

## 57. Über die Irreduzibilität und absolute Irreduzibilität des Darstellungsmoduls.

Von Makoto ABE.

Mathematisches Institut der Kaiserlichen Universität zu Tokyo.

Tadasi NAKAYAMA.

Mathematisches Institut der Kaiserlichen Universität zu Nagoya.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., May 12, 1944.)

Einer der Verfasser hat früher die Beziehungen zwischen absolut und nicht-absolut irreduziblen Darstellungen algebraischer Systeme (wie Gruppen, Algebren, Liescher Ringe untersucht<sup>1)</sup>. Unter anderem hat er bewiesen :

Es sei  $D_0$  eine irreduzible Darstellung (vom gewissen Grade  $g$ ) eines algebraischen Systems  $\mathfrak{S}$  in einem (kommutativen) Körper  $P$ . Dann gibt es einen Oberkörper (endlichen Grades)  $K$  von  $P$  und eine absolut irreduzible Darstellung  $D$  von  $\mathfrak{S}$  in  $K$ , so dass  $D_0$  mit  $D_{K \rightarrow P}$  äquivalent ist, wo  $D_{K \rightarrow P}$  solche Darstellung bedeutet, die man erhält, wenn man jedes Matrixelement in  $D$  durch die in der regulären Darstellung von  $K/P$  ihm zugehörige Matrix vom Grade  $(K:P)$  ersetzt. Es genügt dazu, einen maximalen Teilkörper der Kommutatorendivisionsalgebra der Darstellung  $D_0$  (in der  $g$ -gradigen Vollmatrixenalgebra über  $P$ ) als  $K$  zu nehmen.

Ist umgekehrt  $D$  irgendeine absolut irreduzible Darstellung von  $\mathfrak{S}$  in einem endlichen Oberkörper  $K$  des Grundkörpers  $P$ , und ist die Darstellung  $D_{K \rightarrow P}$  irreduzibel und mit  $D_0$  äquivalent, so ist  $K$  mit einem maximalen Teilkörper der Kommutatorendivisionsalgebra von  $D_0$  isomorph.

Modultheoretische Übersetzung dieser Sätze ist leicht.

Das Ziel der vorliegenden Note ist zu zeigen, dass die ganze Theorie sich auf den Fall ohne Endlichkeitsbedingungen übertragen lässt. Dies geschieht, wie der andere von uns in seiner Note über unendliche einfache distributive Systeme kurz bemerkt hat<sup>2)</sup>, indem wir einfach die frühere Methode, besonders die im Anhang der zitierten Arbeit<sup>1)</sup>, mit C. Chevalleys Resultat über die Ringe mit irreduziblen oder voll-reduziblen Darstellungsmoduln (unendlicher Ränge) kombinieren.

Es sei nämlich  $m$  eine additive Gruppe, die einen Linksoperatorbereich  $\mathfrak{S}$  und einen Rechtsoperatorbereich  $P$  besitzt und die Assoziativität :  $s(u\rho) = (su)\rho$  ( $u \in m$ ,  $s \in \mathfrak{S}$ ,  $\rho \in P$ ) sowie die Bedingung  $m\rho = 0 \rightarrow \rho = 0$  erfüllt; Wir nennen  $m$  einen  $\mathfrak{S}$ - $P$ -Modul. (Operator-) Endomor-

1) M. Abe, Irreduzibilität und absolute Irreduzibilität des Matrixsystems, Proc. Phys.-Math. Soc. Japan 24 (1942). Vgl. auch E. Bannow, Die Automorphismengruppe der Cayley-Zahlen, Abh. Hamburg 13 (1940).

2) T. Nakayama, Über einfache distributive Systeme unendlicher Ränge, Proc. Imp. Acad. 20 (1944). Sieh auch die zweite Mitteilung von T. Nakayama und G. Azumaya.

phismenring des  $\mathfrak{S}$ - $P$ -Moduls  $m$ , den wir als Rechtsoperatorenring von  $m$  betrachten wollen, sei mit  $\mathcal{A}$  bezeichnet. Das Zentrum von  $P$  lässt sich in natürlicher Weise als Teilring von  $\mathcal{A}$ , und zwar als Teilring des Zentrums von  $\mathcal{A}$ , betrachten. Ist speziell  $P$  kommutativ, wie wir im folgenden stets annehmen wollen, so können wir  $P$  selbst als einen Teilring des Zentrums von  $\mathcal{A}$  ansehen. Es gilt: Ist  $K$  ein Ring, dessen Zentrum  $P$  enthält, und ist ein  $\mathfrak{S}$ - $K$ -Modul  $m'$  als  $\mathfrak{S}$ - $P$ -Modul mit unserem  $\mathfrak{S}$ - $P$ -Modul  $m$  isomorph, so gibt es im Endomorphismenring  $\mathcal{A}$  von  $m$  einen mit  $K$  isomorphen Ring  $K'$ .  $m$  lässt sich also auch als  $\mathfrak{S}$ - $K'$ -Modul auffassen, identifiziert man  $K'$  mit  $K$ , so wird  $m'$  mit  $\mathfrak{S}$ - $K$ -Modul  $m$  isomorph.

Umgekehrt: Ist  $K$  ein beliebiger Teilring vom Endomorphismenring  $\mathcal{A}$  des  $\mathfrak{S}$ - $P$ -Moduls  $m$ , so lässt sich  $m$  auch als  $\mathfrak{S}$ - $K$ -Modul auffassen. Ist hier  $K \supseteq P$ , so fällt der Endomorphismenring vom  $\mathfrak{S}$ - $K$ -Modul  $m$  mit dem Kommutatorennring (Zentralisator) von  $K$  in  $\mathcal{A}$  zusammen.

Nun sei der  $\mathfrak{S}$ - $P$ -Modul  $m$  als irreduzibel (= einfach) angenommen. Dann ist der Endomorphismenring  $\mathcal{A}$  bekanntlich ein Schiefkörper. Also muss  $P$  ( $\subseteq \mathcal{A}$ ) ein Integritätsbereich sein. Weiter enthält  $\mathcal{A}$  einen Quotientenkörper  $\bar{P}$  von  $P$ , und  $m$  lässt sich als  $\mathfrak{S}$ - $\bar{P}$ -Modul betrachten. Daher setzen wir vornherein voraus, dass  $P$  ein Körper ist. Dann besitzt  $m$  eine (im allgemeinen unendliche) Basis in Bezug auf  $P$ . Ist  $\mathcal{Q}$  ein Oberkörper (oder, allgemeiner, ein hyperkomplexer Ring) über  $P$ , so lässt sich der Erweiterungs- ( $\mathfrak{S}$ - $\mathcal{Q}$ -) Modul  $m_{\mathcal{Q}}$  in wohl bestimmter Weise definieren. Wir nennen  $m$  absolut irreduzibel, wenn er bei jeder (algebraischen oder transzendenten) Erweiterung des Grundkörpers irreduzibel bleibt; genauer, wenn für jeden Oberkörper  $\mathcal{Q}$  von  $P$  der Modul  $m_{\mathcal{Q}}$  irreduzibel ist. Dann bekommen wir den grundlegenden

*Hilfssatz.*  $P$  sei ein Körper. Ein irreduzibler  $\mathfrak{S}$ - $P$ -Modul  $m$  ist dann und nur dann absolut irreduzibel, wenn sein Endomorphismenschiefkörper  $\mathcal{A}$  mit  $P$  übereinstimmt.

Beweis. 1) Es sei  $\mathcal{A}$  als echter Oberschiefkörper von  $P$  angenommen:  $\mathcal{A} \neq P$ . Dann besitzt  $\mathcal{A}$  gewiss einen Teilkörper  $\bar{\mathcal{Q}}$ , welcher  $P$  als echten Teilkörper enthält. Wir führen einen Erweiterungskörper  $\mathcal{Q}$  von  $P$  ein, der über  $P$  mit  $\bar{\mathcal{Q}}$  isomorph ist, und betrachten den Erweiterungs- ( $\mathfrak{S}$ - $\mathcal{Q}$ -) Modul  $m_{\mathcal{Q}}$ . Ist  $\{u_r\}$  eine (im allgemeinen unendliche)  $\bar{\mathcal{Q}}$ -Basis vom  $m$ :  $m = \sum u_r \bar{\mathcal{Q}}$ , so ist  $\{u_r\}$  auch eine  $\bar{\mathcal{Q}}_{\mathcal{Q}}$ -Basis des Erweiterungsmoduls  $m_{\mathcal{Q}} = \sum u_r \bar{\mathcal{Q}}_{\mathcal{Q}}$ . Hier besitzt aber der kommutative Ring  $\bar{\mathcal{Q}}_{\mathcal{Q}}$  ein echtes Ideal  $I$ , wie man etwa aus dem Homomorphismus  $\bar{\mathcal{Q}}_{\mathcal{Q}} \rightarrow \mathcal{Q}$  einsieht. Der (echte) Teilmodul  $m_I = \sum u_r I$  von  $m_{\mathcal{Q}}$  ist dann zulässig in bezug auf sowohl  $\mathcal{Q}$  als auch  $\mathfrak{S}$ . Denn es ist  $s(u_r I) = (su_r)I \subseteq (\sum u_r \bar{\mathcal{Q}})I \subseteq \sum u_r I$ . Damit ist es bewiesen, dass  $m$  nicht absolut irreduzibel ist.

2) Es sei angenommen, dass der Endomorphismenschiefkörper  $\mathcal{A}$  mit  $P$  übereinstimmt:  $\mathcal{A} = P$ . Die Transformationen von  $m$ , die von  $\mathfrak{S}$  und  $P$  verursacht werden, erzeugen einen (Rechts-) Operatorenring von  $m$ , den wir mit  $\mathfrak{A}$  bezeichnen. Nach C. Chevalley<sup>3)</sup> bewirkt (ein

3) Für Chevalleys Theorie sieh den Anhang in der Note 2).

Teilring von)  $\mathfrak{A}$  alle  $P(=A)$ -linearen Transformationen über beliebigem endlichen Teilmodul  $\sum_{i=1}^n u_i P$  von  $\mathfrak{m}$ . Ist  $\mathcal{Q}$  ein beliebiger Oberkörper von  $P$ , so folgt daraus unmittelbar, dass alle  $\mathcal{Q}$ -linearen Transformationen eines beliebigen endlichen Moduls  $\sum_{i=1}^n u_i \mathcal{Q}$  von den Elementen aus  $\mathfrak{A}$  und  $\mathcal{Q}$  erzeugt werden können. Ist insbesondere  $v, w \in \mathfrak{m}$  und  $v \neq 0$ , so gibt es eine Transformation von  $\mathfrak{m}$ , die eine Produktsumme der von den Elementen aus  $\mathfrak{A}$  und  $\mathcal{Q}$  bewirkten Transformationen ist, und die  $v$  zu  $w$  überführt. Also ist  $\mathfrak{m}$  als  $(\mathfrak{A}, \mathcal{Q})$ -Modul, d. h. als  $\mathfrak{S}$ - $\mathcal{Q}$ -Modul irreduzibel. Unser Hilfssatz ist somit bewiesen.

Kombiniert man dies mit den obigen Betrachtungen, so folgt der

*Satz.*  $P$  sei ein Körper und  $\mathfrak{m}$  ein irreduzibler  $\mathfrak{S}$ - $P$ -Modul. Für jeden maximalen Teilkörper  $K$  des Endomorphismenschiefkörpers  $A$  von  $\mathfrak{m}$  lässt sich  $\mathfrak{m}$  als einen absolut irreduziblen  $\mathfrak{S}$ - $K$ -Modul auffassen. Wenn man umgekehrt mit einem Oberkörper  $K$  von  $P$  den Modul  $\mathfrak{m}$  als einen absolut irreduziblen  $\mathfrak{S}$ - $K$ -Modul betrachten kann, dann ist  $K$  ein maximaler Teilkörper von  $A$ .

Hiermit ist tatsächlich die Kernbehauptung der in Fussnote 1) zitierten Arbeit, woraus die ganze Theorie hergeleitet werden kann, von jeder Endlichkeitsbedingung befreit worden.

*Bemerkung:* Es möge nicht ohne Interesse sein, zu betrachten, dass die Sache einen anderen, etwas unangenehmen, Verlauf nimmt, wenn wir uns auf *algebraische* Erweiterungen des Grundkörpers beschränken. Es sei nämlich  $\mathfrak{m}$  wie oben ein irreduzibler  $\mathfrak{S}$ - $P$ -Modul, und  $K_1$  ein maximaler über  $P$  *algebraischer* Teilkörper des Endomorphismenschiefkörpers  $A$  von  $\mathfrak{m}$ . Man kann natürlich  $\mathfrak{m}$  als einen (irreduziblen)  $\mathfrak{S}$ - $K_1$ -Modul auffassen. Doch gibt es dann im allgemeinen eine *algebraische* Erweiterung  $\mathcal{Q}$  von  $K_1$  derart, dass der Erweiterungsmodul  $\mathfrak{m}_{\mathcal{Q}} (= \mathfrak{m}_{\mathcal{Q}/K_1})$  nicht mehr irreduzibel ist. Um dies zu sehen, genügt es etwa einen derartigen Erweiterungskörper  $A$  über einem Grundkörper  $P$  anzugeben, dass  $P$  algebraisch abgeschlossen in  $A$  ist, und doch das direkte Produkt  $A \times \mathcal{Q}$  (über  $P$ ) von  $A$  mit einem algebraischen Erweiterungskörper  $\mathcal{Q}$  von  $P$  nicht notwendig ein Körper ist; dann haben wir nur den  $A$ - $P$ -Modul  $A$  als  $\mathfrak{m}$  zu betrachten. Dafür sei z. B.  $P$  ein unvollkommener Körper einer Primzahlcharakteristik  $p$ , so dass eine Erweiterung  $\mathcal{Q} = P(\sqrt[p]{\alpha}, \sqrt[p]{\beta})$  vom Grade  $p^2$  und Exponenten  $p$  existiert, und sei  $A = P(x, \sqrt[p]{\alpha + \beta x^p})$  mit einem unbestimmten  $x$ . Man überzeugt sich dann ohne Schwierigkeit davon, dass  $P$  algebraisch abgeschlossen in  $A$  ist. Andererseits ist das Kompositum  $A\mathcal{Q}$  vom Grad  $p$  über  $A$ , weil

$$A(\sqrt[p]{\alpha}) \ni \sqrt[p]{\alpha + \beta x^p} - \sqrt[p]{\alpha} = \sqrt[p]{\beta x^p} = \sqrt[p]{\beta} \cdot x, \quad \sqrt[p]{\beta} \in A(\sqrt[p]{\alpha}).$$

Daher ist  $A \times \mathcal{Q}$  sicher kein Körper.

Am Schluss sei es noch darauf hingewiesen, dass der obige Hilfssatz und der Satz 1 der in 2) zitierten Note (Einfachheit des direkten Produktes zweier einfachen distributiven Systeme, deren eines normal ist) beide in der folgenden allgemeinen Formulierung umfasst werden können, die in der Tat auch die Irreuzibilität des (Kroneckerschen)

direkten Produktes zweier absolut irreduzibler Darstellungsmoduln auf unseren unendlichen Fall überträgt, und die auch ganz ähnlich wie beim obigen Hilfssatz und beim Satz 1 in 2) bewiesen werden kann:

*Es sei  $m$  bzw.  $n$  ein irreduzibler  $\mathfrak{S}$ - $P$ -bzw.  $\mathfrak{I}$ - $P$ -Modul, und der Endomorphismenschiefkörper von  $m$  stimme mit dem Grundkörper  $P$  überein. Dann ist das Produktmodul  $m \times n$  als  $\mathfrak{S} \cup \mathfrak{I}$ - $P$ -Modul irreduzibel. Es ist auch als  $\mathfrak{S} \times \mathfrak{I}$ - $P$ -Modul irreduzibel, falls das direkte Produkt  $\mathfrak{S} \times \mathfrak{I}$  erklärbar ist (d. h. falls  $\mathfrak{S}$  und  $\mathfrak{I}$  lineare Räume über  $P$  sind) und überdies mindestens eines von  $\mathfrak{S}$  und  $\mathfrak{I}$  den Einheitsoperator enthält.*

---