125. Über die Existenz einer Untergruppe, deren Ordnung ein Produkt von zwei verschiedenen Primzahlpotenzen ist.

Von Kiyosi TAKETA.
Mathematisches Institut, National Universität Peking.
(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Dec. 13, 1943.)

Sei $\mathfrak{G}$ eine gruppe, deren Ordnung g durch mindestens zwei verschiedene Primzahlen teilbar ist; sei $\mathfrak{P}$ die zu p zugehörige Sylowgruppe von $\mathfrak{G}$ und p^a, $a \geqq 1$, ihre Ordnung.

Wenn die Ordnung des Normalisators $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{P}$ einen von p verschiedenen Primfaktoren q besitzt, so hat die zu q zugehörige Sylowgruppe der Faktorgruppe $\mathfrak{N}/\mathfrak{P}$, als eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$ betrachtet, die Ordnung der Gestalt $p^a q^\beta$, $a\beta \neq 0$.

Ist $\mathfrak{P}=\mathfrak{N}$, so gibt es gerade g/p^a konjugierte Untergruppen $\mathfrak{P}_1=\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_2, \dots, \mathfrak{P}_{g/p^a}$, von $\mathfrak{P}$, und es sind die zwei Fälle möglich:

(i) Entweder sind je zwei von den $\mathfrak{P}_i$, $i=1, 2, \dots, g/p^a$ teilerfremd,

(ii) oder nicht.

Im Falle (ii) nimmt man an, daß $\mathfrak{P}'$ diejenige Untergruppe von $\mathfrak{G}$ deren Ordnung eine Potenz von p ist, welche nicht in $\mathfrak{P}$ enthalten ist und mit $\mathfrak{P}$ den Durchschnitt $\mathfrak{D}$ von der maximalen Ordnung besitzt. Dann muß die Ordnung des Normalisators $\mathfrak{N}'$ von $\mathfrak{D}$ durch mindestens eine von p verschiedene Primzahl teilbar sein. Denn sonst würde $\mathfrak{N}' \frown \mathfrak{P}$, gegen die Annahme, von einer höherer Ordnung als $\mathfrak{D}$ sein, weil $\mathfrak{D}$ so wie in $\mathfrak{P}$ als auch in $\mathfrak{P}'$ die von sich verschiedenen Normalisatoren hat. Also kann man wie beim Falle $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ ersehen, daß $\mathfrak{N}'$ eine Untergruppe von der Ordnung $p^a q^b$, $ab \neq 0$, hat.

Im Falle (i) hat $\mathfrak{G}$ nach einem Satze von Frobenius einen Normalteiler $\mathfrak{G}'$ vom Index p^a. Wenn g/p^a gleich einem Produkt von zwei verschiedenen Primzahlpotenzen ist, so ist $\mathfrak{G}'$ die verlangte Untergruppe[1]; und hat g/p^a mehr als zwei verschiedene Primfaktoren, so kann man auf $\mathfrak{G}'$ dasselbe Verfahren wie bisher anwenden, und durch Wiederholung dieses Schlußverfahrens ersieht man, daß $\mathfrak{G}$ eine Untergruppe, deren Ordnung ein Produkt von zwei verschiedenen Primzahlpotenzen ist, besitzt.

Die bisherigen Ergebnissen fassen wir zusammen in

Satz 1: Jede Gruppe $\mathfrak{G}$, deren Ordnung g mindestens zwei verschiedene Primfaktoren besitzt, hat stets eine Untergruppe der Ordnung, die gleich einem Produkt von zwei verschiedenen Primzahlpotenzen ist. Ist insbesondere p^a die höchste Potenz von einer Primzahl p, die in g aufgeht, so hat $\mathfrak{G}$ entweder einen Normalteiler vom Index p^a oder eine Untergruppe der Ordnung $p^a q^b$, $ab \neq 0$, wobei q eine von p verschiedene Primzahl ist.

Wenn speziell $\mathfrak{G}$ keine echte Untergruppe als die p-Gruppen hat,

1) Ist $g/p^a = q^\beta$, so ist $\mathfrak{G}$ schon von der verlangten Gestalt.

so muß $g=p^{\alpha}q^{\beta}$, $\alpha\beta \neq 0$, sein. Da aber solche Gruppen auflösbar sind, so muß g gleich pq oder pq^n, $n>1$ sein. Im letzteren Falle wird $\mathfrak{G}$ metabelsch mit dem maximalen Abelschen Normalteiler vom Typus $(q, q, \dots ;$ *n-mal*).

Also erhält man den

Satz 2: Jede Gruppe $\mathfrak{G}$, die keine echte Untergruppe als die p-Gruppen besitzt, ist entweder der Ordnung pq, oder metabelsch von der Ordnung pq^n mit dem maximalen Abelschen Normalteiler vom Typus $(p, p, \dots ;$ n-mal), $n>1$, insofern $\mathfrak{G}$ selbst keine p-Gruppe ist, wobei p, q zwei Primzahlen der Art sind, daß $p^n \equiv 1$ (mod. q).