108. Über stochastischen Prozess. I[1].

Von Hidegorô NAKANO.
Mathematical Institute, Tokyo Imperial University.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., Oct. 12, 1944.)

Der unstetige stochastische Prozess.

A. Khintchine hat den unstetigen stochastischen Prozess behandelt unter den quantitativen Voraussetzungen über Wahrscheinlichkeit[2]. In dieser Abhandlung wollen wir diese Aufgabe durch das topologische Mass[3] nur unter den qualitativen Voraussetzungen erörtern: Wenn 1) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass wenichstens ein Ereignis in einem Zeitintervall der Länge t eintritt, mit $t \to 0$ gegen. 0 konvergiert; und 2) Ereignisse mehr als eins nicht gleichzeitig eintreten kann bis auf Wahrscheinlichkeit Null, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass n Ereignisse im Zeitintervall (t_1, t_2) eintreten, durch die Poissonsche Verteilung: $\frac{1}{n!}\big(\lambda(t_2) - \lambda(t_1)\big)^n e^{-(\lambda(t_2)-\lambda(t_1))}$ gegeben, wobei $\lambda(t)$ eine monoton wachsende stetige Funktion von t ist. Unsere Methode lässt sich ohne weiters auf den stetigen stochastischen Prozess anwenden und ist einfacher als die von J.L. Doob[4].

Im folgenden verwenden wir die Bezeichnungen in einer früheren Abhandlung[5]. Ein regulärer bikompakter Raum $\mathfrak{R}$ heisst ein *Wahrscheinlichkeitsraum*, wenn ein topologisches Mass $\mathfrak{m}$ auf $\mathfrak{R}$ mit $\mathfrak{m}\mathfrak{R}=1$ definiert ist. Nach dem Erweiterungssatz[6] besitzt $\mathfrak{m}$ eine einzige totaladditive Erweiterung, die man mit P bezeichnet. Eine bis auf Nullmenge definierte, messbare Funktion φ auf $\mathfrak{R}$ heisst eine *zufällige Grösse*, deren Erwartung $E(\varphi)$ und Streuung $\sigma(\varphi)$ wie gewöhnlich[7] mit

$$E(\varphi)=\int_R \varphi dP, \qquad \sigma(\varphi)^2=E(\varphi^2)-E(\varphi)^2$$

definiert, und die Funktion reeller Veränderlichen

$$F(\xi)=P\{x:\ \varphi(x)\leqq\xi\}$$

heisst die *Verteilungsfunktion* von φ. Endlich viele zufällige Grösen $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_\kappa$ auf $\mathfrak{R}$ heisst *voneinander unabhängig*, wenn

---

1) Ausführliches erscheint in der Abhandlung: 中野秀五郎: 確率原理と確率過程 (應用數學).

2) A. Khintchine: Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Erg. Math. II. 1933.

3) H. Nakano: Topologische Masse, Proc. Phys-Math. Soc. Japan, 25, 1943, 279–334, oder. 中野秀五郎: 測度論 (裳華房).

4) J. L. Doob: Stochastic process depending on a continuous parameter; Trans. Am. Math. 42, 1937, 107–140.

5) H. Nakano: Topologische Masse.

6) Vgl. 5) Satz 5.1 oder 中野秀五郎: 測度論.

7) A. Kolmogoroff: Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Erg. Math. II. 1933.

$$P\{x: \varphi_\nu(x) \leqq a_\nu(\nu=1, 2, \ldots, \varkappa)\} = \prod_{\nu=1}^{\varkappa} P\{x: \varphi_\nu(x) \leqq a_\nu\}$$

ist. Eine Folge von zufälligen Grössen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ konvergiert gegen φ *nach Wahrscheinlichkeit* und man bezeichnet mit

$$P-\lim_{\nu\to\infty} \varphi_\nu = \varphi,$$

wenn für jede positive Zahl ε

$$\lim_{\nu\to\infty} P\{\,|\varphi_\nu - \varphi| \geqq \varepsilon\} = 0$$

ist. Wenn $P-\lim_{\nu\to\infty} \varphi_{\mu,\nu} = \varphi_\mu(\mu=1, 2, \ldots, \varkappa)$ ist, so kann man leicht beweisen:

$$\lim_{\nu\to\infty} P\{\varphi_{\mu,\nu} \leqq a_\mu(\mu=1, 2, \ldots, \varkappa)\} = P\{\varphi_\mu \leqq a_\mu(\mu=1, 2, \ldots, \varkappa)\}$$

für stetigkeitspunkt a_μ der Verteilungsfunktion $F_\mu(\xi)$ von φ_μ.

Ein System von regulären bikompakten Räumen $\mathfrak{R}^\lambda(0 \leqq \lambda \leqq 1)$ mit stetigen (nicht notwendig endlichen) Funktionen φ^λ auf $\mathfrak{R}^\lambda$ heisst ein *stochastischer Prozess,* wenn der Produktraum $\prod_\lambda \mathfrak{R}^\lambda$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit P ist. Da man φ^λ als die stetige Funktion auf $\prod_\lambda \mathfrak{R}^\lambda$ betrachten kann, ist φ^λ eine zufällige Grösse. Im folgenden nehmen wir an, dass die Erwartung und die Streuung jedes φ^λ endlich ist. Ein stochastisches Prozess $(\mathfrak{R}^\lambda, \varphi^\lambda, P)_{0\leqq\lambda\leqq1}$ heisst *differenziert,* wenn die zufälligen Grössen $\varphi^{\lambda_2}-\varphi^{\lambda_1}, \ldots, \varphi^{\lambda_\varkappa}-{}^{\lambda_{\varkappa-1}}$ für $0 \leqq \lambda_1 < \lambda_2 \cdots < \lambda_\varkappa \leqq 1$ voneinander unabhängig sind. Nun kann man den unstetigen stochastischen Prozess wie folgt darstellen.

Satz 1. *Es sei ein differenzierter stochastischer Prozess* $(\mathfrak{R}^\lambda, \varphi^\lambda, P)_{0\leqq\lambda\leqq1}$. *Wenn*

1) $\varphi^\lambda = 0, 1, 2, \ldots$ *bis auf Wahrscheinlichkeit Null,*

2) $\lim_{\mu\to\lambda+0} \varphi^\lambda - \lim_{\mu\to\lambda-0} \varphi^\lambda = 0, 1$ *bis auf Wahrscheinlichkeit Null,*

3) *die Wahrscheinlichkeit* $P\ \{\varphi^\lambda - \varphi^\mu \geqq 1\}$ *für* $\lambda > \mu$ *mit* $\lambda - \mu \to 0$ *nach* 0 *konvergiert, so ist die Verteilungsfunktion von* $\varphi^\lambda - \varphi^\mu\,(\lambda > \mu)$ *die Poissonsche Verteilung und die Erwartung* E_λ *von* φ^λ *eine stetige Funktion von* λ.

Beweis. Da die Punktmenge

$$A = \sum_{\nu=1}^{\infty}\{x: 0 \leqq \varphi^\lambda(x) \leqq \nu\,(0 \leqq \lambda \leqq 1)\}\left\{x: \varphi^\lambda(x) - \varphi^\rho(x) = 0, 1 \left(0 < \lambda - \rho \leqq \frac{1}{\nu}\right)\right\}$$

offenbar eine F_σ-Menge im Produktraum $\prod_\lambda \mathfrak{R}^\lambda$ ist, kann man leicht einsehen, dass die Bedingungen 1) und 2) mit $P(A)=1$ äquivalent sind. Nach 3) kann man leicht beweisen, dass die Erwartung E_λ von φ^λ eine stetige Funktion von λ ist. Nach $P(A)=1$ gilt

$$(*)\qquad \lim_{\nu\to\infty} P\{0 \leqq \varphi^\lambda \leqq \nu\}\left\{\varphi^\lambda - \varphi^\rho = 0, 1 \left(0 < \lambda - \rho \leqq \frac{1}{\nu}\right)\right\} = 1.$$

Nun sei $\rho=\rho_0<\rho_1<\cdots<\rho_\varkappa=\lambda$, $\rho_\mu-\rho_{\mu-1}<\frac{1}{\nu}$ und

$$\psi_{\nu,\mu}(x)=\begin{cases}1 & \left(\varphi^{\rho_\mu}(x)-\varphi^{\rho_{\mu-1}}(x)\geqq 1\right)\\ 0 & \left(\varphi^{\rho_\mu}(x)-\varphi^{\rho_{\mu-1}}(x)\leqq 1\right)\end{cases}$$

so sind $\psi_{\nu,1}, \psi_{\nu,2}, \cdots, \psi_{\nu,\varkappa}$ auch voneinander unabhängige zufällige Grössen und nach (*) kann man leicht einsehen:

$$(\ast\ast)\qquad P-\lim_{\nu\to\infty}(\psi_{\nu,1}+\psi_{\nu,2}+\cdots+\psi_{\nu,\varkappa})=\varphi^\lambda-\varphi^\rho$$

Setzt man $p_{\nu,\mu}=P\{x:\psi_{\nu,\mu}(x)=1\}$, so gilt

$$P\{\varphi^{\rho_\mu}-\varphi^{\rho_{\mu-1}}\geqq 1\}=p_{\nu,\mu}\leqq E(\varphi^{\rho_\mu}-\varphi^{\rho_{\mu-1}})=E_{\rho_\mu}-E_{\rho_{\mu-1}},$$

$$P\{\varphi^\lambda-\varphi^\rho\geqq 1\}\leqq\sum_{\mu=1}^{\varkappa}p_{\nu,\mu}\leqq E_\lambda-E_\rho<+\infty$$

Indem man daher eine Teilfolge von $\nu=1, 2, \ldots$ auswählt, kann man $\sum_{\mu=1}^{\varkappa}p_{\nu,\mu}$ nach einer Zahl α streben lässt. Wenn $P\{\varphi^\lambda-\varphi^\rho\geqq 1\}\neq 0$ ist, so konvergiert die Verteilungsfunktion von $\psi_{\nu,1}+\psi_{\nu,2}+\cdots+\psi_{\nu,\varkappa}$ gegen die Poissonsche Verteilung mit der Erwartung[1] α. Daher ist die Verteilungsfunktion von $\varphi^\lambda-\varphi^\rho$ nach (**) die Poissonsche Verteilung mit der Erwartung α. Da die Erwartung von $\varphi^\lambda-\varphi^\rho$ durch $E_\lambda-E_\rho$ gegeben ist, muss $\alpha=E_\lambda-E_\rho$ sein.

Als die Umkehrung des Satzes 1 gilt der

Satz 2. *Wenn die Erwartung E_λ von φ^λ eine monoton wachsende stetige Funktion von λ und die Verteilungsfunktion von $\varphi^\lambda-\varphi^\rho(\lambda>\rho)$ die Poissonsche Verteilung ist, so genügt der differenzierte stochastische Prozess $(R^\lambda, \varphi^\lambda, P)$ den Bedingungen* 1), 2) *und* 3).

Beweis. Man kann leicht einsehen, dass man nur den Fall zu beweisen ist: E_λ ist stets wachsend. Die Bedingung 3) folgt sofort aus der Voraussetzung über E_λ. Daher braucht man nur $P(A)=1$ zu beweisen. Da A eine F_σ-Menge ist, gibt es abzählbar unendlich viele $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$, für welche die Projektion $A^{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots)}$ von A auf $\mathfrak{R}^{\lambda_1}\times\mathfrak{R}^{\lambda_2}\times\cdots$ messbar über das Projektionsmass[2] $P^{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots)}$ von P ist und

$$P^{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots)}(A^{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots)})=P(A)$$

besteht[3]. Hier kann man $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ überall dicht in $0\leqq\lambda\leqq 1$ auswählen. Dann kann man $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ wie folgt umordnen:

$$0=\lambda_{\varkappa,0}<\lambda_{\varkappa,1}<\cdots<\lambda_{n,2^\varkappa}=1,\qquad(\varkappa=1, 2, \ldots)$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^\varkappa\leqq E(\varphi^{\lambda_{\varkappa,\nu}}-\varphi^{\lambda_{\varkappa,\nu-1}})\leqq\left(\frac{2}{3}\right)^\varkappa\qquad(\nu=1, 2, \ldots, \varkappa)$$

Da die Verteilungsfunktion von $\varphi^{\lambda_{\varkappa,\nu}}-\varphi^{\lambda_{\varkappa,\nu-1}}$ die Poissonsche Verteilung

1) P. Levy: Théorie de l'addition des variables aléatoires, oder H. Cramer: Random variables and Probability distributions.

2) $P^{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots)}$ definiert man durch

$$P^{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots)}(A)=P(A^\times)\qquad(A\in\mathfrak{R}^{\lambda_1}\times\mathfrak{R}^{\lambda_2}\times\ldots)$$

3) Dergleichen gilt für $F-$, $F_\sigma-$, $F_{\sigma\delta}-$, ... Menge. Vgl. 中野秀五郎：測度論.

ist, kann man leicht beweisen, dass für eine passende Zahl γ

$$P(A'_\varkappa)=1-P(A_\varkappa)\leqq\gamma\left(\frac{8}{9}\right)^\varkappa$$

$$A_\varkappa=\{x:\varphi^{\lambda_{\varkappa,\nu}}(x)-\varphi^{\lambda_{\varkappa,\nu-1}}(x)=0,1\qquad(\nu=1,2,3,\dots,2^\varkappa)\}$$

$$A_\varkappa\in\mathfrak{R}^{\lambda_1}\times\mathfrak{R}^{\lambda_2}\times\dots$$

besteht. Hieraus folgt

$$P^{(\lambda_1,\lambda_2,\dots)}(\underline{\lim}_{\varkappa\to\infty}A_\varkappa)=1-P^{(\lambda_1,\lambda_2,\dots)}(\overline{\lim}_{\varkappa\to\infty}A'_\varkappa)=1.$$

Da andererseits $\underline{\lim}_{\varkappa\to\infty}A_\varkappa\subset A^{(\lambda,\lambda_2,\dots)}$ sein soll, erhält man

$$P^{(\lambda_1,\lambda_2,\dots)}(A^{(\lambda_1,\lambda_2,\dots)})=1.$$

Nächst wollen wir die Existenz des unstetigen stochastischen Prozesses.

Satz 3. Für eine monoton wachsende stetige positive Funktion E_λ $(0\leqq\lambda\leqq1)$ gibt es einen deratigen differenzierten stochastischen Prozess $(\mathfrak{R}^\lambda,\varphi^\lambda,P)$, dass $E(\varphi^\lambda)=E_\lambda$ und die Verteilungsfunktion von $\varphi^\lambda-\varphi^\rho(\lambda>\rho)$ die Poissonsche Verteilung ist.

Beweis. Nun betrachten wir die abgeschlossenen linearen Räume $[-\infty,+\infty]^{\frac{\nu-1}{2^\varkappa},\frac{\nu}{2^\varkappa}}$ entsprechend $\left(\frac{\nu-1}{2^\varkappa},\frac{\nu}{2^\varkappa}\right)$, welche auch regulär und bikompakt sind, und man bezeichnet die *Koordinatenfunktion* auf $[-\infty,+\infty]^{\frac{\nu-1}{2^\varkappa},\frac{\nu}{2^\varkappa}}$ mit $C^{\varkappa,\nu}$, nämlich

$$C^{\varkappa,\nu}(x)=x\qquad(x\in[-\infty,+\infty]^{\frac{\nu-1}{2^\varkappa},\frac{\nu}{2^\varkappa}}).$$

Man kann leicht einsehen, dass man für jedes $\varkappa_0$ das topologische Mass $\mathfrak{m}^{\varkappa_0}$ im endlich-dimensionalen Produktraum $\prod_{\substack{\varkappa\leqq\varkappa_0\\ \nu=1,2,\dots,\varkappa}}[-,+\infty]^{\frac{\nu-1}{2^\varkappa},\frac{\nu}{2^\varkappa}}$ derart einführen, dass

$$C^{\varkappa,2\nu-1}+C^{\varkappa,2\nu}=C^{\varkappa-1,\nu}$$

bis auf Nullmenge besteht und die Verteilungsfunktion von $C^{\varkappa,\nu}$ mit der Poissonschen Verteilung der Erwartung $E_{\frac{\nu}{2^\varkappa}}-E_{\frac{\nu-1}{2^\varkappa}}$ übereinstimmt und $C^{\varkappa,1},C^{\varkappa,2},\dots,C^{\varkappa,2^\varkappa}$ voneinander unabhängig sind. Daher kann man nach dem Erweiterungssatz[1] die Wahrscheinlichkeit P im Raum $\prod_{\nu,\varkappa}[-\infty,+\infty]^{\frac{\nu-1}{2^\varkappa},\frac{\nu}{2^\varkappa}}$ derart einführen, dass die Koordinatenfunktion $C^{\varkappa,\nu}$ denselben Bedingungen genügt. Setzt man

$$\varphi^{\frac{\nu}{2^\varkappa}}=\sum_{\mu=1}^{\nu}C^{\varkappa,\mu},$$

so kann man leicht beweisen, dass $\varphi^{\frac{\nu}{2^\varkappa}}$ für $\frac{\nu}{2^\varkappa}\to\lambda$ gegen ein φ^λ nach

1) Vgl. 中野秀五郎： 測度論.

Wahrscheinlichkeit konvergiert. Indem man jedem φ^λ ein $[-\infty, +\infty]^\lambda$ entsprechen lässt und die Wahrscheinlichkeit P_0 durch

$$P_0\{(\alpha^{\lambda_1}, \beta^{\lambda_1})^\times \dots (\alpha^{\lambda_x}, \beta^{\lambda_x})^\times\} = P\{\alpha^{\lambda_\nu} < \varphi^{\lambda_\nu} < \beta^{\lambda_\nu} (\nu = 1, 2, \dots, x)\}$$

im Produktraum $\prod_\lambda [-\infty, +\infty]^\lambda$ einführt, kann man leicht einsehen, dass der stochastische Prozess $([-\infty, +\infty]^\lambda, C^\lambda, P_0)$ für die Koordinatenfunktion C^λ von $[-\infty, +\infty]^\lambda$ den betreffenden Bedingungen genügt.

Der stetige stochastische Prozess.

Wie Satz 1 wollen wir beweisen den

Satz 4. *Es sei ein differenzierter stochastischer Prozess* $(\mathfrak{R}^\lambda, \varphi^\lambda, P)_{0 \leq \lambda \leq 1}$. *Wenn*

1) $E(\varphi^\lambda) = 0 \quad (0 \leqq \lambda \leqq 1)$,

2) φ^λ *stetig über* λ *bis auf Wahrseheinlichkeit Null, so ist die Verteilungsfunktion von* $\varphi^\lambda - \varphi^\rho (\lambda > \rho)$ *die Gausssche Verteilung und die Streuung* $\sigma(\varphi^\lambda)$ *eine monoton wachsende stetige Funktion von* λ.

Beweis. Da die Punktmenge

$$B = \prod_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} \left\{x : |\varphi^\lambda(x)| \leqq \mu (0 \leqq \lambda \leqq 1) ; |\varphi^\lambda(x) - \varphi^\rho(x)| \leqq \frac{1}{\nu}\left(0 < \lambda - \rho \leqq \frac{1}{\mu}\right)\right\}$$

offenbar eine $F_{\sigma\delta}$-Menge im Produktraum $\prod_\lambda \mathfrak{R}^\lambda$ ist, kann man leicht einsehen, dass die Bedingung 2) mit $P(B) = 1$ äquivalent ist. Daher gilt

$$(*) \quad \lim_{\mu \to \infty} P\left\{ |\varphi^\lambda| \leqq \mu (0 \leqq \lambda \leqq 1) ; \quad |\varphi^\lambda - \varphi^\rho| \leqq \frac{1}{\nu}\left(0 < \lambda - \rho \leqq \frac{1}{\mu}\right)\right\} = 1$$

für jedes ν. Nun sei $\rho = \rho_0 < \rho_1 < \cdots < \rho_x = \lambda, \ \rho_i - \rho_{i-1} \leqq \frac{1}{\mu}$,

$$\psi_{\mu, i}(x) = \mathrm{Min}\left\{\mathrm{Max}\left\{\varphi^{\rho_i}(x) - \varphi^{\rho_{i-1}}(x), \ -\frac{1}{\nu}\right\}, \ \frac{1}{\nu}\right\},$$

so sind $\psi_{\nu,1}, \psi_{\nu,2}, \dots, \psi_{\nu,x}$ auch voneinander unabhängige zufällige Grössen und nach (*) kann man leicht einsehen:

$$(\text{⁎⁎}) \qquad P\text{-}\lim_{\mu \to \infty} (\psi_{\mu,1} + \psi_{\mu,2} + \cdots + \psi_{\mu,x}) = \varphi^\lambda - \varphi^\rho.$$

für jedes ν. Hieraus kann man leicht schliessen, dass die Verteilungsfunkgtion von $\varphi^\lambda - \varphi^\rho$ die Gausssche Verteilung ist[1]. Setzt man

$$\sigma_{\rho,\lambda} = \sigma(\varphi^\lambda - \varphi^\rho),$$

so gilt mithin

$$P\left\{ |\varphi^\lambda - \varphi^\rho| \leqq \frac{1}{\nu}\right\} \leqq (1 - e^{-\frac{1}{(\nu\sigma_{\rho,\lambda})^2}})^{\frac{1}{2}}$$

Daher kann man nach (*) leicht einsehen, dass $\lim_{\lambda - \rho \to 0} \sigma_{\rho,\lambda} = 0$ ist. Da $\sigma_\rho, \lambda^2 = \sigma(\varphi^\lambda)^2 - \sigma(\varphi^\rho)^2$ sein soll, ist $\sigma(\varphi^\lambda)$ stetig über λ.

---

1) Vgl. P. Levy: Théorie de l'addition ......

Als die Umkehrung des Satzes 4 gilt der

Satz 5. *Wenn die Streuung* σ_λ *von* φ^λ *eine monoton wachsende stetige Funktion von* λ *und die Verteilungsfunktion von* $\varphi^\lambda - \varphi^\rho (\lambda > \rho)$ *die Gausssche Verteilung mit der Erwartung* 0 *ist, so genügt der differenzierte stochastische Prozess* $(\mathfrak{R}^\lambda, \varphi^\lambda, P)$ *der Bedingung* 2) *des Satzes* 4.

Beweis. Mann braucht nur $P(B)=1$ zu beweisen, und nur den Fall zu betrachten, dass die Streuung σ_λ stets wachsend über λ ist. Da B eine $F_{\sigma\delta}$-Menge ist, gibt es abzählbar unendlich viele $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, für welche

$$P^{(\lambda_1, \lambda_2, \dots)}(B^{(\lambda_1, \lambda_2, \dots)}) = P(B)$$

besteht. Wie im Beweis des Satzes 2 kann man annehmen, dass $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ derart umgeordnet sind:

$$0 = \lambda_{\varkappa, 0} < \lambda_{\varkappa, 1} < \cdots < \lambda_{\varkappa, 2^n} = 1 \qquad (\varkappa = 1, 2, \dots)$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^\varkappa \leqq \sigma(\varphi^{\lambda_{\varkappa,\nu}} - \varphi^{\lambda_{\varkappa,\nu-1}})^2 \leqq \left(\frac{2}{3}\right)^\varkappa \qquad (\nu = 1, 2, \dots, 2^\varkappa).$$

Da die Verteilungsfunktion von $\varphi^{\lambda_{\varkappa,\nu}} - \varphi^{\lambda_{\varkappa,\nu-1}}$ die Gausssche Verteilung ist, kann man leicht beweisen:

$$P(B'_\varkappa) = 1 - P(B_\varkappa) \leqq \frac{1}{2^{\varkappa+1}}$$

$$B_\varkappa = \left\{x : |\varphi^{\lambda_{\varkappa,\nu}}(x) - \varphi^{\lambda_{n,\nu-1}}(x)| \leqq 4\sigma_{\varkappa,\nu} \log \frac{1}{\sigma_{\varkappa,\nu}} \; (\nu = 1, 2, \dots, 2^\varkappa)\right\}$$

$$\sigma_{\varkappa,\nu}^2 = \sigma(\varphi^{\lambda_{\varkappa,\nu}})^2 - \sigma(\varphi^{\lambda_{\varkappa,\nu-1}})^2, \qquad B_\varkappa \in \mathfrak{R}^{\lambda_1} \times \mathfrak{R}^{\lambda_2} \times \dots$$

besteht. Hieraus folgt

$$(*) \qquad P^{(\lambda_1, \lambda_2, \dots)}(\underline{\lim}_{\varkappa \to \infty} B_\varkappa) = 1 - P^{(\lambda_1, \lambda_2, \dots)}(\overline{\lim}_{\varkappa \to \infty} B'_\varkappa) = 1.$$

Für jedes $x \in \underline{\lim}_{\varkappa \to \infty} B_\varkappa$ gibt es ein $\varkappa_0$ mit $x \in B_\varkappa (\varkappa \geqq \varkappa_0)$. Dann kann man leicht einsehen, dass für $|\lambda_\nu - \lambda_\mu| \leqq \left(\frac{1}{3}\right)^{\varkappa_0}$

$$|\varphi^{\lambda_\nu}(x) - \varphi^{\lambda_\mu}(x)| \leqq 8\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{\varkappa-1}{4}}$$

besteht. Daher ist $\underline{\lim}_{\varkappa \to \infty} B_\varkappa \subset B^{(\lambda_1, \lambda_2, \dots)}$ und folglich gilt nach (*)

$$P^{(\lambda_1, \lambda_2, \dots)}(B^{(\lambda_1, \lambda_2, \dots)}) = 1.$$

Man kann ganz ähnlich wie Satz 3 auch beweisen den

Satz 6. *Für eine monoton wachsende stetige Funktion* σ_λ *von* λ *gibt es einen derartigen dfferenzierten stochastischen Prozess* $(\mathfrak{R}^\lambda, \varphi^\lambda, P)$, *dass* $E(\varphi^\lambda) = 0$, $\sigma(\varphi^\lambda) = \sigma_\lambda$ *und die Verteilungsfunktion von* $\varphi^\lambda - \varphi^\rho (\lambda > \rho)$ *die Gausssche Verteilung ist.*