisierung t auf einer Kurve sind die Grössen $x^i, x^{(1)i}, \dots, x^{(m)i}$ Bestimmungszahlen des Linienelements m-ter Ordnung der Kurve, während das Kurvenelement durch die Ableitungen in einer Koordinate $x^n=z$

$$x^i, \frac{dx^a}{dz}, \frac{d^2x^a}{dz^2}, \dots, \frac{d^m x^a}{dz^m} \qquad (a=1, 2, \dots, n-1)$$

bestimmt wird. Ein Linienelement einer gewissen Ordnung bestimmt einziges Kurvenelement derselben Ordnung, aber einem Kurvenelement sind unendlichviele Linienelemente zugehörig. Da jedes System eines Linienelements 2-ter Ordnung und eines Anfangswerts des Parameters t eine Bahnkurve des Systems (1) bestimmt, so laufen durch ein Kurvenelement 2-ter Ordnung unendlichviele Bahnkurven. Wenn alle diese Kurven bis auf Parametrisierung stets übereinanderliegen, so sagt man, dass das System (1) die Eigenschaft Γ besitzt. Dafür ist es notwendig und hinreichend, dass die Beziehungen von der Form bestehen:

$$\begin{cases} \Delta_1 H^i=3H^i+P_1 x^{(1)i}, \qquad \Delta_2 H^i=-3x^{(2)i}+P_2 x^{(1)i}, \\ \partial_t H^i=P_0 x^{(1)i}, \end{cases} \tag{2}$$

wo

$$\Delta_1 f=f_{(1)j}x^{(1)j}+2f_{(2)j}x^{(2)j}, \qquad \Delta_2 f=f_{(2)j}x^{(1)j} \tag{3}$$

$(f_{(r)j}=\partial f/\partial x^{(r)j})$ sind. Und das System der Bahnkurven (1) stimmt dann mit dem System aller Integralkurven eines Differentialgleichungssystem — assoziertes System — von der Gestalt

$$\frac{d^3x^a}{dz^3}+f^a\left(x^\beta, z\,;\ \frac{dx^\beta}{dz}, \frac{d^2x^\beta}{dz^2}\right)=0 \qquad (a, \beta=1, 2, \dots, n-1) \tag{4}$$

überein.

1) H. Hombu, Die projektive Theorie eines Systems der „paths" höherer Ordnung I, Japanese Journ. of Math., **15** (1938), 139-196; II, Journ. Fac. Sc., Hokkaidō Imp Univ., (I) **7** (1938), 35-94.

2. Wenn zwei Systeme (1) und $x^{(3)i}+\widetilde{H}^i=0$ zu demselben assozierten System gehören, heissen sie projektiv verwandt. Dabei sind H^i und $\widetilde{H}^i$ mit der folgenden Beziehung verknüpft:

$$\widetilde{H}^i=H^i+\rho x^{(1)i}, \tag{5}$$

wo ρ eine gewisse Funktion von t und dem Linienelement ist, und umgekehrt. Wir haben früher gezeigt, dass unter allen miteinander projektiv verwandten Systemen oder einer projektiven Klasse der Systeme der Bahnkurven ein eindeutig bestimmtes System (das ausgezeichnete System) gibt, das unter jeder projektiven Transformation (5) invariant bleibt. Somit können wir ein projektiv invariantes Übertragungsschema unmittelbar aus diesem ausgezeichneten System herleiten. Zur Bildung der Übertragungsparameter und des kovarianten Differentials benutzen wir dabei die Ableitungen der Funktionen H^i bis zur 4-ten bzw. 3-ten Ordnung. In dieser Arbeit möchten wir, falls die Dimensionszahl des Raumes grösser als 2 ist, eine andere projektiv invariante Übertragung herleiten, die aus den Ableitungen niedrigerer Ordnung gebildet wird. Der Versuch beruht auf den projektiven Eigenschaften verschiedener Torsionsgrössen in der affinen Theorie. Um die Rechnung einfach durchzuführen, wollen wir nur die Systeme der Bahnkurven mit verschwindenden P_0, P_1, P_2 in Betracht ziehen. Das wird dadurch gerechtfertigt, dass ein beliebig vorgegebenes System mit nicht verschwindenden P_i stets mit den Systemen mit verschwindenden P_i projektiv verwandt ist. Aber bei dieser Überlegung ist es nicht immer so leicht, die vorbesagte Erniederung der Ordnung der gebrauchten Ableitungen einzusehen. Die ausführliche Untersuchung möchten wir bald bei anderer Gelegenheit veröffentlichen.

3. In der affinen Theorie der „paths" haben wir das kovariante Differential Dv^i eines Vektors v^i, das System der Grundübertragungen $\delta x^{(1)i}$, $\delta x^{(2)i}$, und die kovarianten Ableitungen $\nabla_k^{(0)}v^i$, $\nabla_k^{(1)}v^i$, $\nabla_k^{(2)}v^i$ folgendermassen erklärt[1]:

$$Dv^i=dv^i+\sum_{u=0}^{1}\underset{u}{\Gamma}{}^i_{jk}v^j dx^{(u)k}; \tag{6}$$

$$\delta x^{(q)i}=dx^{(q)i}+\sum_{r=0}^{q-1}Q^{i(r)}_{(q)j}dx^{(r)j}; \tag{7}$$

$$\begin{cases} Dv^i=\displaystyle\sum_{q=0}^{2}\nabla_k^{(q)}v^i\cdot\delta x^{(q)k}; \\ \nabla_k^{(2)}v^i=v^i_{(2)k}, \quad \nabla_k^{(q)}v^i=\bar{\nabla}_k^{(q)}v^i+\underset{q}{\Gamma}{}^{*i}_{jk}v^j \quad (q=0,1), \end{cases} \tag{8}$$

wo

$$\underset{q}{\Gamma}{}^i_{jk}=\frac{q+1}{3}H^i_{(2)j(q+1)k}; \quad \underset{0}{\Gamma}{}^{*i}_{jk}=\underset{0}{\Gamma}{}^i_{jk}-Q^{l(0)}_{(1)k}\underset{1}{\Gamma}{}^i_{jl}, \quad \underset{1}{\Gamma}{}^{*i}_{jk}=\underset{1}{\Gamma}{}^i_{jk}; \tag{9}$$

$$\begin{cases} Q^{i(0)}_{(1)j}=\dfrac{1}{3}H^i_{(2)j}, \qquad Q^{i(0)}_{(2)j}=\dfrac{1}{3}H^i_{(1)j}; \\ R^{i(0)}_{(1)j}=Q^{i(0)}_{(1)j}, \quad R^{i(1)}_{(2)j}=2Q^{i(0)}_{(1)j}, \quad R^{i(0)}_{(2)j}=Q^{i(0)}_{(2)j}-2Q^{i(0)}_{(1)k}Q^{k(0)}_{(1)j}; \end{cases} \tag{10}$$

---

1) A. Kawaguchi und H. Hombu, Die Geometrie des Systems der partiellen Differentialgleichungen, Journ. Fac. Sc., Hokkaidō Imp. Univ., (I) **6** (1937), 21–62, insbesondere Kap. 2.

$$\bar{\nabla}_k^{(q)} v^i = v^i_{(q)k} - \sum_{s=q+1}^{2} R^{l(q)}_{(s)k} v^i_{(s)l} \tag{11}$$

sind. Die Parameter des kovarianten Differentials lassen sich in wohlbekannter Weise ableiten aus den Parametern einer beliebigen kovarianten Ableitung längs der Kurve, zwar in diesem Falle aus den Kosambischen Parametern G^i_j:

$$G^i_j = \frac{1}{3} H^i_{(2)j} \qquad (\underset{0}{\Gamma}{}^i_{jk} = G^i_{j(1)k}, \quad \underset{1}{\Gamma}{}^i_{jk} = 2G^i_{j(2)k}). \tag{12}$$

Von den Torsionsgrössen dieser Übertragung ziehen wir im folgenden die folgenden drei in Betracht:

$$\left\{\begin{aligned} & S^{(0)(1)j}_{k\ \ l(0)} = \frac{1}{3} H^j_{(2)k(2)l}, \\ & S^{(0)(0)j}_{k\ \ l(0)} = \frac{1}{6} \{\bar{\nabla}^{(1)}_l H^j_{(2)k} - \bar{\nabla}^{(1)}_k H^j_{(2)l}\}, \\ & S^{(0)(1)j}_{k\ \ l(2)} = \frac{1}{6} \{\bar{\nabla}^{(1)}_l H^j_{(1)k} - 2\bar{\nabla}^{(0)}_k H^j_{(2)l} - \frac{2}{3} \bar{\nabla}^{(1)}_l H^j_{(2)h} \cdot H^h_{(2)k}\}. \end{aligned}\right. \tag{13}$$

Durch Überschiebung mit $x^{(1)k}$ entsteht aus (11)

$$\left\{\begin{aligned} & x^{(1)j} \bar{\nabla}^{(2)}_j f = \Delta_2 f, \qquad x^{(1)j} \bar{\nabla}^{(1)}_j f = \Delta_1 f, \\ & x^{(1)j} \bar{\nabla}^{(0)}_j f = \frac{df}{dt} = \sum_{q=0}^{1} x^{(q+1)l} \frac{\partial f}{\partial x^{(q)l}} - H^l \frac{\partial f}{\partial x^{(2)l}}, \end{aligned}\right. \tag{14}$$

da $R^{i(0)}_{(1)j} x^{(1)j} = -x^{(2)i}$, $R^{i(0)}_{(2)j} x^{(1)j} = H^i$ sind.

4. Der Einfachheit halber wollen wir statt der projektiven Transformation (5) die Transformation

$$H^i(\varepsilon) = H^i + \varepsilon \rho x^{(1)i} \tag{15}$$

einführen. Der Parameter ε nimmt beliebige Werte im Interval [0,1] an, und der Wert $\varepsilon = 0$ entspricht dem ursprünglichen System (H^i) und der Wert $\varepsilon = 1$ dem transformierten $(\widetilde{H}^i)$. Aus (15) ergibt sich sofort

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} H^i(\varepsilon) = \rho x^{(1)i}; \tag{15'}$$

$\partial / \partial \varepsilon$ ist nichts anderes als der Operator der infinitesimalen projektiven Transformation. Dafür, dass alle Funktionen $P_i(\varepsilon)$ des Systems $\big(H^i(\varepsilon)\big)$ verschwinden, muss ρ die Gleichungen

$$\partial_t \rho = 0, \quad \Delta_1 \rho = 2\rho, \quad \Delta_2 \rho = 0 \tag{16}$$

erfüllen. Nun können wir beweisen

$$\left\{\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \bar{\nabla}^{(2)}_k f = \bar{\nabla}^{(2)}_k \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f, \\ & \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \bar{\nabla}^{(1)}_k f = \bar{\nabla}^{(1)}_k \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f - \frac{2}{3} \rho_{(2)k} \cdot \Delta_2 f, \\ & \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \bar{\nabla}^{(0)}_k f = \bar{\nabla}^{(0)}_k \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f - \frac{1}{3} \{\rho_{(2)k} \Delta_1 + \rho \bar{\nabla}^{(2)}_k + \bar{\nabla}^{(1)}_k \rho \cdot \Delta_2\} f, \end{aligned}\right. \tag{17}$$

wo f eine nicht nur von Linienelement sondern auch von ε abhängige Funktion ist. Z. B. unter Berücksichtigung der Linearität des Operators $\bar{\nabla}_k^{(0)} f$ rechnen wir nach (11), (15′)

$$3\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\bar{\nabla}_k^{(0)} f = 3\bar{\nabla}_k^{(0)}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}f + 3\left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\bar{\nabla}_k^{(0)}\right)f$$

$$= 3\bar{\nabla}_k^{(0)}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}f - \frac{\partial f}{\partial x^{(1)l}}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}H^l_{(2)k} - \frac{\partial f}{\partial x^{(2)l}}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(H^l_{(1)k} - \frac{2}{3}H^l_{(2)j}H^j_{(2)k}\right)$$

$$= 3\bar{\nabla}_k^{(0)}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}f - \rho_{(2)k}\Delta_1 f - \rho\bar{\nabla}_k^{(2)} f - \bar{\nabla}_k^{(1)}\rho\cdot\Delta_2 f\,.$$

Im folgenden untersuchen wir die projektive Eigenschaft derjenigen Vektoren, welche sich aus den Torsionsgrössen (13) durch Überschiebung ergeben.

(i) Wir setzen erstens

$$\underset{1}{S}_k = S_{k\ l(0)}^{(0)(1)\ l}\,; \tag{18}$$

dann erhalten wir nach (13), (16)

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\underset{1}{S}_k(\varepsilon) = 0\,. \tag{19}$$

Dies besagt, dass $\underset{1}{S}_k$ bei beliebiger projektiver Transformation invariant bleibt, d. h. $\underset{1}{\tilde{S}}_k = \underset{1}{S}_k$.

(ii) Setzen wir zweitens

$$\underset{2}{S}_k = S_{k\ l(0)}^{(0)(0)\ l}\,, \tag{20}$$

so haben wir

$$6\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\underset{2}{S}_k = -(n-2)\rho_{(2)k}, \text{ oder bei Integration } 6\underset{2}{\tilde{S}}_k = 6\underset{2}{S}_k - (n-2)\rho_{(2)k}, \tag{21}$$

da nach (15), (16), (17)

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\bar{\nabla}_l^{(1)} H^j_{(2)k} = \bar{\nabla}_l^{(1)}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}H^j_{(2)k} - \frac{2}{3}\rho_{(2)l}\Delta_2 H^j_{(2)k} = \bar{\nabla}_l^{(1)}(\rho_{(2)k}x^{(1)j}) + 2\rho_{(2)l}\delta^j_k$$

ist.

(iii) Schliesslich rechnen wir

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\bar{\nabla}_l^{(1)} H^l_{(1)k} = (n+1)\rho_{(1)k} + \bar{\nabla}_k^{(1)}\rho + \frac{2}{3}\rho_{(2)l}H^l_{(2)k}\,,$$

$$-2\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\bar{\nabla}_k^{(0)} H^l_{(2)l} = \frac{2}{3}\rho_{(2)k}H^l_{(2)l} + \frac{2}{3}\rho\bar{\nabla}_k^{(2)} H^l_{(2)l} - 2n\bar{\nabla}_k^{(1)}\rho\,,$$

$$-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}(\bar{\nabla}_l^{(1)} H^l_{(2)h}\cdot H^h_{(2)k}) = -\frac{2}{3}(n+2)\rho_{(2)h}H^h_{(2)k} - \frac{2}{3}H^l_{(2)l}\rho_{(2)k}\,,$$

und für die Grösse

$$S_{k\ l(2)}^{(0)(1)\ l} = \frac{1}{6}\left\{\bar{\nabla}_l^{(1)} H^l_{(1)k} - 2\bar{\nabla}_k^{(0)} H^l_{(2)l} - \frac{2}{3}\bar{\nabla}_l^{(1)} H^l_{(2)h}\cdot H^h_{(2)k}\right\}$$

erreichen wir die Beziehung

$$(22)\qquad 6\frac{\partial}{\partial\varepsilon}S^{(0)(1)\,l}_{k\;\;l(2)}=\frac{2}{3}\rho H^{l}_{(2)k(2)l}-(n-2)\bar{\Gamma}^{(1)}_{k}\rho\,.$$

Durch Überschiebung des letzten Ausdrucks mit $x^{(1)k}$, haben wir nach (14)

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\{6S^{(0)(1)\,l}_{k\;\;l(2)}x^{(1)k}\}=-4(n-1)\rho\,.$$

Wie wir schon bemerkt haben[1], kennen wir dass

$$(23)\qquad S^{(0)(1)\,l}_{k\;\;l(2)}x^{(1)k}=2S\qquad\left(S=\frac{1}{6}H^{l}_{(1)l}-\frac{1}{18}H^{l}_{(2)h}H^{h}_{(2)l}-\frac{1}{6}\frac{d}{dt}H^{l}_{(2)l}\right)$$

ist. Daher gewinnen wir die Beziehung

$$(24)\qquad 3\frac{\partial}{\partial\varepsilon}S(\varepsilon)=-(n-1)\rho,\ \text{oder bei Integration}\ 3\tilde{S}=3S-(n-1)\rho,$$

welche wir in voriger Untersuchung zweckmässig benutzt haben. Nämlich mit Rücksicht auf die projektive Transformation (5) oder (15′) finden wir das sogenannte „ausgezeichnete“ System der im Betracht kommenden projektiven Klasse[1]

$$[\mathrm{I}]\qquad x^{(3)i}+\mathfrak{H}^{i}\equiv x^{(3)i}+H^{i}+\frac{3}{n-1}Sx^{(1)i}=0\,.$$

Ferner, da der Koeffizient von ρ in (22) nach (i) projektiv invariant ist, erhalten wir für die Grösse

$$(25)\qquad \underset{3}{S_k}=S^{(0)(1)\,l}_{k\;\;l(2)}+\frac{1}{n-1}SS^{(0)(1)\,l}_{k\;\;l(0)}$$

die Beziehung

$$(26)\qquad 6\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\underset{3}{S_k}=-(n-2)\bar{\Gamma}^{(1)}_{k}\rho\,,\qquad 6\underset{3}{\tilde{S}_k}=6\underset{3}{S_k}-(n-2)\bar{\Gamma}^{(1)}_{k}\rho\,.$$

5. Nun mit Hilfe von S, $\underset{2}{S_k}$ und $\underset{3}{S_k}$ können wir aus dem Übertragungsschema in § 3 ein projektiv invariantes Schema herleiten. Da für die Parameter G^{i}_{j} der Kosambischen Ableitung (12)

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}G^{i}_{j}=\frac{1}{3}\rho_{(2)j}x^{(1)i}$$

gilt, so ist die Grösse

$$[\mathrm{II}]\qquad \mathfrak{G}^{i}_{j}=G^{i}_{j}+\frac{2}{n-2}\underset{2}{S_j}x^{(1)i}$$

nach (21) projektiv invariant. Damit können wir, ganz analog wie das kovariante Differential in § 3 mit Hilfe von G^{i}_{j} definiert ist (vgl. (12)), das invariante Differential definieren:

---

1) H. Hombu, a. a. O.

$$[\mathrm{III}] \qquad D^* v^i = dv^i + \sum_{u=0}^{1} \underset{u}{\Pi}{}^i_{jk} v^j dx^{(u)k},$$

wo

$$\underset{u}{\Pi}{}^i_{jk} = (u+1)\mathfrak{G}^i_{j(u+1)k} \qquad (u=0,1)$$

ist.

Nächst erkennen wir nach (17), (21), (24), (26), dass die Operatoren

$$[\mathrm{IV}] \quad \begin{cases} \bar{\nabla}^{*(0)}_k f = \bar{\nabla}^{(0)}_k f - \dfrac{2}{n-2}\underset{2}{S_k} \Delta_1 f - \dfrac{2}{n-2}\underset{3}{S_k} \Delta_2 f - \dfrac{1}{n-1} \bar{\nabla}^{(2)}_k f, \\ \bar{\nabla}^{*(1)}_k f = \bar{\nabla}^{(1)}_k f - \dfrac{4}{n-2}\underset{2}{S_k} \Delta_2 f, \\ \bar{\nabla}^{*(2)}_k f = \bar{\nabla}^{(2)}_k f \end{cases}$$

projektiv invariant sind, und sie ferner dem projektiv invarianten, kovarianten Differential des Elements

$$[\mathrm{V}] \quad \begin{cases} \delta^* x^{(1)j} = \delta x^{(1)j} + \dfrac{2}{n-2}\underset{2}{S_k} x^{(1)j} dx^k, \\ \delta^* x^{(2)j} = \delta x^{(2)j} + \dfrac{4}{n-2}\underset{2}{S_k} x^{(1)j} \delta x^{(1)k} + \dfrac{2}{n-2}\underset{3}{S_k} x^{(1)j} dx^k + \dfrac{1}{n-1} S dx^j \end{cases}$$

zugehörig sind:

$$df = \bar{\nabla}^{*(0)}_k f \cdot dx^k + \bar{\nabla}^{*(1)}_k f \cdot \delta^* x^{(1)k} + \bar{\nabla}^{*(2)}_k f \cdot \delta^* x^{(2)k}.$$

Somit mögen wir verschiedene kovariante Ableitungen $\nabla^{*(q)}_k v^i$, die bei projektiver Transformation (5) invariant bleiben, durch

$$D^* v^i = \sum_{q=0}^{2} \nabla^{*(q)}_k v^i \cdot \delta^* x^{(q)k}$$

definieren. Da nach (7), [V]

$$(27) \qquad dx^{(1)i} = \delta^* x^{(1)i} - Q^{*i(0)}_{(1)j} dx^j, \qquad Q^{*i(0)}_{(1)j} = Q^{i(0)}_{(1)j} + \frac{2}{n-2}\underset{2}{S_j} x^{(1)i}$$

ist, erhalten wir durch Ersetzung von $dx^{(1)i}$ in [III] und Vergleich mit (27) die Formel

$$[\mathrm{VI}] \quad \begin{cases} \nabla^{*(2)}_k v^i = v^i_{(2)k}, \\ \nabla^{*(q)}_k v^i = \bar{\nabla}^{*(q)}_k v^i + \underset{q}{\Pi}{}^{*i}_{jk} v^j \qquad (q=0,1), \end{cases}$$

wo $\underset{1}{\Pi}{}^{*i}_{jk} = \underset{1}{\Pi}{}^i_{jk}$ Bestimmungszahlen eines Affinors sind und $\underset{0}{\Pi}{}^{*i}_{jk} = \underset{0}{\Pi}{}^i_{jk} - \underset{1}{\Pi}{}^i_{jl} Q^{*l(0)}_{(1)k}$ gewöhnliche Übertragungsparameter.

Letztens erwähnen wir die folgenden Formel

$$(28) \quad \begin{cases} \Delta_1 \underset{0}{\Pi}{}^{*i}_{jk} = 0, & \Delta_2 \underset{0}{\Pi}{}^{*i}_{jk} = \dfrac{1}{2} \underset{0}{\Pi}{}^{*i}_{jk}, \\ \Delta_1 \underset{1}{\Pi}{}^{*i}_{jk} = -\underset{1}{\Pi}{}^{*i}_{jk}, & \Delta_2 \underset{1}{\Pi}{}^{*i}_{jk} = 0; \end{cases}$$

$$
(29)\qquad \left\{\begin{array}{ll}
[\varDelta_1, \bar{\nabla}_k^{*(0)}]f=0\,, & [\varDelta_2, \bar{\nabla}_k^{*(0)}]f=\bar{\nabla}_k^{*(1)}f\,, \\
{[\varDelta_1, \bar{\nabla}_k^{*(1)}]}f=-\bar{\nabla}_k^{*(1)}f\,, & [\varDelta_2, \bar{\nabla}_k^{*(1)}]f=\bar{\nabla}_k^{*(2)}f\,, \\
{[\varDelta_1, \bar{\nabla}_k^{*(2)}]}f=-2\bar{\nabla}_k^{*(2)}f\,, & [\varDelta_2, \bar{\nabla}_k^{*(2)}]f=0\,,
\end{array}\right.
$$

woraus wir das Verhalten der Grössen $\underset{q}{\Pi}{}^{*i}_{jk}$ und der Operatoren $\bar{\nabla}_k^{*(q)}$ unter Parametertransformationen schliessen können[1].

1) H. Hombu, Neue Begründung der Geometrie des Integrals $s=\int F(x, x^{(1)}, \dots, x^{(m)})dt$ auf die projektive Theorie der „Paths", Mem. Fac. Sc., Kyûsyû Imp. Univ., (A) **1** (1940), § IV.