40. *Sur la réductibilité du groupe d'holonomie. II. Les espaces de Riemann.*

Par Makoto ABE.

Institut Mathématique, Université Impériale de Tokyo.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., April 12, 1944.)

Nous avons étudié dans la Note précédente[1] (citée dans la suite par " R I ") la structure des espaces à connexion affine, dont les groupes d'holonomie laissent invariante la direction d'un plan à p dimensions. Nous allons maintenant considérer en particulier le cas des espaces riemanniens.

§ 1. *La réductibilité complète des espaces riemanniens.*

Soit V^n un espace riemannien à n dimensions. Le groupe d'holonomie g de V^n est alors un groupe (connexe) des déplacements euclidiens et le groupe γ (Voir R I) un groupe (connexe) des transformations orthogonales. Par suite γ est complètement réductible. Si γ laisse donc un p-plan Σ^p fixe, il laisse aussi fixe le $(n-p)$-plan Σ^{n-p} perpendiculaire à Σ^p. L'espace étant sans torsion, il existent alors (R I, § 4) dans V^n une famille à $n-p$ paramètres des p-plans E^p parallèles entre eux et une famille à p paramètres des $(n-p)$-plans E^{n-p} parallèles entre eux, de sorte que chaque E^p de la première famille est perpendiculaire à chaque E^{n-p} de la deuxième. Si l'on adopte donc un système de coordonnées $u^1, \dots, u^n$, tel que les E^p soient donnés par

$$u^{p+1}=\text{const}, \dots, u^n=\text{const},$$

et les E^{n-p} par

$$u^1=\text{const}, \dots, u^p=\text{const},$$

la connexion affine de cet espace prendra la forme suivante (R I, § 4)

$$(1)\qquad \begin{cases} dP=du^i e_i+du^\alpha e_\alpha, & \\ de_i=\Gamma^k_{ij}du^j e_k, & i, j, k=1, \dots, p, \\ de_\alpha= \qquad\qquad \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}du^\beta e_\gamma, & \alpha, \beta, \gamma=p+1, \dots, n, \end{cases}$$

les coefficients, $\Gamma^j_{i\alpha}, \Gamma^\beta_{i\alpha}$ s'annulant identiquement. De plus, la métrique de V^n sera de la forme

$$(2)\qquad ds^2=g_{ij}du^i du^j+g_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta,$$

parce que $g_{i\alpha}=e_i e_\alpha=0$ à cause de la perpendicularité des deux familles des plans.

Maintenant nous allons faire voir que *les g_{ij} ne dépendent que des variables u^i $(i=1, \dots, p)$ et les $g_{\alpha\beta}$ que des u^α $(\alpha=p+1, \dots, n)$*. En effet, il résulte des identités

1) M. Abe: Sur la réductibilité du groupe d'holonomie. I. Les espaces à connexion affine, Proc. **20** (1944), 56-60.

qu'on a

$$\Gamma_{ij\alpha} = g_{jk}\Gamma^k_{i\alpha} + g_{j\beta}\Gamma^\beta_{i\alpha} = 0$$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^\alpha} + \frac{\partial g_{j\alpha}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial u^j} = 0$$

Or, les $g_{i\alpha}, g_{j\alpha}$ s'annulant identiquement, cela se réduit à

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^\alpha} = 0\,,$$

c. q. f. d.

Les deux termes $g_{ij}du^i du^j$ et $g_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta$ sont donc respectivement les formes métriques fondamentales ds_1^2 et ds_2^2 des espaces riemanniens V^p et V^{n-p}:

$$ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2\,. \tag{3}$$

V^n est l'espace produit des espaces V^p et V^{n-p}, dont la métrique (3) est déduite de celles de V^p et V^{n-p} par le théorème de Pythagore. Convenons de dire pour cette raison que l'espace V^n est le *produit pythagorien* des deux espaces V^p et V^{n-p} et désignons cela par

$$V^n = V^p \times V^{n-p}\,.$$

(De même, on définit le produit pythagorien des plus de deux espaces facteurs.)

En résumé, on a obtenu (la réciproque étant évidente)

Théorème I. Si le groupe γ d'un espace riemannien V^n est réductible, et laisse invariant un plan à p dimensions, V^n est le produit pythagorien d'un V^p et un V^{n-p}. Réciproquement, si V^n est le produit pythagorien de deux espaces, le groupe γ de V^n est réductible.

Si un V^n n'admet aucune décomposition en produit pythagorien, nous dirons que V^n est *irréductible*; d'après le théorème I cela équivaut à l'irréductibilité du groupe γ.

Décomposons maintenant le groupe orthogonal γ d'un espace riemannien V^n à la forme réduite

$$\gamma \ni T = \begin{pmatrix} T_1 & & & & 0 \\ & T_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & T_r & \\ 0 & & & & E_p \end{pmatrix}, \tag{4}$$

où $T_1, \dots, T_r$ sont les composantes irréductibles respectivement de dégré $p_\nu > 1$, $\nu = 1, \dots, r$. Les composantes irréductibles de dégré 1 se réduisent identiquement à 1, parce que T est une transformation orthogonale appartenant à un groupe connexe; ces composantes (p en nombre) sont condensées dans une seule matrice unité E_p. D'après le théorème précédent on obtiendra alors la décomposition de l'espace V^n en produit pythagorien des espaces, correspondant respectivement aux composantes $T_1, \dots, T_r, E_p$:

$$V^n = V^{p_1} \times \cdots \times V^{p_r} \times R^p \qquad (p_1 + \cdots + p_r + p = n)\,. \tag{5}$$

Les facteurs $V^{p_1}, \dots, V^{p_r}$ sont des espaces irréductibles non euclidiens et le dernier facteur R^p est un espace euclidien à p dimensions. La décomposition (4) étant unique[1], la décomposition (5) est possible aussi d'une seule manière. On arrive ainsi au

Théorème II (*Théorème de la réductibilité complète des espaces de Riemann*)[2]. *Un espace riemannien est décomposable* (*au moins localement*) *en produit pythagorien de plusieurs espaces irréductibles non euclidiens et un espace euclidien. Cette décomposition est possible d'une seule manière déterminée.*

Des considérations précédentes résulte immédiatement en particulier

Théorème III[3]. *Si V^n admet p champs des vecteurs parallèles linéairement indépendents, V^n est le produit pythagorien d'un espace euclidien R^p et un espace riemannien V^{n-p}.*

$$V^n = R^p \times V^{n-p}$$

et réciproquement.

§ 2. *Les espaces riemanniens irréductibles.*

Le groupe γ d'un espace riemannien irréductible V^n est un groupe irréductible des rotations. Il est donc[4] :

i) ou bien un groupe absolument irréductible des rotations,

ii) ou bien le groupe irréductible, mais non absolument irréductible, obtenu en substituant

$$a+bi \quad \text{par} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

dans un groupe complexe irréductible γ^* des transformations unitaires de dégré $n/2$ (n : pair).

Or, d'après un théorème de M. E. Cartan[5], un groupe linéaire complexe irréductible est le produit kroneckerien des groupes linéaires irréductibles de structures simples et éventuellement d'un groupe de dégré 1. Par conséquent,

dans le cas i), *γ est le produit kroneckerien des groupes orthogonaux absolument irréductibles de structures simples* (γ est donc un groupe *semi-simple clos*) : et

dans le cas ii), *γ^* est le produit kroneckerien des groupes unitaires irréductibles de structures simples et éventuellement d'un groupe des transformations $e^{i\phi}$.*

---

1) Parce que les composantes $T_1, \ldots, T_r, E_p$ sont inéquivalentes entre elles. En effet, les T_i peuvent même se varier indépendemment l'une de l'autre.

2) M. E. Cartan a démontré ce théorème dans le cas particulier des espaces riemanniens *symétriques*, par une méthode tout à fait différente d'ailleurs. Voir p. ex. E. Cartan : La théorie des groupes finis et continus et l'Analysis situs (Mémorial des Sc. Math. XLII, 1930), Chap. IV.

3) Ce problème a été traité par M. L. P. Eisenhart (Transactions of Amer. Math. Soc., **28** (1925), 563–573), mais il me semble que sa solution en n'est pas complète.

4) Voir M. Abe : Irreduzibilität und absolute Irreduzibilität der Matrizensysteme, Proc. Phys.-Math. Soc. Japan (3) **24** (1942), 769–789, § 6.

5) E. Cartan : Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane, Bull. Soc. Math. France **41** (1913), Voir aussi C. Chevalley : Les représentations des algèbres de Lie (Séminaire de Mathématiques IV (1936–37), "Travaux de M. Elie Cartan").

L'espace riemannien à deux dimensions est le type le plus simple des espaces irréductibles, dont le groupe γ n'est pas absolument irréductible (R I, § 5). On peut démontrer d'ailleurs, comme en R I, § 5, qu'un espace à $2m$ dimensions de type ii) admet, considéré comme espace à connexion unitaire, deux familles des m-plans parallèles. Tout espace à connexion unitaire sans torsion à m dimensions est irréductible de type ii), s'il est irréductible, considéré comme espace riemannien à $2m$ dimensions, mais la réciproque n'est pas toujours vraie, comme on le voit dans le cas $m=1$.

Les espaces à courbure constante non nulle sont aussi irréductibles[1]. La forme du tenseur de courbure

$$R_{ijkl}=-K(g_{ik}g_{jl}-g_{il}g_{jk})$$

montre en effet, que le groupe γ d'un tel espace contient toutes les rotations infinitésimales, et, par conséquent, est le groupe de toutes les transformations orthogonales. Ces espaces sont donc irréductibles, et, de plus, de type i) sauf ceux à 2 dimensions.

Un autre exemple des types des espaces irréductibles est celui des espaces de groupes simples clos G. Le groupe γ est alors le groupe adjoint de G[2]; il est irréductible de type i) ou ii), suivant que γ reste simple ou non dans le domaine complexe.

§ 3. *Les métriques définissant la connexion affine donnée.*

Nous sommes maintenant en mesure de répondre à la question posée au début de R I: quelle est la métrique la plus générale qui définit la connexion affine d'un espace riemannien donné? Soit le groupe γ de cet espace réduit à la forme (4). Il s'agit de déterminer la forme quadratique définie positive φ, qui est invariante par le groupe linéaire γ. Elle est en tout cas la somme des formes $\varphi_1, \dots, \varphi_r, \psi$:

$$\varphi=\varphi_1+\cdots+\varphi_r+\psi\,,$$

où $\varphi_1, \dots, \varphi_r, \psi$ sont les formes invariantes respectivement par les groupes des $T_1, \dots, T_r, E_p$, parce que ces composantes sont inéquivalentes entre elles. Or, les T_i constituant un groupe irréductible, la forme φ_i est uniquement déterminée à un facteur constant près; au contraire, ψ est une forme quadratique définie positive arbitraire. De là résulte

Théorème IV. Soit un espace riemannien V^n décomposé en produit pythagorien en forme (4), *et soit*

$$ds^2=ds_1^2+\cdots+ds_r^2+\sum_{a=n-p+1}^{n}(du^a)^2$$

la décomposition correspondante de ds^2. La métrique riemannienne la plus générale qui définit la connexion affine de l'espace V^n est alors donnée par la formule

---

1) Il n'admet donc en particulier aucun champ des vecteurs parallèles. Voir K. Yano: Sur le parallélisme et la concourance dans l'espace de Riemann, Proc. **19** (1943), 189–197, Théorème 6·5.

2) M. Abe: Sur la métrique riemannienne et l'élément de volume dans les espaces de groupes de Lie, Proc. **19** (1943), 629–634.

$$ds^2 = c_1 ds_1^2 + \cdots + c_r ds_r^2 + \sum_{\alpha,\beta=n-p+1}^{n} g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta ,$$

où $c_1, \dots, c_r$ *sont les coefficients constants positifs arbitraires et le dernier terme est une forme quadratique définie positive arbitraire aux coefficients constants en* $du^{n-p+1}, \dots, du^n$.

En particulier, la métrique d'un espace irréductible (p. ex. un espace à courbure constante non nulle) est déterminée à un facteur constant prés par sa connexion affine

§ 4. *Les espaces riemanniens, dont le groupe d'holonomie laisse un p-plan fixe.*

M. S. Sasaki[1] a démontré qu'un espace riemannien V^n, dont le groupe d'holonomie laisse un point fixe, admet un champ des vecteurs concourants et sa métrique est de la forme suivante

$$ds^2 = (du^1)^2 + (u^1)^2 g^*_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta , \quad \alpha, \beta = 2, \dots, n , \quad g^*_{\alpha\beta} = g^*_{\alpha\beta}(u^2, \cdots, u^n) .$$

On peut aussi déduire cette forme de la métrique par un calcul analogue à celui dans § 1 : Soit $\boldsymbol{P}_0$ le point de l'espace euclidien tangent en $\boldsymbol{P}$, qui est invariant par le groupe d'holonomie g (attaché au point $\boldsymbol{P}$). En désignant par u^1 la longueur du vecteur $\overrightarrow{\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}}$. on a

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_0 + u^1 \boldsymbol{e}_1 , \qquad \boldsymbol{e}_1^2 = 1 .$$

Le champ des vecteurs (concourants) $\boldsymbol{e}_1$ engendre une congruence des géodésiques, qui sont données par les équations

$$u^2 = \text{const}, \dots, u^n = \text{const} \tag{6}$$

par le choix convenable des paramètres $u^2, \dots, u^n$. Si l'on déplace le point $\boldsymbol{P}$ à un point infiniment voisin de $\boldsymbol{P}$, on a

$$d\boldsymbol{P} = du^1 \boldsymbol{e}_1 + u^1 d\boldsymbol{e}_1 , \tag{7}$$

$d\boldsymbol{P}_0$ s'annulant identiquement. En particulier, l'équation $du^1 = 0$ entraîne $d\boldsymbol{P}\boldsymbol{e}_1 = u^1 d\boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{e}_1 = 0$; c'est-à-dire, les hypersurfaces $u^1 = \text{const}$ sont perpendiculaires aux géodésiques (6). Les n paramètres $u^1, \dots, u^n$ localisent donc uniquement un point de V^n. En posant

$$d\boldsymbol{P} = du^1 \boldsymbol{e}_1 + du^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha \tag{7'}$$

on a $$g_{1\alpha} = \boldsymbol{e}_1 \boldsymbol{e}_\alpha = 0 , \qquad \alpha = 2, \dots, n .$$

La métrique prend ainsi la forme

$$ds^2 = (du^1)^2 + g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta .$$

Or, il résulte des formules (7) et (7′)

$$d\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{u^1} du^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha \quad \text{ou} \quad \Gamma^{\beta}_{1\alpha} = \frac{1}{u^1} \delta^\beta_\alpha \quad \text{ou} \quad \Gamma_{1\beta\alpha} = \frac{1}{u^1} g_{\alpha\beta}$$

$$\text{ou encore} \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{1\beta}}{\partial u^\alpha} + \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{1\alpha}}{\partial u^\beta} \right) = \frac{1}{u^1} g_{\alpha\beta} .$$

1) 佐々木重夫: ホロノミイの群が一點或は一方向を不變にするリーマン空間の構造に就て, 日本數學物理學會誌第 **16** 卷 (1942), 193–201.

Les $g_{1\alpha}, g_{1\beta}$ s'annulant identiquement, cela se réduit à

$$\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^1}=\frac{1}{u^1}g_{\alpha\beta}$$

ou enfin $$\frac{\partial}{\partial u^1}\left((u^1)^{-2}g_{\alpha\beta}\right)=0\,,$$ c. q. f. d.

Etudions maintenant la structure d'un espace V^n, dont le groupe d'holonomie laisse un p-plan fixe (et non seulement sa direction). Dans ce cas, le groupe γ laisse, à plus forte raison, un p-plan invariant, et l'espace est par suite décomposable en forme

$$V^n=V^p\times V^{n-p}\,.$$

De plus, on voit facilement que le groupe d'holonomie de l'espace V^{n-p} laisse un point fixe. D'où l'on obtient

Théorème V. Si le groupe d'holonomie d'un espace riemannien V^n laisse un p-plan fixe, V^n est le produit pythagorien d'un V^p et un V^{n-p}, ce dernier admettant un champ des vecteurs concourants, et réciproquement.

En terminant l'auteur tient à remercier M. K., Yano, qui lui a suggéré ces questions et l'a engagé à ces recherches.