58. *Bemerkungen über die Liesche Ringe mit Primzahlcharakteristik.*

Von Yozô MATSUSHIMA.

Mathematisches Institut der kaiserlichen Universität zu Nagoya.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., June 12, 1943.)

Ein halbeinfacher Liescher Ring von Primzahlcharakteristik ist bekanntlich nicht immer direkte Summe von einfachen nichtabelschen Ringen. H. Zassenhaus[1] hat aber vermutet, dass er direkte Summe von einfachen nichtabelschen Ringen sein werde, wenn er vollkommen ist. Wir zeigen im folgenden, dass ein Gegenbeispiel zu dieser Vermutung durch Benutzung eines Ringes, der als ein Gegenbeispiel zu einer anderen Zassenhausschen Vermutung von N. Jacobson[2] konstruiert wurde, gegeben werden kann.

1. L sei ein Liescher Ring über einem beliebigen Körper k. Derivation des Ringes L heisst jede eindeutige Abbildung D von L in sich, bei der

$$D(a+b)=Da+Db$$

$$D(\lambda a)=\lambda Da\,, \quad \lambda \in k$$

$$D(a \circ b)=a \circ Db+Da \circ b\,.$$

Z. B. wird durch die Festsetzung $I_x a=x \circ a (a \in L)$ jedem Element x aus L eindeutig eine Derivation I_x zugeordnet. I_x heisst die zu x gehörige innere Derivation. Alle Derivationen von L bilden einen Lieschen Ring $D(L)$, wobei naheliegenden Rechenregeln

$$(D_1+D_2)a=D_1a+D_2a$$

$$(\lambda D)a=\lambda(Da)$$

$$(D_1 \circ D_2)a=D_1(D_2a)-D_2(D_1a)$$

verwendet werden.

Die innere Derivationen bilden ein Ideal $I(L)$ von $D(L)$. Wenn L halbeinfach ist, dann stimmt bei Charakteristik Null $D(L)$ mit $I(L)$ überein[3]. Sogar bei Charakteristik $p \neq 0$ kann es mit derselben Methode wie bei K. Yosida gezeigt werden, dass jeder Teilring von $D(L)$, der $I(L)$ umfasst, halbeinfach ist.

Wenn aber L halbeinfach und direkte Summe von einfachen Idealen ist, können wir folgenden genaueren Satz beweisen:

Satz 1. *L sei ein halbeinfacher Liescher Ring und sei direkte Summe von einfachen Ringen. Dann ist jeder Teilring R von $D(L)$, der $I(L)$ als echter Teilring umfasst, nicht direkte Summe von einfachen Idealen, aber alle Ideale von R sind halbeinfach.*

---

1) H. Zassenhaus, Abhandlungen aus dem Math. Seminar, Hamburg **13** (1940), S. 80.

2) N. Jacobson, American Journal of Mathematics, vol. LXIII (1941).

3) K. Yosida, Japanese Journal of Mathematics, vol. **16** (1938), S. 170.

Beweis: Wenn R direkte Summe von einfachen Idealen ist, so ist $I(L)$ ein direkter Summand von R, denn $I(L)$ ist ein Ideal von R. Sei $R=I(L)+A$, wo A ein von Null verschiedenes Ideal von R ist. Wenn $D \in A$ ist, so muss zu jeder I_x aus $I(L)$, $D \circ I_x=0$ sein. Da aber

$$(D \circ I_x)a=D(I_x a)-I_x(Da)=D(x \circ a)-x \circ Da=Dx \circ a=0$$

ist, und da das Zentrum von L Null ist, muss Dx gleich Null sein. Folglich $D=0$, also $A=0$. Daher ist R nicht direkte Summe von einfachen Idealen. Nun sei A ein beliebiges Ideal von R. Wir setzen $C=A \frown I(L)$. C ist ein Ideal von $I(L)$ und da $I(L)$ direkte Summe von einfachen Idealen ist, ist C ein direkter Summand von $I(L)$: $I(L)=C+B$, wo B ein Ideal von $I(L)$ ist. Ersichtlich ist jedes Ideal von $I(L)$ vollkommen[4]. Demnach ist jedes Ideal von $I(L)$ ein charakteristisches Ideal[5] von $I(L)$ und da $I(L)$ Ideal von R ist, ist es auch Ideal von R. Da $B \frown A=B \frown I(L) \frown A=B \frown C=0$ ist, ist die Summe von zwei Idealen A und B von R direkt. Weil $B+A \geqq B+C=I(L)$ ist, ist $B+A$ halbeinfach, demnach ist A halbeinfach. w. z. b. w.

Durch Benutzung dieses Satzes können wir ein Gegenbeispiel zur oben genannten Zassenhausschen Vermutung geben. Nämlich hat N. Jacobson[2] einen einfachen nichtabelschen Ring L gegeben derart, dass der Restklassenring $D(L)/I(L)$ nicht auflösbar ist. Sei $L \circ L=L^{(1)}$, $L^{(1)} \circ L^{(1)}=L^{(2)}$ u. s. w. gesetzt. Da der Ring $D(L)/I(L)$ nicht auflösbar ist existiert ein i derart, dass

$$\big(D(L)/I(L)\big)^{(i)}=\big(D(L)/I(L)\big)^{(i+1)}= \cdots \neq 0 .$$

$\big(D(L)/I(L)\big)^{(i)}$ ist vollkommen und es gilt $\big(D(L)/I(L)\big)^{(i)}=\big(D(L)^{(i)}, I(L)\big)/I(L)$. Wir setzen

$$A=\big(D(L)^{(i)},\ I(L)\big)=\big(D(L)^{(i+1)},\ I(L)\big)= \cdots$$

A ist vollkommen, denn, weil $I(L)$ ein vollkommenes Ideal ist,

$$A \geqq A^{(1)}=\big(D(L)^{(i)},\ I(L)\big) \circ \big(D(L)^{(i)},\ I(L)\big)=\big(D(L)^{(i+1)},\ I(L)\big)=A .$$

Da $A \supsetneqq I(L)$ ist, ist A halbeinfach und nicht direkte Summe von einfachen Idealen.

2. Wir betrachten nun die Struktur eines halbeinfachen Ringes, dessen sämtliche Ideale halbeinfach sind und beweisen dadurch die Umkehrung von Satz 1. L sei ein Liescher Ring. Setzen wir voraus, dass alle minimale Ideale von L halbeinfach sind. So ist L offenbar halbeinfach und ist jedes minimale Ideal A von L einfach. Um dies zu zeigen, sei B ein von Null und von A verschiedenes Ideal von A. Wenn $B^{(1)}=B \circ B=B$ ist, ist B ein charakteristisches Ideal von A und

---

4) Ein Liescher Ring L heisst vollkommen, wenn $L \circ L=L$ ist.

5) Ein Teilmodul von L heisst charakteristisches Ideal von L, wenn er durch jede Derivation in sich übergeführt wird. Jedes vollkommene Ideal von L ist ein charakteristisches Ideal von L. Siehe, H. Zassenhaus, loc. cit. S. 52.

demnach ist B ein Ideal von L und da A minimal ist, ist B entweder gleich Null oder gleich A. Daher ist $B \neq B^{(1)}$.

In dieser Weise können wir zeigen, dass B auflösbar sein muss, und da A halbeinfach ist, muss B gleich Null sein. Nun bezeichnen wir mit S die Summe aller minimalen Ideale von L. S ist halbeinfach und direkte Summe von einfachen nichtabelschen Ringen. a sei ein Element von L und sei $D_a x = a \circ x (x \in S)$ gesetzt. Dann ist D_a eine Derivation von S und durch die Abbildung $a \to D_a$ wird eine homomorphe Abbildung von L auf einem $I(S)$ umfassenden Teilring von $D(S)$ definiert. Bezeichnet K der Kern dieses Homomorphismus, so ist $K \circ S = 0$. Demnach muss der Durchschnitt von K und S gleich Null sein und da S alle minimale Ideale enthält, muss K selbst gleich Null sein. Folglich ist $a \to D_a$ ein Isomorphismus.

Mit dem Satz 1 zusammengenommen, erhalten wir folgenden Satz:

Satz 2. *Wenn jedes minimale Ideal eines Lieschen Ringes L halbeinfach ist, so ist jedes Ideal von L halbeinfach. Dann und nur dann ist jedes Ideal von L halbeinfach, wenn L isomorph mit einem alle innere Derivationen umfassenden Teilring des Derivationsringes eines halbeinfachen und vollständig reduziblen Ringes ist.*