110. *Sur les espaces a connexion conforme normale dont les groupes d'holonomie fixent une sphère à un nombre quelconque de dimensions I.*

Par Kentaro YANO.
Mathematical Institute, Tokyo Imperial University.

Shigeo SASAKI.
Mathematical Institute, Tohoku Imperial University, Sendai.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., Oct. 12, 1944.)

§ 1. Un des présents auteurs S. Sasaki[1] a récemment étudié la structure des espaces à connexion conforme normale dont les groupes d'holonomie fixent un point ou une hypersphère et il a obtenu le théorème fondamental suivant: Si le groupe d'holonomie d'un espace C_n à connexion conforme normale est un sous-groupe du groupe de Möbius qui fixe un point ou une hypersphère, le C_n est un espace à connexion conforme normale correspondant à la classe des espaces de Riemann qui sont conformes les uns aux autres et parmi lesquels se trouve un espace d'Einstein à courbure scalaire nulle ou non nulle suivant que le sous-groupe fixe un point ou une hypersphère. La réciproque est aussi vraie. Comme nous avons déjà remarqué[2], le C_n ayant cette propriété peut contenir un point singulier ou une hypersurface totalement ombiliquée exceptionnelle.

En généralisant ce problème, nous allons, dans cette Note, étudier la structure des espaces à connexion conforme normale dont les groupes d'holonomie fixent une sphère à un nombre quelconque de dimensions[3] [4].

§ 2. Supposons que le groupe d'holonomie d'un espace C_n à connexion conforme normale à n dimensions fixe une sphère S_{m-1} à $(m-1)$ dimensions. Alors, on peut trouver $n-m+1$ sphères à $(n-1)$ dimensions ou $n-m+1$ hypersphères contenant la sphère S_{m-1} fixée par le groupe d'holonomie, dont $n-m$ hypersphères $R_{m+1}, R_{m+2}, \dots, R_n$ sont supposées passant par le point courant A_0[5], et la dernière R_∞ orthogonale aux autres hypersphères $R_{m+1}, \dots, R_n$. Comme il existe $m+1$ hypersphères linéairement indépendantes, orthogonales aux hypersphères

---

1) S. Sasaki: On the spaces with normal conformal connexions whose groups of holonomy fix a point or a hypersphere, I, II, III, Japanese Journal of Math., **18** (1943), 615-622; 623-633; 791-795.

2) K. Yano: Conformal and concircular geometries in Einstein spaces. Proc. **19** (1943), 444-453.

3) Les mêmes problèmes pour les espaces de Riemann et pour les espaces à connexion affine ont été traités par M. M. Abe: Sur la réductibilité du groupe d'holonomie. I, Les espaces à connexion affine. Proc. **20** (1944), 56-60; II, Les espaces de Riemann. Proc. **20** (1944), 177-182.

4) Pour les notations adoptées ici, voir par example, K. Yano: Sur la théorie des espaces à connexion conforme. Journal of the Faculty of Science. Imperial University of Tokyo, Section I, Volume IV, Part 1, (1939), 1-59.

5) Si le point courant A_0 est sur S_{m-1}, le raisonnement tombe en défaut. L'ensemble de tels points constitue une variété totalement ombiliquée à $m-1$ dimensions.

$R_{m+1}, \dots, R_n, R_\infty$, choisissons, parmi ces hypersphères, m hypersphères $R_1, R_2, \dots, R_m$, passant par le point courant A_0, et l'hypersphère R_0 orthogonale aux $R_1, \dots, R_m$. On normalise ici les hypersphères R_0 et R_∞ de manière qu'on ait $R_0R_0=-1$ et $R_\infty R_\infty=1$.

Les hypersphères R_0, R_a, R_i, R_∞[1] formant un repère dans chaque espace tangent conforme, le point courant A_0 peut être représenté, par rapport à ce repère, par la formule de la forme

$$A_0=a^0R_0+a^aR_a+a^iR_i+a^\infty R_\infty\,,$$

ce qui se réduit, le point A_0 se trouvant sur les hypersphères R_a et R_i, à la forme suivante

$$A_0=a^0R_0+a^\infty R_\infty\,,$$

ou a^0 et a^∞ doivent satisfaire à

$$-(a^0)^2+(a^\infty)^2=0\,,$$

A_0 étant une hypersphère de rayon nul. Donc, on peut poser

$$A_0=a(R_0+R_\infty)\,,$$

en changeant au besoin le signe de R_∞.

Appelant A_∞ le deuxième point d'intersection des n hypersphères

$$A_a=R_a \quad \text{et} \quad A_i=R_i\,,$$

A_∞ s'exprime, comme on peut le vérifier facilement, par la formule de la forme

$$A_\infty=b(R_0-R_\infty)\,.$$

Le point A_∞ étant déterminé à un facteur près, on peut fixer ce facteur par la condition

$$A_0A_\infty=-1\,,$$

ce qui nous donne

$$b=\frac{1}{2a}\,.$$

En définitive, nous avons défini un repère mobile $[A_0, A_a, A_i, A_\infty]$ par les relations

$$\text{(2.1)} \qquad \begin{cases} A_0=a(R_0+R_\infty)\,, \\ A_a=R_a\,, \\ A_i=R_i\,, \\ A_\infty=\dfrac{1}{2a}(R_0-R_\infty)\,, \end{cases}$$

où par définition

$$\text{(2.2)} \qquad \begin{cases} A_0A_0=0\,, & A_0A_a=0\,, & A_0A_i=0\,, & \\ & A_aA_\infty=0\,, & A_iA_\infty=0\,, & A_\infty A_\infty=0\,, \\ A_0A_\infty=-1\,, & A_aA_b=g_{ab}\,, & A_aA_i=g_{ai}=0\,, & A_iA_j=g_{ij}\,. \end{cases}$$

1) Les indices $\begin{cases} \lambda, \mu, \nu, \dots, \\ a, b, c, \dots, \\ i, j, k, \dots, \end{cases}$ prennent respectivement les valeurs $\begin{cases} 1, 2, \dots, n, \\ 1, 2, \dots, m, \\ m+1, \dots, n. \end{cases}$

§3. Le fait que la sphère S_{m-1} à $(m-1)$ dimensions est fixée par la connexion conforme de C_n est représenté par les formules de la forme

$$\text{(3.1)} \qquad \begin{cases} dR_j = \bar{\omega}_j^i R_i + \bar{\omega}_j^\infty R_\infty , \\ dR_\infty = \bar{\omega}_\infty^i R_i + \bar{\omega}_\infty^\infty R_\infty , \end{cases}$$

les $\bar{\omega}$ étant des formes de Pfaff par rapport aux coordonnées x^λ de C_n.

Ces équations peuvent être encore écrites sous la forme

$$\text{(3.2)} \qquad \begin{cases} R_0 dR_j = 0 , & R_b dR_j = 0 , \\ R_0 dR_\infty = 0 , & R_b dR_\infty = 0 . \end{cases}$$

En substituant les relations

$$\begin{cases} R_0 = \dfrac{1}{2a} A_0 + a A_\infty , \\ R_a = A_a , \qquad R_i = A_i , \\ R_\infty = \dfrac{1}{2a} A_0 - a A_\infty , \end{cases}$$

tirées de (2.1), dans (3.2), on trouve

$$\text{(3.3)} \qquad \begin{cases} \left(\dfrac{1}{2a} A_0 + a A_\infty\right) dA_j = 0 , \\ A_b dA_j = 0 , \\ \dfrac{1}{a} A_0 d(a A_\infty) - a A_\infty d\left(\dfrac{1}{a} A_0\right) = 0 , \\ A_b d\left(\dfrac{1}{2a} A_0\right) - A_b d(a A_\infty) = 0 . \end{cases}$$

Or, la connexion conforme de C_n étant représentée, par rapport au repère $[A_0, A_a, A_i, A_\infty]$, par

$$\text{(3.4)} \qquad \begin{cases} dA_0 = \omega_0^0 A_0 + \omega^a A_a + \omega^i A_i , \\ dA_b = \omega_b^0 A_0 + \omega_b^a A_a + \omega_b^i A_i + \omega_b^\infty A_\infty , \\ dA_j = \omega_j^0 A_0 + \omega_j^a A_a + \omega_j^i A_i + \omega_j^\infty A_\infty , \\ dA_\infty = \omega_\infty^a A_a + \omega_\infty^i A_i + \omega_\infty^\infty A_\infty , \end{cases}$$

où

$$\text{(3.5)} \qquad \begin{cases} \omega_b^a g_{ac} + \omega_c^a g_{ab} = dg_{bc} ; & \omega_j^i g_{ik} + \omega_k^i g_{ij} = dg_{jk} , \\ \omega^a g_{ab} - \omega_b^\infty = 0 , & \omega^i g_{ij} - \omega_j^\infty = 0 , \\ \omega_b^i g_{ij} + \omega_j^a g_{ab} = 0 , & \omega_0^0 + \omega_\infty^\infty = 0 , \\ \omega_b^0 - \omega_\infty^a g_{ab} = 0 , & \omega_j^0 - \omega_\infty^i g_{ij} = 0 , \end{cases}$$

nous avons, de (3.3), les relations

$$
(3.6)\qquad \begin{cases} \omega_j^\infty + 2a^2\omega_j^0 = 0\,, \\ \omega_j^a = 0\,, \\ \omega_0^0 - \omega_\infty^\infty = \dfrac{2da}{a}\,, \\ \omega^a - 2a^2\omega_\infty^a = 0\,, \end{cases}
$$

où les ω sont aussi les formes de Pfaff par rapport aux coordonnées x^λ.

La sphère S_{m-1}, qui est l'intersection à $(m-1)$ dimensions de $n-m+1$ hypersphères $R_{m+1}, R_{m+2}, \dots, R_n, R_\infty$, étant fixée par le groupe d'holonomie de C_n, la sphère S_{n-m-1}, qui est l'intersection à $(n-m-1)$ dimensions de $m+1$ hypershères $R_0, R_1, \dots, R_m$ orthogonales toutes aux $R_{m+1}, \dots, R_n, R_\infty$, est évidemment aussi fixée par le groupe d'holonomie en jeu. Donc, d'après un même procédé que le précédent, on a

$$
(3.7)\qquad \begin{cases} R_\infty dR_b = 0\,, & R_j dR_b = 0\,, \\ R_\infty dR_0 = 0\,, & R_j dR_0 = 0\,, \end{cases}
$$

d'où

$$
(3.8)\qquad \begin{cases} \omega_b^\infty - 2a^2\omega_b^0 = 0\,, \\ \omega_b^i = 0\,, \\ \omega_0^0 - \omega_\infty^\infty = \dfrac{2da}{a}\,, \\ \omega^i + 2a^2\omega_\infty^i = 0\,. \end{cases}
$$

Ces relations sont équivalentes aux (3.6), comme on le voit facilement en tenant compte des (3.5).

§ 4. Nous allons montrer dans ce paragraphe que si les conditions (3.6) ou (3.8) sont satisfaites, il existe dans C_n une famille des ∞^{n-m} surfaces totalement ombiliquées à m dimensions et une famille des ∞^m surfaces totalement ombiliquées à $n-m$ dimensions, une des surfaces de la première famille étant toujours orthogonale à une des surfaces de la seconde famille.

En effet, les équations de structure étant

$$
(4.1)\qquad \begin{cases} \Omega_0^0 = -(\omega_0^0)' + [\omega^\lambda \omega_\lambda^0]\,, \\ \Omega_0^\lambda = -(\omega^\lambda)' + [\omega_0^0\omega^\lambda] + [\omega^\mu\omega_\mu^\lambda]\,, \\ \Omega_\mu^\lambda = -(\omega_\mu^\lambda)' + [\omega_\mu^0\omega^\lambda] + [\omega_\mu^\nu\omega_\nu^\lambda] + [\omega_\mu^\infty\omega_\infty^\lambda]\,, \\ \Omega_\mu^0 = -(\omega_\mu^0)' + [\omega_\mu^0\omega_0^0] + [\omega_\mu^\nu\omega_\nu^0]\,, \end{cases}
$$

on en trouve

$$
(4.2)\qquad (\omega^\lambda)' = [\omega_0^0\omega^\lambda] + [\omega^\mu\omega_\mu^\lambda]\,,
$$

puisque notre connexion conforme normale est sans torsion. En posant, dans (4.2), $\lambda=a$, $\lambda=i$ respectivement, on trouve, grâce aux deuxièmes équations de (3.6) et de (3.8),

$$
(4.3)\qquad (\omega^a)' = [\omega_0^0\omega^a] + [\omega^b\omega_b^a]\,,
$$

et

(4.4) $$(\omega^i)' = [\omega_0^0 \omega^i] + [\omega^j \omega_j^i] .$$

Or, les équations (4.4) nous montrent que le système des équations de Pfaff

(4.5) $$\omega^i = 0$$

est complètement intégrable et définit, dans notre espace à connexion conforme normale, une famille des ∞^{n-m} surfaces à m dimensions le long desquelles nous avons

$$\begin{cases} dA_0 = \omega_0^0 A_0 + \omega^a A_a , \\ dA_b = \omega_b^0 A_0 + \omega_b^a A_a \qquad + \omega_b^\infty A_\infty , \\ dA_j = \omega_j^0 A_0 \qquad + \omega_j^i A_i + \omega_j^\infty A_\infty , \\ dA_\infty = \qquad \omega_\infty^a A_a + \omega_\infty^i A_i + \omega_\infty^\infty A_\infty , \end{cases}$$

et auxquelles les $n-m$ hypersphères A_j sont tangentes. De plus, le long de ces surfaces, nous avons

$$(dA_j) A_a = 0 .$$

Donc, d'après un théorème bien connu[1], nous savons que toutes ces surfaces sont totalement ombiliquées.

De même, le systeme des équations de Pfaff

(4.6) $$\omega^a = 0$$

étant complètement intégrable, il définit, dans notre espace à connexion conforme normale, une famille des ∞^m surfaces à $(n-m)$ dimensions le long desquelles nous avons

$$\begin{cases} dA_0 = \omega_0^0 A_0 \qquad + \omega^i A_i , \\ dA_b = \omega_b^0 A_0 + \omega_b^a A_a \qquad + \omega_b^\infty A_\infty , \\ dA_j = \omega_j^0 A_0 \qquad + \omega_j^i A_i + \omega_j^\infty A_\infty , \\ dA_\infty = \qquad \omega_\infty^a A_a + \omega_\infty^i A_i + \omega_\infty^\infty A_\infty , \end{cases}$$

et auxquelles les m hypersphères A_b sont tangentes. De plus, le long de ces surfaces, nous avons

$$(dA_b) A_j = 0 .$$

Donc, ces surfaces sont aussi totalement ombiliquées.

En définitive, nous savons que notre espace à connexion conforme normale contient une famille des ∞^{n-m} surfaces totalement ombiliquées à m dimensions et une famille des ∞^m surfaces totalement ombiliquées à $n-m$ dimensions, deux surfaces appartenant respectivement à chaque famille étant toujours orthogonales l'une à l'autre. Donc, ds^2 de notre espace à connexion conforme normale doit être conformément séparable[2],

1) K. Yano et Y. Mutô: Sur la théorie des espaces à connexion conforme normale et la géométrie conforme des espaces de Riemann. Journal of the Faculty of Science, Imperial University of Tokyo, Section I, Volume IV, Part 3, (1941), 117-169.

2) K. Yano: Conformally separable quadratic differential forms. Proc. **16** (1940), 83-86.

c'est-à-dire, si l'on choisit un système de coordonnées dans lequel la famille des ∞^m surfaces totalement ombiliquées à $(n-m)$ dimensions est représentée par les équations

(4.7) $\quad x^1=\text{constante},\ x^2=\text{constante},\ \ldots\ldots,\ x^m=\text{constante},$

et la famille des ∞^{n-m} surfaces totalement ombiliquées à m dimensions par

(4.8) $\quad x^{m+1}=\text{constante},\ x^{m+2}=\text{constante},\ \ldots\ldots,\ x^n=\text{constante},$

le ds^2 de notre espace peut s'écrire sous une forme séparée :

(4.9) $$ds^2=f(x^\lambda)g^*_{bc}(x^a)dx^b dx^c+h(x^\lambda)g^*_{jk}(x^i)dx^j dx^k .$$

§ 5. Des équations

$$\omega_0^0+\omega_\infty^\infty=0 ,$$
$$\omega_0^0-\omega_\infty^\infty=\frac{2da}{a} ,$$

nous avons

$$\omega_0^0=\frac{da}{a}, \qquad \omega_\infty^\infty=-\frac{da}{a} .$$

En substituant ces relations dans les équations (3.4), on trouve

$$\begin{cases} d\left(\frac{1}{a}A_0\right)= & \frac{\omega^a}{a}A_a+\frac{\omega^i}{a}A_i , \\ dA_b=a\omega_b^0\left(\frac{1}{a}A_0\right)+\omega_b^a A_a & +\frac{\omega_b^\infty}{a}(aA_\infty) , \\ dA_j=a\omega_j^0\left(\frac{1}{a}A_0\right) & +\omega_j^i A_i+\frac{\omega_j^\infty}{a}(aA_\infty) , \\ d(aA_\infty)= & a\omega_\infty^a A_a+a\omega_\infty^i A_i . \end{cases}$$

Donc, en écrivant A_0 et A_∞ au lieu de $\frac{1}{a}A_0$ et aA_∞ respectivement et en changeant un peu la notation, on obtient

(5.1) $$\begin{cases} dA_0= & \omega^a A_a+\omega^i A_i , \\ dA_b=\omega_b^0 A_0+\omega_b^a A_a & +\omega_b^\infty A_\infty , \\ dA_j=\omega_j^0 A_0 & +\omega_j^i A_i+\omega_j^\infty A_\infty , \\ dA_\infty= & \omega_\infty^a A_a+\omega_\infty^i A_i . \end{cases}$$

Pour ce repère, les conditions (3.6) se réduisent aux deux équations suivantes :

(5.2) $$\begin{cases} \omega_j^\infty+2\omega_j^0=0 , \\ \omega^a-2\omega_\infty^a=0 . \end{cases}$$

Les $n-m$ hypersphères A_i étant orthogonales aux surfaces à $(n-m)$ dimensions définies par

$$x^1=\text{constante},\ x^2=\text{constante},\ \ldots\ldots,\ x^m=\text{constante},$$

si l'on déplace sur une de ces surfaces, dA_0 doit être une combinaisons linéaire des $n-m$ hypersphères A_i. Donc, si l'on pose $dx^a=0$, les formes de Pfaff ω^a doivent être nulles, et par conséquent ω^a doivent avoir la forme

$$\omega^a = p^a_b dx^b.$$

Par un raisonnement analogue. on trouve aussi

$$\omega^i = p^i_j dx^j.$$

Donc, la première équation de (5.1) s'écrit

$$dA_0 = p^a_b dx^b A_a + p^i_j dx^j A_i .$$

En écrivant respectivement A_0, A_b, A_j, A_∞ au lieu de $A_0, p^a_b A_a, p^i_j A_i, A_\infty$, on obtient. de (5.1), les équations de la forme

$$(5.3)\qquad \begin{cases} dA_0 = dx^a A_a + dx^i A_i , \\ dA_b = \omega^0_b A_0 + \omega^a_b A_a + \omega^\infty_b A_\infty . \\ dA_j = \omega^0_j A_0 + \omega^i_j A_i + \omega^\infty_j A_\infty , \\ dA_\infty = \omega^a_\infty A_a + \omega^i_\infty A_i , \end{cases}$$

et les équations (5.2) sont encore valables. Nous les écrivons encore ici,

$$(5.4)\qquad \begin{cases} \omega^\infty_j + 2\omega^0_j = 0 , \\ \omega^a - 2\omega^a_\infty = 0 . \end{cases}$$

Les formes de Pfaff ω satisfont aux équations

$$\begin{cases} \omega^c_b g_{ac} + \omega^a_c g_{ab} = dg_{bc} , \qquad \omega^i_j g_{ik} + \omega^i_k g_{ij} = dg_{jk} , \\ dx^a g_{ab} - \omega^\infty_b = 0 , \qquad dx^i g_{ij} - \omega^\infty_j = 0 , \\ \omega^0_b - \omega^a_\infty g_{ab} = 0 , \qquad \omega^0_j - \omega^i_\infty g_{ij} = 0 , \end{cases}$$

donc, en posant

$$\omega^\lambda_\mu = \omega^\lambda_{\mu\nu} dx^\nu , \qquad \omega^0_\mu = \omega^0_{\mu\nu} dx^\nu , \qquad \omega^\lambda_\infty = \omega^\lambda_{\infty\nu} dx^\nu ,$$

nous avons

$$(5.5)\qquad \begin{cases} \omega^a_{b\nu} g_{ac} + \omega^a_{c\nu} g_{ab} = \dfrac{\partial g_{bc}}{\partial x^\nu} , \qquad \omega^i_{j\nu} g_{ik} + \omega^i_{k\nu} g_{ij} = \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^\nu} , \\ \omega^\infty_{bc} = g_{bc} , \qquad \omega^\infty_{bk} = 0 , \qquad \omega^\infty_{ij} = g_{ij} , \\ \omega^0_{b\nu} = \omega^a_{\infty\nu} g_{ab} , \qquad \omega^0_{j\nu} = \omega^i_{\infty\nu} g_{ij} . \end{cases}$$

Par conséquent, les équations (5.4) sont équivalentes aux

$$(5.6)\qquad \omega^0_{bc} = \frac{1}{2} g_{bc} , \qquad \omega^0_{bk} = \omega^0_{jc} = 0 , \qquad \omega^0_{jk} = -\frac{1}{2} g_{jk} \text{ [1]},$$

---

1) Si $n=m$, nous avons $\omega^0_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu}$ d'où on conclut que l'espace ambiant est un espace d'Einstein, $\omega^0_{\mu\nu}$ ayant la forme $\omega^0_{\mu\nu} = -\frac{R_{\mu\nu}}{n-2} + \frac{R g_{\mu\nu}}{2(n-1)(n-2)}$. Voir, S. Sasaki, déjà cité.

d'où

$$\omega^a_{\infty c} = \frac{1}{2}\delta^a_c\,, \qquad \omega^a_{\infty j} = \omega^i_{\infty c} = 0\,, \qquad \omega^i_{\infty k} = -\frac{1}{2}\delta^i_k\,. \tag{5.7}$$

En substituant (5.6) et (5.7) dans la dernière équation de (5.3), on trouve

$$dA_\infty = \frac{1}{2}dx^a A_a - \frac{1}{2}dx^i A_i\,,$$

donc, cette équation et la première équation de (5.3) nous donnent

$$\begin{cases} d\left(\frac{1}{2}A_0 - A_\infty\right) = dx^i A_i\,, \\ d\left(\frac{1}{2}A_0 + A_\infty\right) = dx^a A_a\,. \end{cases} \tag{5.8}$$

Par conséquent, si l'on déplace sur une des surfaces définies par

$$x^{m+1} = \text{constante}, \;\ldots\ldots,\; x^n = \text{constante},$$

l'hypersphère $\frac{1}{2}A_0 - A_\infty$ est fixée par la connexion de C_n, de même, si l'on déplace sur une des surfaces définies par

$$x^1 = \text{constante}, \;\ldots\ldots,\; x^m = \text{constante},$$

l'hypersphère $\frac{1}{2}A_0 + A_\infty$ est fixée par la connexion de C_n.

§ 6. Nous avons, dans les paragraphes précédents, démontré que, si le groupe d'holonomie d'un espace C_n à connexion conforme normale à n dimensions fixe une sphère S_{m-1} à $(m-1)$ dimensions, alors la forme quadratique différentielle fondamentale de l'espace C_n doit être séparable conformément, soit, il doit exister un système de coordonnées tel que la forme fondamentale a la forme séparée suivante :

$$ds^2 = f(x^\lambda) g^*_{bc}(x^a) dx^b dx^c + h(x^\lambda) g^*_{jk}(x^i) dx^j dx^k\,, \tag{6.1}$$

les surfaces C_m à m dimensions définies par les équations x^i = constantes et les surfaces C_{n-m} à $(n-m)$ dimensions définies par x^a = constantes étant toutes les deux totalement ombiliquées et orthogonales les unes aux autres, et de plus, si l'on déplace le long d'une surfaces C_m, la connexion de C_n fixe une hypersphère R_∞ qui est orthogonale aux toutes les hypersphères passant par le point courant et le point d'infini et, si l'on déplace le long d'une des surfaces C_{n-m}, la connexion de C_n fixe l'hypersphère R_0 qui est orthogonale à R_∞ et aux toutes les hypersphères passant par le point courant et le point d'infini.

Cela étant, nous allons montrer que la réciproque est aussi vraie.

Supposons d'abord que la forme fondamentale soit séparable conformément et prenons un système de coordonnées tel qu'elle s'écrit sous la forme (6.1).

En désignant par $[A_0, A_a, A_i, A_\infty]$ un repère semi-naturel par rapport à ce système de coordonnées, on voit que les hypersphères A_a sont orthogonales à C_m définies par x^i = constantes et tangentes à

C_{n-m} définies par x^a=constantes, et les hypersphères A_i sont orthgonales à C_{n-m} et tangentes à C_m.

Comme l'on suppose qu'il y ait une hypersphère R_∞ orthgonale à toutes les hypersphères A_a et A_i qui est fixée par la connexion conforme de C_n quand on déplace le long de C_m, on a

$$R_\infty = a^0 A_0 + a^\infty A_\infty .$$

En supposant, ce qui ne restreint pas la généralité, que

$$R_\infty R_\infty = +1 ,$$

on en tire

$$2a^0 a^\infty = -1 .$$

Donc, l'hypersphère R_∞ peut s'écrire

$$R_\infty = \frac{1}{2a} A_0 - aA_\infty .$$

Comme l'on suppose encore que l'hypersphère R_0 orthgonale aux hypersphères A_a, A_i et R_∞ est fixée par la connexion de C_n si l'on déplace le long de C_{n-m}, l'hypersphère R_0 peut s'écrire

$$R_0 = \frac{1}{2a} A_0 + aA_\infty .$$

Donc, en écrivant respectivement A_0 et A_∞ au lieu de $\frac{1}{a}A_0$ et aA_∞, R_0 et R_∞ prennent la forme suivante

$$\tag{6.2} \begin{cases} R_0 = \frac{1}{2} A_0 + A_\infty , \\ R_\infty = \frac{1}{2} A_0 - A_\infty . \end{cases}$$

Comme R_∞ est fixée par la connexion conforme de C_n quand on déplace sur C_m, on a

$$dR_\infty = \alpha R_\infty ,$$

d'où

$$\tag{6.3} A_a dR_\infty = A_i dR_\infty = \left(\frac{1}{2} A_0 + A_\infty\right) dR_\infty = 0 ,$$

pourvu qu'on pose $dx^i = 0$ dans ces équations.

dR_∞ étant donné par

$$dR_\infty = d\left(\frac{1}{2} A_0 - A_\infty\right) = \frac{1}{2} (\omega_0^0 A_0 + dx^a A_a) - (\omega_\infty^a A_a + \omega_\infty^i A_i + \omega_\infty^\infty A_\infty) ,$$

on obtient des (6.3)

$$\tag{6.4} \frac{1}{2}\delta_b^a - \omega_{\infty b}^a = 0 , \quad \omega_{\infty b}^i = 0 , \quad -\omega_0^0 + \omega_\infty^\infty = 0 ,$$

où l'on a posé

$$\omega_\infty^a = \omega_{\infty\nu}^a dx^\nu .$$

De même, en partant de la condition que R_0 est fixée par la connexion de C_n quand on déplace sur C_{n-m}, on trouve

$$\frac{1}{2}\delta_j^i+\omega_{\infty j}^i=0\,,\qquad \omega_{\infty j}^a=0\,,\qquad \omega_0^0-\omega_\infty^\infty=0\,. \tag{6.5}$$

La forme de Pfaff $\omega_0^0-\omega_\infty^\infty$ étant nulle si l'on y pose $dx^a=0$ ou $dx^i=0$, elle est identiquement nulle, d'ou, en tenant compte de la relation $\omega_0^0+\omega_\infty^\infty=0$, on trouve

$$\omega_0^0=\omega_\infty^\infty=0\,. \tag{6.6}$$

Les autres équations de (6.4) et (6.5) nous donnent

$$\omega_{bc}^0=\frac{1}{2}g_{bc}\,,\qquad \omega_{jc}^0=\omega_{bk}^0=0\,,\qquad \omega_{jk}^0=-\frac{1}{2}g_{jk} \tag{6.7}$$

Les formes de Pfaff ω_b^i et ω_j^a étant nulles à cause du fait que les C_m et les C_{n-m} sont toutes totalement ombiliquees, on a, comme les équations définissant la connexion conforme de C_n,

$$\left\{\begin{aligned}
dA_0&= && dx^aA_a+dx^iA_i\,,\\
dA_b&=\frac{1}{2}g_{bc}dx^cA_0+\omega_b^aA_a && +g_{bc}dx^cA_\infty\,,\\
dA_j&=-\frac{1}{2}g_{jk}dx^kA_0 && +\omega_j^iA_i+g_{jk}dx^kA_\infty\,,\\
dA_\infty&= && \frac{1}{2}dx^aA_a-\frac{1}{2}dx^iA_i\,,
\end{aligned}\right. \tag{6.8}$$

d'où

$$\left\{\begin{aligned}
&dA_b=\omega_b^aA_a+g_{bc}dx^c\Big(\frac{1}{2}A_0+A_\infty\Big)\,,\\
&d\Big(\frac{1}{2}A_0+A_\infty\Big)=dx^aA_a\,,\\
&dA_j=\omega_j^iA_i-g_{jk}dx^k\Big(\frac{1}{2}A_0-A_\infty\Big)\,,\\
&d\Big(\frac{1}{2}A_0-A_\infty\Big)=dx^iA_i\,,
\end{aligned}\right.$$

ce qui montre que l'intersection à $(n-m-1)$ dimensions des hypershères A_a et $\frac{1}{2}A_0+A_\infty$ et l'intersection à $(m-1)$ dimensions des hypersphères A_i et $\frac{1}{2}A_0-A_\infty$ sont fixées par le groupe d'holonomie de l'espace C_n à connexion conforme normale. Ainsi avons nous démontré la réciproque, donc, nous avons le

Théorème : Pour que le groupe d'holonomie d'un espace C_n à connexion conforme normale à n dimensions fixe une sphère à $(m-1)$ dimensions, il faut et il suffit que la forme quadratique différentielle fondamentale soit séparable conformément sous la forme

$$ds^2 = f(x^\lambda) g^*_{bc}(x^a) dx^b dx^c + h(x^\lambda) g^*_{jk}(x^i) dx^j dx^k ,$$

les surfaces C_m *définies par* x^i = *constantes et les surfaces* C_{n-m} *définies par* x^a = *constantes étant toutes les deux totalement ombiliquées et orthogonales les unes aux autres, et qu'il existe une hypersphère orthogonale aux toutes les hypersphères passant par le point courant et le point d'infini qui est fixée par la connexion de* C_n *quand on déplace sur* C_m *et l'hypershpère orthogonale à l'hypersphère précédente et aux toutes les hypersphères passant par le point courant et le point d'infini soit fixée par la connexion de* C_n *quand on déplace sur* C_{n-m}.