74. *Über einfache distributive Systeme unendlicher Ränge. II.*

Von Tadasi NAKAYAMA und Gorô AZUMAYA.

Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Nagoya.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., June 12, 1944.)

Im folgenden wollen wir mit Ergänzungen zur ersten Note[1] einige weiteren Resultate über einfache distributive Systeme, insbesondere über ihre direkten Produkte, mitteilen.

1. Zuerst sei die Erklärung der Einfachheit bzw. des erweiterten Zentrums eines distributiven Systems R im hyperkomplexen Fall so ergänzt, dass wir R (nicht nur als $\mathfrak{A}$- aber) als $\mathfrak{A}$-K-Modul betrachten, wo K bzw. $\mathfrak{A}$ den Grundkörper bzw. Multiplikationsring von R bezeichnet. Es gilt doch dann der folgende Satz, der eine Lücke im Beweis des Satzes 1 erfüllt und was zwar gewissermassen einen Gegenstück zur Existenz des Einselementes in einer einfachen Algebra endliches Ranges bildet:

Satz 0. Ein einfaches distributives System R ist einfach auch als $\mathfrak{A}$-Modul. Sein erweitertes Zentrum ändert sich nicht, wenn man es nur als $\mathfrak{A}$-Modul betrachtet.

Beweis. Es sei $\mathfrak{K}$ der Endomorphismenschiefkörper von R (als $\mathfrak{A}$-K-Modul), und $\sum_1^n u_i\mathfrak{K}$ beliebiger $\mathfrak{K}$-endlicher Teilmodul von R. Sei dann a ein Element aus R, so dass $a\sum_1^n u_i\mathfrak{K} \neq 0$. Wir können endlichviele Elemente $u_{n+1}, \ldots, u_f$ aus R so wählen, dass $a\sum_1^n u_i\mathfrak{K} \subseteqq \sum_1^f u_i\mathfrak{K}$. Da dann, wegen Chevalleys Theorie[2], alle ($\mathfrak{K}$-) linearen Transformationen von $\sum_1^f u_i\mathfrak{K}$ durch den von $\mathfrak{A}$ und K erzeugten Ring verursacht werden können, so sieht man leicht ein, dass eine geeignete Produktsumme

$$\sum b'_{\alpha_1} b''_{\alpha_2} \cdots (\lambda a)_l \bar{b}'_{\beta_1} \bar{b}''_{\beta_2} \cdots \quad (b', b'', \ldots, \bar{b}', \bar{b}'', \ldots \in R\,;\ \lambda \in K\,;\ \alpha, \beta = r \text{ or } l)$$

aus $\mathfrak{A}$ dieselbe Transformation in $\sum_1^n u_i\mathfrak{K}$ wie ein vorgegebenes Element aus K[3] bewirkt. Hieraus folgt aber unsere Behauptung unmittelbar.

2. In der vorigen Mitteilung haben wir gesehen (Satz 3), dass das direkte Produkt zweier zueinander reziprok-isomorphen normaleinfachen (assoziativen) Ringen fundamental ist. Dementsprechend gilt für Grundkörpererweiterung der

Satz 4. Es sei L ein maximaler Teilkörper eines normalen Schiefkörpers S (unendlichen Ranges) über K. Dann ist das Erweiterungssystem $S_L = S \times L$ (einfach und) fundamental.

Zwar können wir die beiden Sätze im folgenden umfassen:

Satz 5. Es sei A ein Ring mit Einselement über K, und B ein K enthaltender Teilring von A. Dann gibt es ein Linksideal $\mathfrak{l}$ im direkten Produkt $A \times B'$ (bzw. $A' \times B$) (über K), so dass der Endomor-

---

1) T. Nakayama, Über einfache distributive Systeme unendlicher Ränge, Proc. **20** (1944).

2) Sieh den Anhang der in 1) zitierten I. Mitteilung.

3) Insbesondere, die identische Transformation.

phismenring des $A \times B'$-(bzw. $A' \times B$-)Linksmoduls $A \times B'/\mathfrak{l}$ (bzw. $A' \times B/\mathfrak{l}$) genau der Kommutatorenring $V(B')$ (bzw. $V(B)$) von B' (bzw. B) in A' (bzw. A) ist, wo das Strichzeichen Reziprokisomorphismus bedeutet.

Beweis. Der Endomorphismenring des A(-Links)-B(-Rechts)-Moduls A stimmt bekanntlich mit $V(B)$ überein. Fassen wir aber A in üblicher Weise als $A \times B'$-Linksmodul, so ist er nach der Zuordnung

$$\sum ab'(\in A \times B') \rightarrow \sum ab(\in A) \qquad (a \in A,\ b \in B)$$

zum $A \times B'$-Linksmodul $A \times B'$ homomorph. Daraus folgt eine Hälfte des Satzes, und die andere Hälfte lässt sich in ähnlicher Weise erledigen.

Für allgemeine distributive Systeme und ihre Darstellungsmoduln haben wir

Satz 6. Es sei $\mathfrak{m}$ bzw. $\mathfrak{n}$ einfacher Darstellungsmodul des distributiven Systems R bzw. S. $\mathfrak{K}$ bzw. $\mathfrak{L}$ sei der Endomorphismenschiefkörper von $\mathfrak{m}$ bzw. $\mathfrak{n}$, und ein Schiefkörper $\mathfrak{F}$ sei zum direkten Produkt $\mathfrak{K} \times \mathfrak{L}$ rechtsseitig subjektiert[1]*. Dann existiert ein einfacher zu $\mathfrak{m} \times \mathfrak{n}$ homomorpher $R \cup S$-K-Modul*[2]*, dessen Endomorphismenschiefkörper zu $\mathfrak{F}$ isomorph ist.*

Beweis. Jede $\mathfrak{K} \times \mathfrak{L}$-lineare Abbildung eines $\mathfrak{K} \times \mathfrak{L}$-endlichen Teilmoduls von $\mathfrak{m} \times \mathfrak{n}$ kann, infolge Chevalleys Theorie, durch R, S und K verwirklicht werden, und hieraus folgt die Behauptung ohne Schwierigkeit[3].

3. Betrachten wir nun ein direktes Produkt zweier einfachen Systeme, deren keines, gegenüber Satz 1, als normal angenommen ist.

Satz 7. Es seien R und S zwei einfache distributive Systeme über K, und es besitze mindestens eines von ihnen ein Einselement. Ihre erweiterten Zentren seien mit $\mathfrak{K}, \mathfrak{L}$ bezeichnet. Dann gibt es eine 1–1 Zuordnung zwischen zweiseitigen Idealen des direkten Produktes $R \times S$ und denselben vom kommutativen Ringe $\mathfrak{K} \times \mathfrak{L}$.

Beweis. Man beweist dies wieder leicht, indem man R, S nach $\mathfrak{K}, \mathfrak{L}$ zerlegt und $\mathfrak{K} \times \mathfrak{L}$-endliche Teilmoduln von $R \times S$ betrachtet.

Korollar. Es sei R ein einfaches distributives System mit dem erweiterten Zentrum $\mathfrak{K}$. Ist $\mathfrak{L}$ ein Oberkörper des Grundkörpers K, so stehen die zweiseitigen Ideale des Erweiterungssystems R_L in 1–1 Korrespondenz mit denselben von $\mathfrak{K} \times \mathfrak{L}$.

Also untersuchen wir nun die Idealtheorie und Struktur vom direkten Produkt $\mathfrak{K} \times \mathfrak{L}$ zweier Körper $\mathfrak{K}, \mathfrak{L}$ (über dem Grundkörper K). Natürlich ist es im allgemeinen weder nullteilerfrei noch nilpotentfrei. Es gilt aber

Satz 8. Ist (mindestens) eines von $\mathfrak{K}, \mathfrak{L}$ über K separabel erzeugbar, so ist der kommutative Ring $\mathfrak{K} \times \mathfrak{L}$ ganz-abgeschlossen (in seinem Quotientenring).

Beweis. Es sei etwa $\mathfrak{X} = \{\ldots, x_\mu, \ldots\}$ eine Transzendenzbasis von

---

1) Im Sinne (von Kurosch, a. a. O.), dass der Restklassenmodul $\mathfrak{K} \times \mathfrak{L}/\mathfrak{r}$ mit einem geeigneten maximalen Rechtsideal $\mathfrak{r}$ den Schiefkörper $\mathfrak{F}$ als Endomorphismenring besitzt.

2) Besitzt eines von R, S ein Einselement, so können wir hier $R \cup S$ durch $R \times S$ ersetzen.

3) Vgl. auch M. Abe-T. Nakayama, Über die Irreduzibilität und absolute Irreduzibilität des Darstellungsmoduls, Proc. **20** (1944).

$\mathfrak{L}/K$, so dass $\mathfrak{L}$ über $L=K(\mathfrak{X})$ separabel-algebraisch ist. Man überzeugt sich ohne Schwierigkeit zuerst davon, dass das direkte Produkt $\mathfrak{K}\times L$ aus den gesamten rationalen Funktionen von $\mathfrak{X}$ über $\mathfrak{K}$ besteht, deren Nenner Koeffizienten aus K besitzen:

$$\mathfrak{K}\times L=\mathfrak{K}[\mathfrak{X}]K(\mathfrak{X})\,.$$

Es ist ein Integritätsbereich mit dem Quotientenkörper $\mathfrak{K}(\mathfrak{X})$. Dass es weiter ganz-abgeschlossen ist, folgt unmittelbar etwa aus der Eindeutigkeit der Zerlegung von Polynomen in irreduziblen. Um nun die Ganzabgeschlossenheit von $\mathfrak{K}\times\mathfrak{L}$ zu schliessen, genügt es den Fall zu betrachten, wo $\mathfrak{L}/L$ eine endliche Basis $s_1, s_2, \dots, s_n$ besitzt. Es ist

$$\mathfrak{K}\times\mathfrak{L}=(\mathfrak{K}\times L)s_1+(\mathfrak{K}\times L)s_2+\cdots+(\mathfrak{K}\times L)s_n\,.$$

Da die Norm (bezüglich $\mathfrak{K}\times L$) eines Nichtnullteilers aus $\mathfrak{K}\times L$ ein Nichtnullteiler in $\mathfrak{K}\times L$ ist, und da jedes Element aus $\mathfrak{K}\times L$ Teiler seiner Norm ist, so sieht man leicht ein, dass der Quotientenring von $\mathfrak{K}\times\mathfrak{L}$ das direkte Produkt

$$\mathfrak{K}(\mathfrak{X})s_1+\mathfrak{K}(\mathfrak{X})s_2+\cdots+\mathfrak{K}(\mathfrak{X})s_n$$

von $\mathfrak{K}(\mathfrak{X})$ und $\mathfrak{L}$ über L ist[1]. Andererseits ist die Diskriminante

$$|\,Sp(s_is_j)\,|=|\,s_i^{(j)}\,|^2$$

von Null verschieden und tatsächlich eine Einheit in $\mathfrak{K}\times L$. Die Ganzabgeschlossenheit von $\mathfrak{K}\times\mathfrak{L}$ folgt nun ohne Schwierigkeit aus den bekannten Spur-Diskriminantenargument[2].

Bemerkung. Es ist offensichtlich, dass $\mathfrak{K}\times\mathfrak{L}$ sicher nicht ganzabgeschlossen ist, falls er nilpotente Elemente enthält.

4. Studieren wir nun den Fall, wo $\mathfrak{K}\times\mathfrak{L}$ sich nullteilerfrei verhält; wir sagen dann, dass $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}$ zueinander (über K) *fremd* sind, und nennen den Quotientenkörper des Integritätsbereiches $\mathfrak{K}\times\mathfrak{L}$, der im folgenden mit $\mathfrak{K}*\mathfrak{L}$ bezeichnet werden soll, das *direkte Kompositum* von $\mathfrak{K}, \mathfrak{L}$. Sind dabei $\mathfrak{K}, \mathfrak{L}$ von den Transzendenzgraden μ, ν über K, so ist $\mathfrak{K}\times\mathfrak{L}$ vom Transzendenzgrad $\mu+\nu$ über K, weil Potenzprodukte der Elemente einer Transzendenzbasis von $\mathfrak{K}/K$ linear unabhängig über (K, also auch) $\mathfrak{L}$ sind. Andererseits gibt es sicher ein Kompositum der Körper $\mathfrak{K}, \mathfrak{L}$ vom Transzendenzgrad $max(\mu, \nu)$ über K, welches ersichtlich zu $\mathfrak{K}\times\mathfrak{L}$ (Ring-)homomorph ist. Hieraus schliesst man

Satz 9. Dafür, dass ein direktes Produkt zweier zueinander fremden Körper $\mathfrak{K}, \mathfrak{L}$ ein Körper ist, ist es notwendig und hinreichend, dass mindestens eines von ihnen über K algebraisch ist.

Nun soll eine Erweiterung *absolut-fremd* (bzw. *algebraisch absolut-fremd*) heissen, wenn sie mit jedem (bzw. jedem algebraischen) Erweiterungskörper fremd ist. Dann gilt

Satz 10. Ist $\mathfrak{K}/K$ algebraisch absolut-framd, so ist es auch absolut-

---

1) Dies schliesst man auch daraus, dass jeder Nichtnullteiler in der endlichen Algebra $\mathfrak{K}(\mathfrak{X})s_1+\mathfrak{K}(\mathfrak{X})s_2+\cdots+\mathfrak{K}(\mathfrak{X})s_n$ (über $\mathfrak{K}(\mathfrak{X})$) Einheit ist.

2) Hier können wir uns auf den Fall beschränken, wenn $\mathfrak{X}$ endlich ist und also $\mathfrak{K}\times L$ der Teilerkettenbedingung genügt.

fremd schlechthin. Für die absolute Fremdheit von $\mathfrak{K}/K$ ist es (nicht nur notwendig, aber auch) hinreichend, dass die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:

1) *K soll algebraisch-abgeschlossen in $\mathfrak{K}$ sein.*

2) *Besitzt K eine Primzahlcharakteristik p, so soll $\mathfrak{K}\times K^{p^{-1}}$ (ein Integritätsbereich, also) ein Körper sein*[1].

Zum Beweis schicken wir zuerst

Hilfssatz 1. Sind 1), 2) erfüllt, so ist $\mathfrak{K}/K$ algebraisch absolutfremd, (und umgekehrt).

Beweis. Es genügt den Fall der Primzahlcharakteristik zu erledigen. Wir nehmen die Bedingungen 1), 2) als erfüllt an, und bezeichnen mit Ω den kleinsten vollkommenen Oberkörper von K; $\Omega=\bigcup K^{p^{-i}}$. Dann ist.

$$\mathfrak{K}\leqq\mathfrak{K}\times K^{p^{-1}}\leqq\cdots\leqq\mathfrak{K}\times K^{p^{-i}}\leqq\cdots\leqq\mathfrak{K}\times\Omega,$$

und $\mathfrak{K}\times\Omega$ ist die Vereinigung von $\mathfrak{K}\times K^{p^{-i}}(i=1,2,\cdots)$. Da die Operation p Isomorphismus ist, sieht man nach Induktion leicht ein, dass $\mathfrak{K}\times K^{p^{-i}}$ Körper sind und dass die Erweiterungen $\mathfrak{K}\times K^{p^{-i}}/K^{p^{-i}}$ den Bedingungen 1), 2) genügen. Also sind die Bedingungen auch für $\mathfrak{K}\times\Omega/\Omega$ erfüllt. Sei nun Λ die algebraische algebraisch-abgeschlossene Erweiterung von Ω. Da dann Λ/Ω separabel ist, ist $\mathfrak{K}\times\Lambda/K=(\mathfrak{K}\times\Omega)\times\Lambda/\Omega$ ein Körper. Dies beweist unseren Hilfssatz.

Hilfssatz 2. Sei $\mathfrak{K}/K$ algebraisch absolut-fremd und $\mathfrak{L}/K$ rein transzendental. Dann sind $\mathfrak{K},\mathfrak{L}$ zueinander fremd, und die Erweiterung $\mathfrak{K}*\mathfrak{L}/\mathfrak{L}$ ist algebraisch absolut-fremd.

Beweis. Es sei $\mathfrak{X}$ ein System von erzeugenden unabhängigen Transzendenten aus $\mathfrak{L}$: $\mathfrak{L}=K(\mathfrak{X})$. Da $\mathfrak{K}\times\mathfrak{L}=\mathfrak{K}[\mathfrak{X}]K(\mathfrak{X})$ ist, ist es klar, dass $\mathfrak{K},\mathfrak{L}$ zueinander fremd sind und $\mathfrak{K}*\mathfrak{L}=\mathfrak{K}(\mathfrak{X})$ ist, wo das Variablensystem auch über $\mathfrak{K}$ als unabhängig gesehen ist. Um nun die algebraische absolute Fremdheit von $\mathfrak{K}*\mathfrak{L}/\mathfrak{L}=\mathfrak{K}(\mathfrak{X})/K(\mathfrak{X})$ zu beweisen, zeigen wir, dass die Bedingungen 1), 2) für sie erfüllt sind. Dabei können wir uns auf den Fall beschränken, wenn $\mathfrak{X}$ aus einem einzigen Element x besteht: $\mathfrak{L}=K(x)$. Gäbe es dann in $\mathfrak{K}(x)$ nicht in $K(x)$ enthaltene, über $K(x)$ algebraische Elemente, so betrachten wir solche, deren Nenner von möglichst niederen Grade sind. Unter ihnen suchen wir weiter derartige, deren Zähler kleinsten Grad besitzen. Es sei etwa

$$R(x)=\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m}{b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n}\qquad(a_i,b_i\in\mathfrak{K};\ a_m\neq0,\ b_n\neq0)$$

ein solches. Hier haben wir offenbar $b_0\neq0$, $m\geqq n$ und zwar $m\geqq1$, denn K ist algebraisch-abgeschlossen in $\mathfrak{K}$. Weiter sieht man leicht ein, dass a_0/b_0 über K algebraisch (also $\in K$) sein muss. Dann ist aber das Element

$$\left(R(x)-\frac{a_0}{b_0}\right)x^{-1}=\frac{a_0'+a_1'x+\cdots+a_{m-1}'x^{m-1}}{b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n}\qquad(a_i'\in\mathfrak{K})$$

---

1) Diese Bedingung 2) ist sicher keine Folge von 1). Sieh etwa ein Beispiel in Abe-Nakayama, a. a. O. Für diese Bedingung vgl. auch den Hilfssatz 3 unten.

algebraisch über $\mathfrak{K}$, was die Minimalität von m widerspricht. Dies zeigt, dass $K(x)$ algebraisch-abgeschlossen in $\mathfrak{K}(x)$ ist.

Ferner ist das Kompositum $\mathfrak{K}K^{p^{-1}}$ nach unserer Voraussetzung über K direkt, und daraus folgt leicht, dass $\mathfrak{K}K^{p^{-1}}(x^{p^{-1}})$ das direkte Kompositum von $\mathfrak{K}(x)$ und $K(x)^{p^{-1}}=K^{p^{-1}}(x^{p^{-1}})$ über $K(x)$ ist. Also ist auch die Bedingung 2) erledigt.

Beweis des Satzes 10. Es sei $\mathfrak{K}/K$ algebraisch absolut-fremd, und $\mathfrak{L}$ ein beliebiger Oberkörper von K. Ist $\mathfrak{X}$ ein Transzendenzbasis von $\mathfrak{L}/K$, so sind nach Hilfssatz 2 $\mathfrak{K}$ und $K(\mathfrak{X})$ zueinander über K fremd, und ihr direktes Kompositum $\mathfrak{K} * K(\mathfrak{X})$ ist algebraisch absolut-fremd über $K(\mathfrak{X})$. Also sind $\mathfrak{K} * K(\mathfrak{X})/K(\mathfrak{X})$ und $\mathfrak{L}/K(\mathfrak{X})$ zueinander fremd. Hieraus folgt unmittelbar, dass $\mathfrak{K}/K$ und $\mathfrak{L}/K$ es sind, und dies zeigt, dass $\mathfrak{K}/K$ absolut-fremd ist. Weiter folgt die absolute Fremdheit von $\mathfrak{K} * \mathfrak{L}/\mathfrak{L}$ im algebraischen Sinne, also dieselbe schlechthin, ohne weiteres aus derselben von $\mathfrak{K} * K(\mathfrak{X})/K(\mathfrak{X})$.

Suchen wir am Schluss noch die Bedingung dafür, dass $\mathfrak{K}\times\mathfrak{L}$ für jedes $\mathfrak{L}$ nilpotentfrei bleibt. Es gilt zunächst

Hilfssatz 3. $\mathfrak{L}/K$ sei eine rein-inseparable algebraische Erweiterung. Ist dann $\mathfrak{K}\times\mathfrak{L}$ mit einem Oberkörper $\mathfrak{K}$ von K nilpotentfrei, so ist es ein Körper.

Beweis. Es genügt den Fall zu betrachten, wo $(\mathfrak{L}:K)$ endlich ist. Bekanntlich ist dann $\mathfrak{K}\times\mathfrak{L}$ eine vollprimäre Algebra über $\mathfrak{K}$, und unsere Behauptung ist offensichtlich.

Satz 11. Dafür, dass $\mathfrak{K}\times\mathfrak{L}$ für jedes $\mathfrak{L}$ nilpotentfrei ist, reicht es aus, dass nur $\mathfrak{K}\times K^{p^{-1}}$ es (also ein Körper) ist[1].

Beweis. Es sei $\mathfrak{K}\times K^{p^{-1}}$ nilpotentfrei. Ist Ω der kleinste vollkommene Oberkörper von K, so sieht man wie beim Hilfssatz 1, dass $\mathfrak{K}\times\Omega$ ein Körper ist. Daraus folgt leicht, dass $\mathfrak{K}\times\mathfrak{L}$ für jede algebraische Erweiterung $\mathfrak{L}/K$ nilpotentfrei ist. Für einen allgemeinen Oberkörper $\mathfrak{L}/K$ sei $\mathfrak{X}$ seine Transzendenzbasis. $K(\mathfrak{X})/K$ ist absolut-fremd und $\mathfrak{K} * K(\mathfrak{X})=\mathfrak{K}(\mathfrak{X})$. Ferner sind, wie beim Hilfssatz 2, $\mathfrak{K}(\mathfrak{X})$ und $K(\mathfrak{X})^{p^{-i}}$ zueinander fremd über $K(\mathfrak{X})$, und zwar $\mathfrak{K}(\mathfrak{X}) * K(\mathfrak{X})^{p^{-1}}=\mathfrak{K}K^{p^{-1}}(\mathfrak{X}^{p^{-1}})$. Da $\mathfrak{L}/K(\mathfrak{X})$ algebraisch ist, so folgt nach der letzten Betrachtung, dass $\mathfrak{K}(\mathfrak{X})\times\mathfrak{L}/K(\mathfrak{X})$ nilpotentfrei ist. Daher ist $\mathfrak{K}\times\mathfrak{L}/K$ es auch, weil $\mathfrak{K}\times\mathfrak{L}/K\subseteqq\mathfrak{K}(\mathfrak{X})\times\mathfrak{L}/K(\mathfrak{X})$ ist.

---

1) D.h. die Bedingung 2) beim Satz 10. Im Fall der Charakteristik 0 soll die Bedingung nichts verlangen.