

## PAPERS COMMUNICATED

**1. Über Verzerrungen bei der konformen Parallelschlitzabbildung von zweifach zusammenhängenden Gebieten.**

Von Yûsaku KOMATU,

Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Tokyo.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., Jan. 12, 1945.)

**1. Ein Verzerrungssatz.**

Gegeben sei ein beliebiges den unendlichfernen Punkt enthaltendes zweifach zusammenhängendes Gebiet  $\Delta$  in der komplexen  $Z$ -Ebene, dessen beide Randkomponenten wir mit  $\Gamma_0$  und  $\Gamma_1$  bezeichnen. Nach einem Satze von de Possel läßt es sich stets auf ein in der  $\omega$ -Ebene gelegenes Schlitzgebiet  $G$  konform abbilden, welches durch Aufschlitzen längs zwei zur reellen Achse paralleler Strecken (eine oder beide von ihnen mögen evtl. zu Punkten ausarten) entsteht. Die solche Abbildung vermittelnde Funktion

$$\omega = \omega(Z)$$

wird durch die Normierungsbedingung

$$\lim_{Z \rightarrow \infty} (\omega(Z) - Z) = 0$$

eindeutig bestimmt. Auf Grund dieser Eindeutigkeit wird es insbesondere übersehen, daß unter den formal schwächeren Nebenbedingungen

$$\omega(\infty) = \infty, \quad \omega'(\infty) = 1$$

die Differenz  $\beta_1 - \beta_0$  eine konforme Invariante ist, wobei  $\beta_0$  und  $\beta_1$  diejenigen konstanten Werte bedeuten, die  $\Im \omega(Z)$  auf  $\Gamma_0$  bzw.  $\Gamma_1$  nimmt, d. h.  $\beta_1 - \beta_0$  den vertikalen Abstand zwischen zwei Bildschlitzen in der  $\omega$ -Ebene darstellt.

Bezeichnen wir weiter die maximalen und minimalen Höhen der Randkomponenten  $\Gamma_\nu$  von der reellen Achse mit  $M_\nu$  bzw.  $m_\nu$ , d. h. setzen wir

$$\text{Max}_{Z \in \Gamma_\nu} \Im Z = M_\nu, \quad \text{Min}_{Z \in \Gamma_\nu} \Im Z = m_\nu \quad (\nu = 0, 1),$$

dann gilt der folgende

*Satz.* Es gelten stets die Verzerrungsungleichungen

$$m_1 - M_0 \leq \beta_1 - \beta_0 \leq M_1 - m_0.$$

Jedes Gleichheitszeichen tritt hierbei nur dann auf, wenn das ursprüngliche Gebiet  $\Delta$  selbst ein Parallelschlitzgebiet derselben Art wie  $G$  ist.

**2. Beweis des Satzes.**

Wir sollen zunächst den eigentlichen Fall erledigen, wo  $\Gamma_0$  und  $\Gamma_1$  beide Kontinuen sind, und können wir uns ohne weiteres wegen der üblichen Gebietskernbetrachtung auf Gebiete mit beiden glatten Rand-

kurven beschränken. Der konform invariante sog. *Modul* des Gebiets  $\Delta$  sei  $\lg \frac{1}{q}$  ( $0 < q < 1$ ). Führen wir nun eine vermittelnde  $z$ -Ebene ein, dann läßt sich bekanntlich das Gebiet  $\Delta$  konform auf den konzentrischen Kreisring  $q < |z| < 1$  derart abbilden, daß  $I'_0$  und  $I'_1$  den Kreisperipherien  $|z|=q$  bzw.  $|z|=1$  entsprechen. Hierbei ist die Abbildung  $Z=Z(z)$  bis auf eine Drehung um den Punkt  $z=0$  eindeutig bestimmt. Sind also

$$Z(z_\infty) = \infty, \quad \lim_{z \rightarrow z_\infty} (z - z_\infty)Z(z) = A,$$

dann ist die Größe  $\frac{A}{z_\infty}$  auch eine konforme Invariante. Setzen wir jetzt

$$Z(z) = \frac{A}{z - z_\infty} + iQ(z),$$

so stellt  $Q(z)$  diejenige eindeutige regulär analytische Funktion im Kreisring  $q < |z| < 1$  dar, deren reeller Teil das Dirichletsche Problem mit den Randwerten

$$\Re Q(z) = \begin{cases} \Im Z(qe^{i\theta}) - \Im \frac{A}{qe^{i\theta} - z_\infty} & (z = qe^{i\theta}) \\ \Im Z(e^{i\theta}) - \Im \frac{A}{e^{i\theta} - z_\infty} & (z = e^{i\theta}) \end{cases}$$

auföst. Aus der wohlbekanntenen Monodromiebedingung muß also die Relation

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Re Q(qe^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Re Q(e^{i\theta}) d\theta$$

erfüllt sein. Da  $q < |z_\infty| < 1$  ist, so folgen nach einer elementaren Betrachtung die Beziehungen

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{qe^{i\theta} - z_\infty} = -\frac{1}{z_\infty}, \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{e^{i\theta} - z_\infty} = 0.$$

Mithin ergibt sich die Gleichung

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\Im Z(e^{i\theta}) - \Im Z(qe^{i\theta})) d\theta = \Im \frac{A}{z_\infty}.$$

Wenden wir anderseits die soeben geführten Überlegungen auf diejenige Funktion

$$\omega = \omega(Z(z)), \quad \omega(Z(z_\infty)) = \infty, \quad \lim_{z \rightarrow z_\infty} (z - z_\infty)\omega(Z(z)) = A,$$

an, welche die Abbildung des Kreisringes  $q < |z| < 1$  auf das Schlitzgebiet  $G$  vermittelt, so erhalten wir die entsprechende Gleichung

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\Im \omega(Z(e^{i\theta})) - \Im \omega(Z(qe^{i\theta}))) d\theta = \Im \frac{A}{z_\infty}.$$

Daher gilt, da die linke Seite der letzten Gleichung offenbar gleich  $\beta_1 - \beta_0$  ist, die grundlegende Gleichung

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\Im Z(e^{i\theta}) - \Im Z(qe^{i\theta})) d\theta = \beta_1 - \beta_0,$$

woraus die im Satze angegebenen Ungleichungen sofort folgen. Auch der letzte Teil des Satzes ist hieraus fast klar.

Im Falle, wo  $\Gamma_0$  und  $\Gamma_1$  beide auf die Punkte reduzieren, ist fast nichts zu beweisen, denn die Abbildung  $\omega = \omega(Z)$  artet dann eine Parallelverschiebung aus. Der Fall, wo nur eine der Randkomponenten auf einen Punkt reduziert, läßt sich auch leicht erledigen. Sei etwa  $\Gamma_0$  ein Punkt, so bilde man das Grundgebiet  $\Delta$  auf das punktierte Kreisinnere  $0 < |z| < 1$  derart, daß der Punkt  $\Gamma_0$  in den Punkt  $z=0$  übergehe. Diese Abbildung verhält sich nach dem Riemannschen Satze über hebbare Singularitäten auch an  $z=0$  regulär. Mit Benutzung der obigen Bezeichnungen ist hierbei

$$Q(z) = -i \left( Z(z) - \frac{A}{z - z_\infty} \right)$$

eine in  $|z| < 1$ , einschließlich  $z=0$ , eindeutige regulär analytische Funktion und also gilt nach dem Gaußischen Mittelwertsatze die Gleichung

$$\Re Q(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Im \left( Z(e^{i\theta}) - \frac{A}{e^{i\theta} - z_\infty} \right) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Im Z(e^{i\theta}) d\theta,$$

d. h.

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Im Z(e^{i\theta}) d\theta - \Im Z(0) = \Im \frac{A}{z_\infty}.$$

Hiermit kann man sofort wie oben die Behauptung erreichen.

### 3. Extremumeigenschaften der Parallelschlitzabbildung.

Die letzte Hälfte des eben bewiesenen Satzes kann man für die Charakterisierung der betreffenden Abbildungsfunktion  $\omega(Z)$  benutzen. Es gilt nämlich der

*Satz. Wir betrachten die Familie derjenigen Funktionen  $\Omega(Z)$ , jede von denen im Grundgebiet  $\Delta$  regulär analytisch und eindeutig — nicht notwendig schlicht, aber eine feste Umgebung vom unendlichfernen Punkt in der Bildebene nur einmal bedeckend — ist und den Bedingungen*

$$\Omega(\infty) = \infty, \quad \Omega'(\infty) = 1$$

*genügt. Dann läßt sich die Parallelschlitzabbildung  $\omega(Z)$  durch das Extremumproblem*

$$\text{Min}_{Z \in \Gamma_1} \Im \Omega(Z) - \text{Max}_{Z \in \Gamma_0} \Im \Omega(Z) = \text{Maximum}$$

oder

$$\text{Max}_{Z \in \Gamma_1} \Im \Omega(Z) - \text{Min}_{Z \in \Gamma_0} \Im \Omega(Z) = \text{Minimum},$$

*von einer unbedeutenden additiven Konstante abgesehen, eindeutig charakterisieren.*

Zum Beweise beachte man zuerst, daß die überall in  $\Delta$  regulär analytischen und beschränkten Funktionen  $\{\omega(Z) - Z\}$  eine Normalfamilie bilden. Daraus sieht man sofort ein, daß die das Extremum wirklich erreichende Funktion existiert und nach den oben geführten Überlegungen, bis auf eine additive Konstante, mit der Funktion  $\omega(Z)$  zusammenfallen muß.

#### 4. Verwandte Verzerrungen.

Verzichten wir nun auf die Forderung  $\omega'(\infty)=1$ , dann können wir analoge Abschätzungen herleiten. Es sei etwa  $M^*$  die Breite desjenigen minimalen Parallelstreifens, der beide Randkomponenten  $\Gamma_0$  und  $\Gamma_1$  enthält, und  $m^*$  die Breite desjenigen maximalen Parallelstreifens, der zwischen beiden Randkomponenten enthalten wird. Hierbei soll dann  $m^*=0$  gesetzt werden, falls es keinen Zwischenstreifen gibt. Dann gelten für eine Parallelschlitzabbildung mit jeweilig passender Schlitzrichtung die Abschätzungen für den Parallelschlitzabstand  $|\beta_1 - \beta_0|$ :

$$|\omega'(\infty)| m^* \leq |\beta_1 - \beta_0| \quad \text{bzw.} \quad |\beta_1 - \beta_0| \leq |\omega'(\infty)| M^* .$$

Zum Beweise betrachte man eine normierte Abbildung

$$\begin{aligned} \omega^* &= \omega^*(Z^*) \equiv \bar{\varepsilon} \omega(\varepsilon \omega'(\infty)^{-1} Z^*) \quad (|\varepsilon|=1), \\ \omega^*(\infty) &= \infty, \quad \omega'^*(\infty) = 1, \end{aligned}$$

worin  $\arg \varepsilon$  den Winkel zwischen einer Bildschlitzrichtung und der reellen Achse bezeichnet. Diese Funktion vermittelt die Abbildung des aus dem Grundgebiet durch Drehstreckung um die Größe  $\bar{\varepsilon} \omega'(\infty)$  entstehenden Gebiets in der  $Z^*$ -Ebene auf dasjenige zur reellen Achse parallele Schlitzgebiet in der  $\omega^*$ -Ebene, welche aus dem  $\omega$ -Gebiet durch Drehung um den Winkel  $-\arg \varepsilon$  entsteht. Auf diese Tatsache hin, folgt die Behauptung fast unmittelbar, indem man den oben bewiesenen Satz auf die Abbildung  $\omega^* = \omega^*(Z^*)$  anwendet.

#### 5. Eine hydrodynamische Deutung.

Es sei  $\Delta$  ein zweifach zusammenhängendes Gebiet in der komplexen  $Z$ -Ebene, dessen beide Randkomponenten wir wie vorher mit  $\Gamma_0$  und  $\Gamma_1$  bezeichnen. Wir betrachten nun eine zweidimensionale, inkompressible und wirbelfreie Strömung ohne Zirkulation im Strömungsgebiet  $\Delta$ , welche in  $Z = \infty$  die (konjugiert) komplexe Geschwindigkeit  $v_\infty$  besitzt. Ihr komplexe Geschwindigkeitspotential sei  $\phi(Z)$ . Diese Funktion  $\omega = \phi(Z)$  vermittelt gerade die konforme Abbildung von  $\Delta$  auf ein zur reellen Achse paralleles Schlitzgebiet in der  $\omega$ -Ebene und es gelten sogar  $\phi(\infty) = \infty$ ,  $\phi'(\infty) = v_\infty$ . Die Werte der Stromfunktion  $\Im \phi(Z)$  auf die Stromlinien längs  $\Gamma_0$  und  $\Gamma_1$ , d. h. die Bildschlitzhöhen, seien  $\beta_0$  bzw.  $\beta_1$ . Der Schlitzabstand  $\beta_1 - \beta_0$  stellt also eine hydrodynamisch wichtige Größe dar, welche bekanntlich das den Zwischenstreifenanteil pro Zeiteinheit durchströmende Flüssigkeitsvolumen liefert. Auf Grund dieser Umstände wird man unmittelbar eine hydrodynamische Deutung für die soeben angegebenen Sätze geben können.

Handelt es sich um die Strömung mit den nicht verschwindenden Zirkulationskonstanten  $\alpha_0$  um  $\Gamma_0$  bzw.  $\alpha_1$  um  $\Gamma_1$ , dann kann man mit Hilfe der Kreisringsabbildung ein analoges Resultat herleiten. Es sei

nämlich  $\lg \frac{1}{q}$  der Modul des zweifach zusammenhängenden Strömungsgebietes  $\mathcal{A}$ . Man bilde dieses Gebiet auf den Kreisring  $q < |z| < 1$  ab und bezeichne mit  $z_\infty$  den Bildpunkt des unendlichfernen Punktes. Dann vergrößert sich die Differenz der beiden betreffenden Stromfunktionswerte um<sup>1)</sup>

$$\frac{\alpha_0}{2\pi} \lg q - \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2\pi} \lg |z_\infty|,$$

d. h. sie nimmt den Wert

$$\beta_1 - \beta_0 + \frac{\alpha_1}{2\pi} \lg \frac{1}{|z_\infty|} - \frac{\alpha_0}{2\pi} \lg \frac{|z_\infty|}{q}.$$

Jedesmal, wenn man irgendeine Abschätzung für die Zusatzglieder kennt, so kann man zugleich eine Abschätzung für das betreffende Durchströmungsvolumen angeben.

1) Vgl. Y. Komatu, Die Geschwindigkeitspotentiale und die Kutta-Joukowskischen Bedingungen für die Strömungen in vielfach zusammenhängenden Gebieten. I, diese Proc. **21** (1945), 6–15, und insbes. auch dere demnächst erscheinende Partie II, wo die Spezialisierung zum zweifach zusammenhängenden Falle ausführlich behandelt werden soll. Dort wird sich auch ein expliziter Ausdruck für die in dieser Note benutzte spezielle Abbildungsfunktion  $\omega(Z(z))$  finden.