Quelques résultats de stabilisation indirecte des systèmes couplés non dissipatifs

Aïssa Guesmia

Résumé

La stabilisation des systèmes couplés soumis à un seul feedback (stabilisation indirecte) a suscité l'intérêt de nombreux auteurs ces dernières années. Les résultats les plus récents dans cette direction sont ceux obtenus par F. Alabau-Boussouira [1] et F. Alabau-Boussouira, P. Cannarsa et V. Komornik [2] où des estimations polynomiales (dépendant de la régularité des solutions) ont été démontrées pour quelques systèmes hyperboliques linéaires faiblement couplés. L'objectif de ce papier est d'étendre ces résultats au cas de systèmes *non linéaires* ou *non dissipatifs* et de donner des applications à la stabilisation indirecte de certains systèmes couplés non dissipatifs.

Abstract

Stabilization of coupled systems with only one feedback (indirect stabilization) was considered by many authors the last years. The most recent results in this direction were obtained by F. Alabau-Boussouira [1] and F. Alabau-Boussouira, P. Cannarsa et V. Komornik [2] where polynomial estimates (depending on the regularity of solutions) were proved for some weakly coupled linear hyperbolic systems. The main goal of this paper is to extend these results to the case of *nonlinear* or *non dissipative* systems and give applications to indirect stabilization of some nondissipative coupled systems.

Received by the editors January 2006 - In revised form in February 2007.
Communicated by P. Godin.
1991 *Mathematics Subject Classification :* 35B40, 35L70, 35B37.
Key words and phrases : Indirect stabilizability by a nonlinear feedback; PDE; Coupled systems; Wave equation; Integral inequalities.

1 Introduction

La stabilisation des systèmes couplés par un seul damping ou feedback (stabilisation indirecte) a suscité l'intérêt de nombreux auteurs ces dernières années. Les résultats les plus récents dans cette direction sont ceux obtenus par F. Alabau-Boussouira [1] et F. Alabau-Boussouira, P. Cannarsa et V. Komornik [2] où des estimations polynomiales (dépendant de la régularité des solutions) ont été démontrées pour quelques systèmes hyperboliques linéaires faiblement couplés. Ces résultats sont basés sur le Théorème 1.1 ci-après obtenu par F. Alabau-Boussouira [1] (sous une forme moins générale) et F. Alabau-Boussouira, P. Cannarsa et V. Komornik [2].

Inégalités intégrales. Soient $\mathcal{A}$ le générateur infinitésimal d'un semi-groupe continu $e^{t\mathcal{A}}$ dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ son domaine et $E \in C(\mathcal{H}, \mathbb{R}^+)$ une fonction donnée. Pour tout $U^0 \in \mathcal{H}$, on note : $\mathcal{U}(t) = e^{t\mathcal{A}}U^0$, $E_0(t) = E(t) = E(\mathcal{U}(t))$ et $E_k(t) = E(\mathcal{U}^{(k)}(t))$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Les résultats de F. Alabau-Boussouira [1] et F. Alabau-Boussouira, P. Cannarsa et V. Komornik [2] sont basés sur le théorème suivant :

Théorème 1.1. *Supposons que l'opérateur $\mathcal{A}$ est linéaire. Supposons qu'il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ et une constante positive c tels que*

$$\int_0^T E(t)\,dt \le c\sum_{k=0}^{m} E_k(0), \quad \forall T \ge 0, \quad \forall U^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^m).$$

Alors, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $U^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^{nm})$,

$$\int_S^T \frac{(t-S)^{n-1}}{(n-1)!}E(t)\,dt \le c^n(1+m)^{n-1}\sum_{k=0}^{nm} E_k(S), \quad \forall 0 \le S \le T. \tag{1.1}$$

Si, de plus, E est décroissante pour tout $U^0 \in \mathcal{H}$, alors, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $U^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^{nm})$,

$$E(t) \le c^n(1+m)^{n-1}\frac{n!}{t^n}\sum_{k=0}^{nm} E_k(0), \quad \forall t > 0. \tag{1.2}$$

Stabilisation indirecte. F. Alabau-Boussouira [1] a considéré le problème de la stabilisation de quelques systèmes hyperboliques dissipatifs couplés et soumis à un seul feedback frontière linéaire. En montrant le Théorème 1.1, l'auteur de [1] a obtenu des estimations polynomiales qui dépendent de la régularité des solutions. Les mêmes estimations ont été démontrées par F. Alabau-Boussouira, P. Cannarsa et V. Komornik [2] dans le cas d'un feedback interne. Or, si le système n'est pas dissipatif (comme dans le cas de deux constantes de couplage différentes) ou si le feedback est non linéaire, ces résultats ne sont plus applicables. L'objectif de ce papier est d'étendre le Théorème 1.1 au cas non linéaires et non dissipatifs et de donner des applications à la stabilisation indirecte de certains systèmes couplés non dissipatifs.

2 Généralisations

On montre dans ce paragraphe deux théorèmes qui permettent d'obtenir quelques estimations (polynomiales par exemple) de stabilité indirecte de certains systèmes couplés (le système est contrôlé par une seule équation). Ces deux théorèmes généralisent le Théorème 1.1 dans plusieurs directions, en particulier, ils permettent de traiter le cas de systèmes non linéaires ou non dissipatifs. On considère les mêmes notations utilisées dans le paragraphe 1 et on démontre les théorèmes 2.1 et 2.2 qui permettent de traiter le cas non linéaire et le cas non dissipatif respectivement.

Théorème 2.1. *Supposons que l'opérateur $\mathcal{A}$ est linéaire et que la fonction E est décroissante. Soit $f \in C(\mathbb{R}^+)$ une fonction dérivable, décroissante et strictement positive vérifiant, pour deux réels $a_1 \geq a_2 > 0$: pour tout $U^0 \in \mathcal{H}$, il existe $a > 0$ tel que*

$$\int_S^T f(t)E^{a_1}(t)\,dt \leq af(S)E^{a_2}(S), \quad \forall 0 \leq S \leq T. \tag{2.1}$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $U^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^n)$, il existe $\bar{a}$, $\hat{a} > 0$ tels que

$$\begin{aligned} (E(T))^{(n-1)(a_1-a_2)} \int_S^T \frac{(t-S)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)E^{a_1}(t)\,dt& \qquad (2.2)\\ \leq \bar{a}f(S)E^{a_2}(S), \quad \forall 0 \leq S \leq T,& \end{aligned}$$

$$E(t) \leq \hat{a}\Big(\frac{E^{a_2}(0)}{f(t)t^n}\Big)^{\frac{1}{na_1-(n-1)a_2}}, \quad \forall t > 0. \tag{2.3}$$

Remarques. 1. Si $\mathcal{A}$ est non linéaire, alors on obtient (2.2) et (2.3) uniquement pour $n = 1$. 2. En utilisant la décroissance de E^{a_1}, (2.1) implique que, pour tout $U^0 \in \mathcal{H}$,

$$E(t) \leq \Big(\frac{af(0)E^{a_2}(0)}{\int_0^t f(\tau)\,d\tau}\Big)^{\frac{1}{a_1}}, \quad \forall t > 0.$$

Cette estimation est plus forte que celle donnée par (2.3) pour $n = 1$ et sans que f soit nécessairement décroissante. 3. Si $a_1 = a_2 = 1$ et $f(t) = 1$, (2.3) coïncide avec (1.2).

Démonstration du Théorème 2.1. On montre (2.2) par récurrence sur n. Pour $n = 1$, (2.2) n'est que l'hypothèse (2.1). Supposons que (2.2) est vrai. On a :

$$(E(T))^{(n-1)(a_1-a_2)} \int_S^T \int_t^T \frac{(\tau-S)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau)E^{a_1}(\tau)\,d\tau\,dt \leq \bar{a} \int_S^T f(t)E^{a_2}(t)\,dt,$$

donc

$$(E(T))^{n(a_1-a_2)} \int_S^T \frac{(t-S)^n}{n!} f(t)E^{a_1}(t)\,dt \leq \bar{a}(E(T))^{a_1-a_2} \int_S^T f(t)E^{a_2}(t)\,dt.$$

D'autre part, (2.1) et la décroissance de E impliquent que

$$(E(T))^{a_1-a_2} \int_S^T f(t)E^{a_2}(t)\,dt \leq \int_S^T f(t)E^{a_1}(t)\,dt \leq af(S)E^{a_2}(S),$$

donc, d'après les deux inégalités précédentes, on obtient (2.2) (pour le rang n). En utilisant la décroissance de fE^{a_1}, (2.2) implique (2.3).

Théorème 2.2. *Supposons que l'opérateur $\mathcal{A}$ est linéaire et que la fonction E est dérivable. Soit $f \in C(\mathbb{R}^+)$ une fonction dérivable, décroissante et strictement positive telle qu'il existe a_0, a_1, $a_2 \geq 0$ et $m \in \mathbb{N}$ vérifiant : $\lim_{t\to\infty} \frac{a_0 a_2}{f(t)} < 1$ et*

$$\int_0^T f(t)E(t)\,dt \leq a_1 \sum_{k=0}^{m} E_k(0) + a_2 E(T), \quad \forall T \geq 0, \forall U^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^m), \tag{2.4}$$

$$E'(t) \leq a_0 E(t), \quad \forall t \geq 0, \forall U^0 \in \mathcal{H}. \tag{2.5}$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\bar{a}$, $\hat{a} > 0$ tels que

$$\int_S^T \frac{(t-S)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)E(t)\,dt \tag{2.6}$$

$$\leq \bar{a} f(S) \sum_{k=0}^{mn} E_k(S), \quad \forall 0 \leq S \leq T, \ \forall U^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^{mn}),$$

$$E(t) \leq \hat{a}\Big(\sum_{k=0}^{mn} E_k(0)\Big)\frac{a_0 t + 1}{f(t)t^n}, \quad \forall t > 0, \ \forall U^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^{mn}). \tag{2.7}$$

Remarques. 1. Si $\mathcal{A}$ est non linéaire, on obtient les inégalités (2.6) et (2.7) uniquement pour $n = 1$. 2. Si $a_0 = 0$, alors (2.4) implique que, pour tout $U^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^m)$,

$$E(t) \leq \frac{(a_1 + a_2)\Big(\sum_{k=0}^m E_k(0)\Big)}{\int_0^t f(\tau)\,d\tau}, \quad \forall t > 0.$$

Cette estimation est plus forte que celle donnée par (2.7) pour $n = 1$ et sans que f soit nécessairement décroissante. 3. Si $a_0 = 0$ et $f(t) = 1$, (2.7) coïncide avec (1.2).

Démonstration du Théorème 2.2. Premièrement, on majore le terme $a_2E(T)$ dans l'inégalité (2.4). D'après (2.4), (2.5) et la décroissance de f, on a :

$$a_2(E(T) - E(0)) = a_2 \int_0^T E'(t)\,dt \leq a_2 a_0 \int_0^T E(t)\,dt \leq \frac{a_2 a_0}{f(T)} \int_0^T f(t)E(t)\,dt$$

$$\leq \frac{a_0 a_2 a_1}{f(T)} \sum_{k=0}^m E_k(0) + \frac{a_0 a_2^2}{f(T)} E(T),$$

comme $\lim_{t\to\infty} \frac{a_0 a_2}{f(t)} < 1$ et f est décroissante, alors il existe $\epsilon > 0$ tel que $\sup_{t\geq 0}\{\frac{a_0 a_2}{f(t)}\}$ $\leq 1 - \epsilon$, et par conséquent

$$a_2 E(T) \leq \frac{1}{\epsilon}\Big(a_2 E(0) + (1-\epsilon) a_1 \sum_{k=0}^m E_k(0)\Big) \leq \frac{a_1 + a_2}{\epsilon} \sum_{k=0}^m E_k(0).$$

Donc, on conclut de (2.4) que, pour $a_3 = \frac{1}{f(0)}(a_1 + \frac{a_1 + a_2}{\epsilon})$,

$$\int_0^T f(t)E(t)\,dt \leq a_3 f(0) \sum_{k=0}^m E_k(0), \quad \forall T \geq 0, \forall U^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^m).$$

En appliquant le Théorème 1.1 sur $f(t)E(t)$, on obtient (2.6). D'autre part, on a :

$$\frac{T^n}{n!}f(T)E(T) = \int_0^T (\frac{t^n}{n!}f(t)E(t))'\,dt$$

$$= \int_0^T \Big(\frac{t^n}{n!}f(t)E'(t) + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}f(t)E(t) + \frac{t^n}{n!}f'(t)E(t)\Big)\,dt$$

$$\leq (1+a_0T)\int_0^T \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}f(t)E(t)\,dt \leq \bar{a}f(0)(1+a_0T)\sum_{k=0}^{mn}E_k(0)$$

d'où (2.7).

3 Feedback localement distribué

On donne maintenant une application du Théorème 2.1 à la stabilisation indirecte par un feedback interne localement distribué et dégénéré de deux équations des ondes couplées. Dans toute la suite, c désigne une constante générique qui peut changer d'une ligne à l'autre, et c_0 désigne la plus petite constante vérifiant (inégalité de Poincaré) :

$$\int_\Omega |v|^2\,dx \leq c_0\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx, \quad \forall v\in H_0^1(\Omega). \tag{3.1}$$

On considère le système faiblement couplé de deux équations des ondes avec condition de Dirichlet homogène au bord suivant :

$$\begin{cases} u_1'' - \Delta u_1 + \alpha u_2 + a(x)g(u_1') = 0 & \Omega\times\mathbb{R}^+, \\ u_2'' - \Delta u_2 + \alpha u_1 = 0 & \Omega\times\mathbb{R}^+, \\ u_1 = u_2 = 0 & \Gamma\times\mathbb{R}^+, \\ u_i(x,0) = u_i^0(x) \quad \text{et} \quad u_i'(x,0) = u_i^1(x),\ i=1,2 & \Omega \end{cases} \tag{$P3$}$$

où Ω est un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^N$ de classe C^2 de frontière Γ, $\alpha\in\mathbb{R}^*$, $a\in C(\Omega)$ et $g\in C^1(\mathbb{R})$ vérifiant : $0<|\alpha|<\frac{1}{c_0}$ et, pour $d_1,\, d_2>0$,

$$d_2\leq g'(s)\leq d_1 \quad \text{et} \quad d_2|s|\leq|g(s)|\leq d_1|s|, \quad \forall s\in\mathbb{R}, \tag{3.2}$$

$$a(x)>0 \quad \forall x\in\omega \quad \text{et} \quad a(x)\geq 0 \quad \forall x\in\Omega \tag{3.3}$$

où ω et Ω vérifient les mêmes hypothèses géométriques que celles considérées par A. Beyrath [3], autrement dit, il existe $\epsilon>0$, des sous-domaines $\Omega_j\subset\Omega$, $1\leq j\leq J$, avec un bord Lipschitz Γ_j et des points $x_j\in\mathbb{R}^N$ tels que

$$\Omega_i\cap\Omega_j=\emptyset \quad \text{si} \quad i\neq j,$$

$$\Omega\cap\mathcal{N}_\epsilon[\cup_j\Gamma_j^+\cup(\Omega\setminus\cup_j\Omega_j)]\subset\omega$$

avec $\mathcal{N}_\epsilon(\theta)=\{x\in\mathbb{R}^N : \inf_{y\in\theta}|x-y|<\epsilon\}$ où $\theta\subset\mathbb{R}^N$ et

$$\Gamma_j^+=\{x\in\Gamma_j : (x-x_j)\cdot\nu>0\}.$$

Le cas le plus simple est de prendre ω comme un voisinage de

$$\Gamma^+=\{x\in\Gamma : (x-x_0)\cdot\nu>0\}$$

dans Ω, c-à-d: $\omega = \Omega \cap \mathcal{N}_\epsilon(\Gamma^+)$ pour un $\epsilon > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}^N$ fixé. Le problème $(P3)$ est bien posé au sens suivant (voir A. Beyrath [3, 4]). On pose :

$$\mathcal{H} = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

muni du produit scalaire

$$< \mathcal{V}, \mathcal{Z} >_{\mathcal{H}} = \int_\Omega \Big(\nabla v_1 \cdot \nabla z_1 + \nabla v_2 \cdot \nabla z_2 + v_3 z_3 + v_4 z_4 + \alpha(v_1 z_2 + v_2 z_1) \Big)\, dx$$

où $\mathcal{V} = (v_1, v_2, v_3, v_4)^T$ et $\mathcal{Z} = (z_1, z_2, z_3, z_4)^T$, et on définit l'opérateur $\mathcal{A}$ par :

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega),$$

$$\mathcal{A}\mathcal{V} = (-v_3, -v_4, -\Delta v_1 + \alpha v_2 + a(x) g(v_3), -\Delta v_2 + \alpha v_1)^T.$$

Le problème $(P3)$ peut être reformulé sous la forme abstraite :

$$U' + \mathcal{A} U = 0 \quad \text{et} \quad U = (u_1, u_2, u_1', u_2')^T.$$

Pour tout $U^0 = (u_1^0, u_2^0, u_1^1, u_2^1) \in \mathcal{H}$, le système $(P3)$ admet une unique solution $U \in C(\mathbb{R}^+, \mathcal{H})$. Si $U^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, alors la solution U est plus régulière et elle appartient à $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^+, \mathcal{H})$. Si g est linéaire, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $U^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^n)$, la solution U vérifie :

$$U \in \cap_{k=0}^n C^{n-k}(\mathbb{R}^+, \mathcal{D}(\mathcal{A}^k)).$$

On définit l'énergie de $(P3)$ par :

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega (|u_1'|^2 + |u_2'|^2 + |\nabla u_1|^2 + |\nabla u_2|^2 + 2\alpha u_1 u_2)\, dx.$$

On a : E vérifie :

$$E(t) \geq \frac{1}{2}(1 - |\alpha| c_0) \int_\Omega (|u_1'|^2 + |u_2'|^2 + |\nabla u_1|^2 + |\nabla u_2|^2)\, dx,$$

$$E'(t) = -\int_\Omega a(x) u_1' g(u_1')\, dx \leq 0. \tag{3.4}$$

On sait que 1. $(P3)$ n'est jamais exponentiellement stable (voir F. Alabau-Boussouira [1] et F. Alabau-Boussouira, P. Cannarsa et V. Komornik [2]). 2. Si g est linéaire, $|\alpha|$ est assez petit et $a(x) \geq \delta > 0$, $\forall x \in \omega$ (cas non dégénéré), alors (A. Beyrath [3, 4])

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (u_1^0, u_2^0, u_1^1, u_2^1) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^n) :\ E(t) \leq c t^{-n},\ \forall t > 0,$$

$$\forall (u_1^0, u_2^0, u_1^1, u_2^1) \in \mathcal{H} :\ E(t) \to 0.$$

Dans ce paragraphe, on s'intéresse au cas dégénéré en supposant que

$$\exists p > 0 : \int_\omega a^{-p}(x)\, dx < \infty \tag{3.5}$$

et on montre le résultat de stabilité suivant :

Théorème 3.1. *Supposons satisfaites toutes les hypothèses ci-dessus. Soient $|\alpha|$ assez petit et*

$$r = \begin{cases} \frac{N}{2p} & \textit{si} \quad N \geq 3, \\ \frac{1+\epsilon_0}{p} & \textit{si} \quad N = 1, 2 \ (\epsilon_0 > 0 \ \textit{quelconque}). \end{cases}$$

Alors il existe une constante $c > 0$ (qui ne dépend que des données initiales, et ce, de manière continue) telle que, pour tout $t > 0$,

$$\forall (u_1^0, u_2^0, u_1^1, u_2^1) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) : \ E(t) \leq ct^{-\frac{1}{r+1}} \quad \textit{si } r < 1, \tag{3.6}$$

$$\forall (u_1^0, u_2^0, u_1^1, u_2^1) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) : \ E(t) \leq ct^{-\frac{1}{r}} \quad \textit{si } r \geq 1, \tag{3.7}$$

$$\forall (u_1^0, u_2^0, u_1^1, u_2^1) \in \mathcal{H} : \ E(t) \to 0. \tag{3.8}$$

Si g est linéaire, alors, pour tout $t > 0$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall (u_1^0, u_2^0, u_1^1, u_2^1) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^n) : \ E(t) \leq ct^{-\frac{n}{n(r+1)-(n-1)\min\{1,r\}}}. \tag{3.9}$$

Remarque. En appliquant le Théorème 2.1 et les techniques de P. Martinez [11], on peut affaiblir (3.2) en imposant l'inégalité $d_2|s| \leq |g(s)|$ uniquement pour $|s| \geq 1$, et montrer que

$$E(t) \leq c\Big(\int_0^t f(\tau)\,d\tau\Big)^{\frac{-1}{r+1}}, \quad \forall t > 0$$

où f est une fonction qui dépend uniquement de g. D'après les hypothèses sur f dans le Théorème 2.1, cette estimation est plus faible que (3.6) et (3.7).

Démonstration du Théorème 3.1. En utilisant le fait que $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ soit dense dans $\mathcal{H}$ et les estimations (3.6) et (3.7), on obtient facilement (3.8). Le début de la démonstration est identique à celle de A. Beyrath [3, 4] : on considère les mêmes multiplicateurs multipliés par E^r. On obtient, pour tout $0 \leq S \leq T < \infty$:

$$\int_S^T E^{r+1}(t)\,dt \leq cE^r(S)(E(S) + E_1(S)) + c\int_S^T E^r(t)\int_\omega u_1'^2\,dx\,dt \tag{3.10}$$

où $E_1(t) = E(U'(t))$. On pose maintenant : $q = 1 + \frac{2}{pr-1}$, alors $q \in]1, \infty[$ et $(N-2)q \leq N+2$. En utilisant (3.2), (3.4), (3.5), l'injection compacte $H^1(\Omega) \to L^{q+1}(\Omega)$ et le fait que $u_1' \in L^\infty(\mathbb{R}^+, H^1(\Omega))$, on obtient, en appliquant deux fois l'inégalité de Hölder et le fait que $\frac{p}{p+1}(1 - \frac{2r}{(r+1)(q+1)}) = \frac{1}{r+1}$ et $\frac{2(p+1)(q+1)}{p((r+1)(q+1)-2r)} = 2$ (voir [6]) :

$$\int_\omega u_1'^2\,dx = \int_\omega |u_1'|^{\frac{2r}{r+1}}|u_1'|^{\frac{2}{r+1}}\,dx$$

$$\leq c\Big(\int_\omega |u_1'|^{q+1}\,dx\Big)^{\frac{1}{q+1}}\Big(\int_\omega |u_1'|^{\frac{2(q+1)}{(r+1)(q+1)-2r}}\,dx\Big)^{1-\frac{2r}{(r+1)(q+1)}}$$

$$\leq c\Big(\int_\omega a^{-\frac{p}{p+1}}a^{\frac{p}{p+1}}|u_1'|^{\frac{2(q+1)}{(r+1)(q+1)-2r}}\,dx\Big)^{1-\frac{2r}{(r+1)(q+1)}}$$

$$\leq c\Big(\Big(\int_\omega a^{-p}\,dx\Big)^{\frac{1}{p+1}}\Big(\int_\omega a|u_1'|^{\frac{2(p+1)(q+1)}{p((r+1)(q+1)-2r)}}\,dx\Big)^{\frac{p}{p+1}}\Big)^{1-\frac{2r}{(r+1)(q+1)}}$$

$$\leq c\Big(\int_\omega a u_1'^2\,dx\Big)^{\frac{1}{r+1}} \leq c\Big(\int_\Omega a u_1' g(u_1')\,dx\Big)^{\frac{1}{r+1}} = c(-E'(t))^{\frac{1}{r+1}}.$$

Donc, d'après (3.10) et l'inégalité de Young, on obtient (pour tout $\epsilon > 0$) :

$$\int_S^T E^{r+1}(t)\,dt \leq cE^r(S)(E(S)+E_1(S)) + c\int_S^T E^r(t)(-E'(t))^{\frac{1}{r+1}}\,dt$$

$$\leq cE^r(S)(E(0)+E_1(0)) + \epsilon\int_S^T E^{r+1}(t)\,dt - c\int_S^T E'(t)\,dt$$

$$\leq c(E^r(S)+E(S)) + \epsilon\int_S^T E^{r+1}(t)\,dt.$$

En choisissant alors $0 < \epsilon < 1$, on obtient :

$$\int_S^T E^{r+1}(t)\,dt \leq cE^{\min\{1,r\}}(S), \quad \forall 0 \leq S \leq T. \tag{3.11}$$

En utilisant la décroissance de E^{r+1} et en choisissant $S = 0$, on obtient (3.6). En appliquant le Théorème 2.1 avec $f(t) = 1$, $a_1 = r+1$ et $a_2 = \min\{1, r\}$, on trouve (3.9). Si $r \geq 1$, l'estimation (3.11) implique que :

$$\int_S^\infty E^{r+1}(t)\,dt \leq cE(S), \quad \forall S \geq 0.$$

Donc, en appliquant le Lemme 1 de [11], on déduit (3.7). Ceci achève la démonstration du Théorème 3.1.

4 Equation générale des ondes

L'objectif de ce paragraphe est de démontrer des estimations polynomiales de stabilité du système couplé de deux équations des ondes générales, dont la première équation est soumise à un feedback interne, avec deux termes perturbants d'ordre 1 et la condition de Dirichlet homogène au bord

$$\begin{cases} u_1'' - A_1u_1 - \nabla\phi_1\cdot(D_1u_1) + \beta_1u_1 + \alpha_2u_2 + g(u_1') = 0 & \Omega\times\mathbb{R}^+,\\ u_2'' - A_2u_2 - \nabla\phi_2\cdot(D_2u_2) + \beta_2u_2 + \alpha_1u_1 = 0 & \Omega\times\mathbb{R}^+,\\ u_1 = u_2 = 0 & \Gamma\times\mathbb{R}^+,\\ u_i(x,0) = u_i^0(x) \quad \text{et} \quad u_i'(x,0) = u_i^1(x),\ i = 1,2 & \Omega \end{cases} \tag{$P4$}$$

où Ω est un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^N$ de classe C^2 de frontière Γ, $g \in C^1(\mathbb{R})$, ϕ_1, $\phi_2 \in C^1(\bar\Omega)$, α_1, α_2, β_1, $\beta_2 \in C(\bar\Omega)$ et

$$A_1u_1 = \sum_{i,j=1}^N \partial_{x_i}(a_{ij}(x)\partial_{x_j}u_1), \quad A_2u_2 = \sum_{i,j=1}^N \partial_{x_i}(b_{ij}(x)\partial_{x_j}u_2)$$

avec des coefficients a_{ij}, $b_{ij} \in C^1(\bar\Omega)$ tels que

$$\exists d_1,\, d_2 > 0 :\ d_2 \leq g'(s) \leq d_1,\ d_2|s| \leq |g(s)| \leq d_1|s|,\ \forall s \in \mathbb{R}, \tag{4.1}$$

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x), \quad b_{ij}(x) = b_{ji}(x) \quad \forall i,j \in \{1,\cdots,N\}, \forall x \in \Omega,$$

$$\exists\lambda_1,\, \lambda_2 > 0 : \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda_1|\xi|^2,\ \sum_{i,j=1}^N b_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda_2|\xi|^2,\ \forall\xi \in \mathbb{R}^N,\, \forall x \in \Omega,$$

$$\inf_\Omega \beta_1 > -\frac{\lambda_1}{c_0}, \quad \inf_\Omega \beta_2 > -\frac{\lambda_2}{c_0},$$

$$\max\{\|\alpha_1\|_\infty, \|\alpha_2\|_\infty\}\,\text{est assez petit} \quad \text{et} \quad \inf_\Omega |\alpha_2| > 0$$

où c_0 est la constante définie par (3.1). On utilise les notations :

$$D_1u_1 = \Big(\sum_{j=1}^N a_{1j}(x)\partial_{x_j}u_1, \cdots, \sum_{j=1}^N a_{Nj}(x)\partial_{x_j}u_1\Big),$$

$$D_2u_2 = \Big(\sum_{j=1}^N b_{1j}(x)\partial_{x_j}u_2, \cdots, \sum_{j=1}^N b_{Nj}(x)\partial_{x_j}u_2\Big)$$

On peut montrer (exactement de la même façon que pour le problème ($P3$)) que le problème ($P4$) est bien posé. On note :

$$\mathcal{H} = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

muni du produit scalaire

$$< \mathcal{V}, \mathcal{Z} >_{\mathcal{H}} = \int_\Omega \Big(D_1v_1 \cdot \nabla z_1 + \beta_1 v_1 z_1 + v_3 z_3\Big)\,dx$$

$$+ \int_\Omega \Big(D_2v_2 \cdot \nabla z_2 + \beta_2 v_2 z_2 + v_4 z_4 + \alpha_1(v_1z_2 + v_2z_1)\Big)\,dx$$

où $\mathcal{V} = (v_1, v_2, v_3, v_4)^T$ et $\mathcal{Z} = (z_1, z_2, z_3, z_4)^T$, et on définit l'opérateur $\mathcal{A}$ par :

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega),$$

$$\mathcal{A}\mathcal{V} = (-v_3, -v_4, -A_1v_1 - \nabla\phi_1 \cdot (D_1v_1) + \beta_1v_1 + \alpha_2v_2 + g(v_3),$$
$$-A_2v_2 - \nabla\phi_2 \cdot (D_2v_2) + \beta_2v_2 + \alpha_1v_1)^T.$$

Le problème ($P4$) peut être reformulé sous la forme abstraite :

$$U' + \mathcal{A}U = 0 \quad \text{et} \quad U = (u_1, u_2, u_1', u_2')^T.$$

Pour tout $U^0 = (u_1^0, u_2^0, u_1^1, u_2^1) \in \mathcal{H}$, le système ($P4$) admet une unique solution $U \in C(\mathbb{R}^+, \mathcal{H})$. Si $U^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, la solution U est plus régulière et elle appartient à $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^+, \mathcal{H})$. Si g est linéaire et $U^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^n)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, la solution U vérifie :

$$U \in \cap_{k=0}^n C^{n-k}(\mathbb{R}^+, \mathcal{D}(\mathcal{A}^k)).$$

On définit l'énergie (équivalente) de ($P4$) par :

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega e^{\phi_1}\Big(|u_1'|^2 + \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\partial_{x_i}u_1\partial_{x_j}u_1 + \beta_1|u_1|^2\Big)\,dx$$

$$+\frac{1}{2}\int_\Omega e^{\phi_2}\Big(|u_2'|^2 + \sum_{i,j=1}^N b_{ij}(x)\partial_{x_i}u_2\partial_{x_j}u_2 + \beta_2|u_2|^2\Big)\,dx + \int_\Omega \alpha_1 e^{\phi_2}u_1u_2\,dx.$$

D'après les hypothèses ci-dessus et l'inégalité (3.1), il existe des constantes $\hat{c}_1$, $\hat{c}_2$, $\hat{c}_3$, $\hat{c}_4 > 0$ (ne dépendant ni de α_1 ni de α_2) telles que

$$\frac{1}{2}\int_\Omega e^{\phi_1}\Big(|u_1'|^2 + \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\partial_{x_i}u_1\partial_{x_j}u_1 + \beta_1|u_1|^2\Big)\,dx \geq \hat{c}_1\int_\Omega\Big(|u_1'|^2 + |\nabla u_1|^2\Big)\,dx,$$

$$\frac{1}{2}\int_\Omega e^{\phi_2}\Big(|u_2'|^2 + \sum_{i,j=1}^N b_{ij}(x)\partial_{x_i}u_2\partial_{x_j}u_2 + \beta_2|u_2|^2\Big)\,dx \geq \hat{c}_2\int_\Omega\Big(|u_2'|^2 + |\nabla u_2|^2\Big)\,dx,$$

$$\Big|\int_\Omega \alpha_1 e^{\phi_2}u_1u_2\,dx\Big| \leq \hat{c}_3\|\alpha_1\|_\infty\int_\Omega(|\nabla u_1|^2 + |\nabla u_2|^2)\,dx,$$

$$\Big|\int_\Omega \alpha_2 e^{\phi_1}u_1u_2\,dx\Big| \leq \hat{c}_4\|\alpha_2\|_\infty\int_\Omega(|\nabla u_1|^2 + |\nabla u_2|^2)\,dx.$$

On obtient alors les inégalités suivantes :

$$E(t) \geq a_1\int_\Omega\Big(|u_1'|^2 + |u_2'|^2 + |\nabla u_1|^2 + |\nabla u_2|^2\Big)\,dx, \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned} E'(t) &= -\int_\Omega e^{\phi_1}u_1'g(u_1')\,dx + \int_\Omega(\alpha_1 e^{\phi_2} - \alpha_2 e^{\phi_1})u_1'u_2\,dx \\ &\leq -\int_\Omega e^{\phi_1}u_1'g(u_1')\,dx + a_0E(t) \end{aligned} \tag{4.3}$$

où $a_1 = \min\{\hat{c}_1, \hat{c}_2\} - \hat{c}_3\|\alpha_1\|_\infty$ et $a_0 = \frac{\sqrt{c_0}}{2a_1}\|\alpha_1 e^{\phi_2} - \alpha_2 e^{\phi_1}\|_\infty$. Les conditions de petitesse à imposer sur $\|\alpha_1\|_\infty$ et $\|\alpha_2\|_\infty$ sont les suivantes :

$$\|\alpha_1\|_\infty < \frac{1}{\hat{c}_3}\min\{\hat{c}_1, \hat{c}_2\} \quad \text{et} \quad \|\alpha_2\|_\infty < \frac{1}{\hat{c}_4}\min\{\hat{c}_1, \hat{c}_2\}$$

d'où $a_1 > 0$, et par conséquent $<,>_\mathcal{H}$ engendre une norme sur $\mathcal{H}$, et E est une norme pour (u_1, u_2, u_1', u_2') équivalente à la norme usuelle de

$$H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)\times L^2(\Omega)\times L^2(\Omega).$$

L'inégalité (4.3) montre que E n'est pas nécessairement décroissante si $\alpha_1 e^{\phi_2} \neq \alpha_2 e^{\phi_1}$. On sait que 1. $(P4)$ n'est jamais exponentiellement stable (voir F. Alabau-Boussouira [1] et F. Alabau-Boussouira, P. Cannarsa et V. Komornik [2]). 2. Si g est linéaire, $\phi_1 = \phi_2 = 0$ et $\alpha_1 = \alpha_2 =$ const, alors (F. Alabau-Boussouira, P. Cannarsa et V. Komornik [2]) : soit $m = 1$ si $A_1 = A_2$, et $m = 2$ sinon. Alors on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall(u_1^0, u_2^0, u_1^1, u_2^1) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^{mn}) :\ E(t) \leq ct^{-n},\ \forall t > 0,$$

$$\forall(u_1^0, u_2^0, u_1^1, u_2^1) \in \mathcal{H} :\ E(t) \to 0.$$

On montre ici les résultats de stabilité indirecte suivants :

Théorème 4.1. *Supposons satisfaites toutes les hypothèses ci-dessus. Soit m un entier tel que $m = 1$ si $A_1 = A_2$, et $m = 2$ sinon. 1. Si g est linéaire et $\alpha_1 e^{\phi_2} = \alpha_2 e^{\phi_1}$, il existe $c > 0$ (ne dépendant pas des données initiales) vérifiant, pour tout $t > 0$:*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall(u_1^0, u_2^0, u_1^1, u_2^1) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^{mn}) :\ E(t) \leq c\Big(\sum_{k=0}^{mn}E_k(0)\Big)t^{-n}, \tag{4.4}$$

$$\forall (u_1^0, u_2^0, u_1^1, u_2^1) \in \mathcal{H} : \; E(t) \to 0. \tag{4.5}$$

2. Si g est non linéaire et $\alpha_1 e^{\phi_2} = \alpha_2 e^{\phi_1}$, les estimations (4.4) pour $n = 1$ et (4.5) sont satisfaites. 3. Si $A_1 = A_2$ et g est linéaire tel que $\|\alpha_1 e^{\phi_2} - \alpha_2 e^{\phi_1}\|_\infty$ est assez petit, il existe $c > 0$ (ne dépendant pas des données initiales) vérifiant, pour tout $t > 0$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \, \forall (u_1^0, u_2^0, u_1^1, u_2^1) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^n) : \; E(t) \le c\Big(\sum_{k=0}^{n} E_k(0)\Big)(a_0 t + 1)t^{-n}, \tag{4.6}$$

$$\forall (u_1^0, u_2^0, u_1^1, u_2^1) \in \mathcal{H} : \; E(t) \to 0. \tag{4.7}$$

Remarque. Lorsque $\alpha_1 e^{\phi_2} \ne \alpha_2 e^{\phi_1}$, le système $(P4)$ n'est pas dissipatif (son énergie n'est pas décroissante en général). Dans ce cas-là, le Théorème 4.1 ne donne aucune estimation de stabilité de $(P4)$ si $A_1 \ne A_2$ ou si g est non linéaire.

Commentaires. Pour tous les systèmes couplés considérés dans [1-4], les deux paramètres de couplage (α_1 et α_2) étaient *constants* et surtout *identiques.* Le fait que les deux paramètres de couplage soient identiques garantit la dissipativité du système (c.à.d. l'énergie E du système est décroissante) ce qui joue un rôle crucial dans la démonstration des résultats de [1-4] basée sur le Théorèmes 1.1. Or, dans l'étude de la stabilisation des divers systèmes couplés, on tombe sur une énergie E *non nécessairement décroissante* (comme, par exemple, dans le cas de : paramètres de couplage différents, termes perturbants d'ordre supérieur, coefficients variables dépendant du temps,...). Notre Théorèmes 2.2 généralise le Théorèmes 1.1, en particulier, au cas d'une énergie E vérifiant (2.5) (donc *non nécessairement décroissante*). Et nos estimations de stabilité (4.6) et (4.7) montrent que $(P4)$ restent stable même si les paramètres de couplage sont différents. Les résultats de notre Théorèmes 2.2 restent valables si on remplace, dans $(P4)$, les termes perturbants $-\nabla\phi_1 \cdot (D_1 u_1)$ et $-\nabla\phi_2 \cdot (D_2 u_2)$ par $q_1(x)h_1(D_1 u_1)$ et $q_2(x)h_2(D_2 u_2)$, respectivement, où $q_1, \, q_2 \in L^\infty(\Omega)$ et $h_1, \, h_2 \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ vérifiant, pour $\phi_1, \, \phi_2 \in W^{1,\infty}(\Omega)$ et $\delta_1, \, \delta_2 \ge 0$ assez petits,

$$\|\nabla h_i\|_\infty < \infty, \quad |q_i(x)h_i(\xi) + \nabla\phi_i \cdot \xi| \le \delta_i |\xi|, \; \forall (x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n, \, \forall i = 1, 2.$$

Le cas $q_1 = q_2 = 1$ et $\delta_1 = \delta_2 = 0$ représente $(P4)$. Voir [7-9] pour plus de détails et pour d'autres exemples (systèmes Petrovsky, système général d'lasticit,...) avec des termes perturbants d'ordre supérieur de ce type.

Démonstration du Théorème 4.1. Par densité, (4.4) et (4.6) impliquent (4.5) et (4.7) respectivement. D'autre part, (4.3) implique (2.5). Donc, en montrant (2.4), on obtient les autres résultats du Théorème 4.1. En multipliant la première et la deuxième équation de $(P4)$ respectivement par $e^{\phi_1} u_1$ et $e^{\phi_2} u_2$ et en intégrant par parties leur somme sur $\Omega \times [0, T]$, on trouve :

$$\int_0^T E(t)\,dt = -\frac{1}{2}\Big[\int_\Omega (e^{\phi_1} u_1 u_1' + e^{\phi_2} u_2 u_2')\,dx\Big]_0^T \tag{4.8}$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega (\alpha_1 e^{\phi_2} - \alpha_2 e^{\phi_1}) u_1 u_2 \, dx\, dt$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega e^{\phi_1}u_1 g(u_1')\,dx\,dt+\int_0^T\int_\Omega(e^{\phi_1}|u_1'|^2+e^{\phi_2}|u_2'|^2)\,dx\,dt.$$

On majore successivement les termes de droite de (4.8). D'après (3.1) et (4.2), on a :

$$\frac{1}{2}\Big|\int_\Omega(e^{\phi_1}u_1u_1'+e^{\phi_2}u_2u_2')\,dx\Big|$$
$$\leq \frac{1}{4}e^{\max\{\|\phi_1\|_\infty,\|\phi_2\|_\infty\}}\int_\Omega\Big(\frac{1}{\sqrt{c_0}}|u_1|^2+\sqrt{c_0}|u_1'|^2+\frac{1}{\sqrt{c_0}}|u_2|^2+\sqrt{c_0}|u_2'|^2\Big)\,dx$$
$$\leq \frac{\sqrt{c_0}}{4}e^{\max\{\|\phi_1\|_\infty,\|\phi_2\|_\infty\}}\int_\Omega\Big(|u_1'|^2+|u_2'|^2+|\nabla u_1|^2+|\nabla u_2|^2\Big)\,dx\leq c_1E(t)$$

où $c_1=\frac{\sqrt{c_0}}{4a_1}e^{\max\{\|\phi_1\|_\infty,\|\phi_2\|_\infty\}}$ d'où

$$-\frac{1}{2}\Big[\int_\Omega(e^{\phi_1}u_1u_1'+e^{\phi_2}u_2u_2')\,dx\Big]_0^T\leq c_1(E(0)+E(T)).$$

De même,

$$\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega(\alpha_1e^{\phi_2}-\alpha_2e^{\phi_1})u_1u_2\,dx\,dt$$
$$\leq\frac{\|\alpha_1e^{\phi_2}-\alpha_2e^{\phi_1}\|_\infty c_0}{4}\int_0^T\int_\Omega(|\nabla u_1|^2+|\nabla u_2|^2)\,dx\,dt\leq c_2\int_0^T E(t)\,dt$$

où $c_2=\frac{c_0}{4a_1}\|\alpha_1e^{\phi_2}-\alpha_2e^{\phi_1}\|_\infty=\frac{\sqrt{c_0}}{2}a_0$. En utilisant (3.1), (4.1), (4.2) et (4.3), on trouve, pour tout $\epsilon_0>0$:

$$-\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega e^{\phi_1}u_1g(u_1')\,dx\,dt\leq\frac{1}{4}\int_0^T\int_\Omega e^{\phi_1}(\epsilon_0|u_1|^2+\frac{1}{\epsilon_0}g^2(u_1'))\,dx\,dt$$
$$\leq\frac{c_0\epsilon_0}{4a_1}\int_0^T E(t)\,dt+\frac{d_1}{4\epsilon_0}\int_0^T(a_0E(t)-E'(t))\,dt.$$

De même,

$$\int_0^T\int_\Omega e^{\phi_1}|u_1'|^2\,dx\,dt\leq\frac{1}{d_2}\int_0^T(a_0E(t)-E'(t))\,dt.$$

Finalement, on obtient :

$$\Big(1-c_2-a_0(\frac{d_1}{4\epsilon_0}+\frac{1}{d_2})-\frac{c_0\epsilon_0}{4a_1}\Big)\int_0^T E(t)\,dt \tag{4.9}$$
$$\leq c_1(E(0)+E(T))+(\frac{d_1}{4\epsilon_0}+\frac{1}{d_2})(E(0)-E(T))+\int_0^T\int_\Omega e^{\phi_2}|u_2'|^2\,dx\,dt.$$

Pour simplifier (4.9), on distingue les deux cas suivants :

Cas 1 : $\alpha_1e^{\phi_2}=\alpha_2e^{\phi_1}$. Dans ce cas, $a_0=c_2=0$ et E est décroissante. Donc, on trouve :

$$(1-\frac{c_0\epsilon_0}{4a_1})\int_0^T E(t)\,dt\leq c_{\epsilon_0}E(0)+\int_0^T\int_\Omega e^{\phi_2}|u_2'|^2\,dx\,dt. \tag{4.10}$$

Cas 2 : $\alpha_1e^{\phi_2}\neq\alpha_2e^{\phi_1}$. En choisissant $\epsilon_0=\sqrt{\frac{a_0a_1d_1}{c_0}}$, on obtient :

$$(1-c_3)\int_0^T E(t)\,dt\leq c_4E(0)+c_5E(T)+\int_0^T\int_\Omega e^{\phi_2}|u_2'|^2\,dx\,dt \tag{4.11}$$

où

$$c_3 = (\frac{\sqrt{c_0}}{2} + \frac{1}{d_2})a_0 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c_0 a_0 d_1}{a_1}},\ c_4 = c_1 + \frac{1}{d_2} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{c_0 d_1}{a_0 a_1}},\ c_5 = c_1 - \frac{1}{d_2} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{c_0 d_1}{a_0 a_1}}.$$

Il s'agit maintenant de majorer la dernière intégrale de (4.10) et de (4.11). D'une part, en intégrant l'égalité de (4.3) et en utilisant l'hypothèse (4.1), on obtient :

$$E(T) - E(0) = -\int_0^T \int_\Omega e^{\phi_1} u_1' g(u_1')\,dx\,dt + \int_0^T \int_\Omega (\alpha_1 e^{\phi_2} - \alpha_2 e^{\phi_1}) u_1' u_2\,dx\,dt$$

$$\leq -\int_0^T \int_\Omega e^{\phi_1} u_1' g(u_1')\,dx\,dt + \frac{d_2}{2}\int_0^T \int_\Omega e^{\phi_1}|u_1'|^2\,dx\,dt + \frac{c_6}{2}\int_0^T \int_\Omega e^{\phi_2}|u_2|^2\,dx\,dt$$

$$\leq -\frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega e^{\phi_1} u_1' g(u_1')\,dx\,dt + \frac{c_6}{2}\int_0^T \int_\Omega e^{\phi_2}|u_2|^2\,dx\,dt$$

où $c_6 = \frac{1}{d_2}\|\alpha_1 e^{\phi_2} - \alpha_2 e^{\phi_1}\|_\infty^2 \|e^{\frac{-1}{2}(\phi_1+\phi_2)}\|_\infty^2 = \frac{4a_1^2}{d_2 c_0}\|e^{\frac{-1}{2}(\phi_1+\phi_2)}\|_\infty^2 a_0^2$, et par conséquent

$$\int_0^T \int_\Omega e^{\phi_1} u_1' g(u_1')\,dx\,dt \leq 2(E(0) - E(T)) + c_6 \int_0^T \int_\Omega e^{\phi_2}|u_2|^2\,dx\,dt. \tag{4.12}$$

D'autre part, on multiplie la première équation de $(P4)$ par $e^{\phi_1}u_1$, on intègre sur $\Omega \times [0,T]$ et on utilise (4.2) et le fait que $\inf_\Omega \beta_1 > -\frac{\lambda_1}{c_0}$. On trouve, pour tout $\epsilon > 0$:

$$\int_0^T \int_\Omega e^{\phi_1} \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\partial_{x_i}u_1 \partial_{x_j}u_1\,dx\,dt$$

$$= -\Big[\int_\Omega e^{\phi_1} u_1' u_1\,dx\Big]_0^T - \int_0^T \int_\Omega \alpha_2 e^{\phi_1} u_1 u_2\,dx\,dt$$

$$-\int_0^T \int_\Omega e^{\phi_1} u_1 g(u_1')\,dx\,dt + \int_0^T \int_\Omega e^{\phi_1}|u_1'|^2\,dx\,dt - \int_0^T \int_\Omega e^{\phi_1}\beta_1|u_1|^2\,dx\,dt$$

$$\leq \frac{e^{\|\phi_1\|_\infty}\sqrt{c_0}}{2a_1}(E(0)+E(T)) + \int_0^T \int_\Omega \Big(\frac{\alpha_2^2 e^{2\phi_1-\phi_2}}{2\epsilon}|u_1|^2 + \frac{\epsilon}{2}e^{\phi_2}|u_2|^2\Big)\,dx\,dt$$

$$+\int_0^T \int_\Omega \Big(\frac{\epsilon e^{\phi_1}}{2}|u_1|^2 + \frac{1}{2\epsilon}e^{\phi_1}g^2(u_1')\Big)\,dx\,dt$$

$$+\int_0^T \int_\Omega e^{\phi_1}|u_1'|^2\,dx\,dt + \frac{\lambda_1}{c_0}\int_0^T \int_\Omega e^{\phi_1}|u_1|^2\,dx\,dt.$$

En utilisant (4.1) et (4.12), on obtient :

$$\int_0^T \int_\Omega e^{\phi_1} \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\partial_{x_i}u_1 \partial_{x_j}u_1\,dx\,dt \tag{4.13}$$

$$\leq c_7(E(0)+E(T)) + c_8(E(0)-E(T))$$

$$+c_9\int_0^T \int_\Omega e^{\phi_2}|u_2|^2\,dx\,dt + c_{10}\int_0^T \int_\Omega e^{\phi_1}|u_1|^2\,dx\,dt$$

où

$$c_7 = \frac{\sqrt{c_0}}{2a_1}e^{\|\phi_1\|_\infty},\ c_8 = \frac{d_1}{\epsilon} + \frac{2}{d_2},$$

$$c_9=\frac{\epsilon}{2}+c_6(\frac{d_1}{2\epsilon}+\frac{1}{d_2}),\ c_{10}=\frac{\lambda_1}{c_0}+\frac{\epsilon}{2}+\frac{1}{2\epsilon}\|\alpha_2^2e^{\phi_1-\phi_2}\|_\infty.$$

On distingue maintenant les deux cas suivants : **Cas 1 :** $A_1=A_2$**.** On multiplie la première et la deuxième équation de $(P4)$ par $e^{\phi_2}u_2$ et $e^{\phi_2}u_1$ respectivement et on intègre leur différence sur $\Omega\times[0,T]$, on trouve :

$$\int_0^T\int_\Omega \alpha_2e^{\phi_2}|u_2|^2\,dx\,dt=\int_0^T\int_\Omega \alpha_1e^{\phi_2}|u_1|^2\,dx\,dt-\int_0^T\int_\Omega e^{\phi_2}u_2g(u_1')\,dx\,dt$$

$$+\Big[\int_\Omega e^{\phi_2}(u_2'u_1-u_2u_1')\,dx\Big]_0^T+\int_0^T\int_\Omega e^{\phi_2}(\beta_2-\beta_1)u_1u_2\,dx\,dt$$

$$+\int_0^T\int_\Omega e^{\phi_2}u_2\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\partial_{x_i}(\phi_1-\phi_2)\partial_{x_j}u_1\,dx\,dt.$$

Par hypothèse, on a : $\inf_\Omega|\alpha_2|>0$. Soit $0<\alpha_0\le\inf_\Omega|\alpha_2|$. Donc,

$$\Big|\int_0^T\int_\Omega \alpha_2e^{\phi_2}|u_2|^2\,dx\,dt\Big|\ge\alpha_0\int_0^T\int_\Omega e^{\phi_2}|u_2|^2\,dx\,dt.$$

On majore maintenant les termes de droite de l'égalité ci-dessus. D'après (3.1) et (4.2), on a :

$$\int_\Omega e^{\phi_2}|u_2'u_1-u_2u_1'|\,dx$$

$$\le\frac{1}{2}e^{\|\phi_2\|_\infty}\int_\Omega\Big(\sqrt{c_0}|u_2'|^2+\frac{1}{\sqrt{c_0}}|u_1|^2+\sqrt{c_0}|u_1'|^2+\frac{1}{\sqrt{c_0}}|u_2|^2\Big)\,dx\le c_{11}E(t)$$

où $c_{11}=\frac{\sqrt{c_0}}{2a_1}e^{\|\phi_2\|_\infty}$. Donc

$$\Big|\Big[\int_\Omega e^{\phi_2}(u_2'u_1-u_2u_1')\,dx\Big]_0^T\Big|\le c_{11}(E(0)+E(T)).$$

En utilisant (4.1), on obtient :

$$\int_\Omega e^{\phi_2}|u_2g(u_1')|\,dx\le\frac{\alpha_0}{6}\int_\Omega e^{\phi_2}|u_2|^2\,dx+\frac{3}{2\alpha_0}\int_\Omega e^{\phi_2}g^2(u_1')\,dx$$

$$\le\frac{\alpha_0}{6}\int_\Omega e^{\phi_2}|u_2|^2\,dx+\frac{3d_1}{2\alpha_0}e^{\|\phi_2-\phi_1\|_\infty}\int_\Omega e^{\phi_1}u_1'g(u_1')\,dx,$$

$$\int_\Omega e^{\phi_2}|(\beta_2-\beta_1)u_1u_2|\,dx\le\frac{\alpha_0}{6}\int_\Omega e^{\phi_2}|u_2|^2\,dx+\frac{3}{2\alpha_0}\int_\Omega(\beta_2-\beta_1)^2e^{\phi_2}|u_1|^2\,dx$$

$$\le\frac{3}{2\alpha_0}\|(\beta_1-\beta_2)^2e^{\phi_2-\phi_1}\|_\infty\int_\Omega e^{\phi_1}|u_1|^2\,dx+\frac{\alpha_0}{6}\int_\Omega e^{\phi_2}|u_2|^2\,dx,$$

$$\int_\Omega e^{\phi_2}|u_2\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\partial_{x_i}(\phi_1-\phi_2)\partial_{x_j}u_1|\,dx$$

$$\le\frac{\alpha_0}{6}\int_\Omega e^{\phi_2}|u_2|^2\,dx$$

$$+\frac{3}{2\alpha_0}\int_\Omega e^{\phi_2}\Big(\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\partial_{x_i}(\phi_1-\phi_2)\partial_{x_j}(\phi_1-\phi_2)\Big)\Big(\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\partial_{x_i}u_1\partial_{x_j}u_1\Big)\,dx$$

$$\leq \frac{\alpha_0}{6}\int_\Omega e^{\phi_2}|u_2|^2\,dx$$

$$+\frac{3}{2\alpha_0}\|e^{\phi_2-\phi_1}\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\partial_{x_i}(\phi_1-\phi_2)\partial_{x_j}(\phi_1-\phi_2)\|_\infty\int_\Omega e^{\phi_1}\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\partial_{x_i}u_1\partial_{x_j}u_1\,dx.$$

Finalement, on trouve :

$$\frac{\alpha_0}{2}\int_0^T\int_\Omega e^{\phi_2}|u_2|^2\,dx\,dt \leq c_{11}(E(0)+E(T)) \tag{4.14}$$

$$+c_{12}\int_0^T\int_\Omega e^{\phi_1}|u_1|^2\,dx\,dt + c_{13}\int_0^T\int_\Omega e^{\phi_1}\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\partial_{x_i}u_1\partial_{x_j}u_1\,dx\,dt$$

$$+c_{14}\int_0^T\int_\Omega e^{\phi_1}u_1'g(u_1')\,dx\,dt$$

où

$$c_{12}=\|\alpha_1 e^{\phi_2-\phi_1}\|_\infty+\frac{3}{2\alpha_0}\|(\beta_1-\beta_2)^2e^{\phi_2-\phi_1}\|_\infty,$$

$$c_{13}=\frac{3}{2\alpha_0}\|e^{\phi_2-\phi_1}\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\partial_{x_i}(\phi_1-\phi_2)\partial_{x_j}(\phi_1-\phi_2)\|_\infty,\ c_{14}=\frac{3d_1}{2\alpha_0}e^{\|\phi_2-\phi_1\|_\infty}.$$

En utilisant (4.12), on majore le dernier terme de (4.14) et on trouve :

$$(\frac{\alpha_0}{2}-c_6c_{14})\int_0^T\int_\Omega e^{\phi_2}|u_2|^2\,dx\,dt \leq c_{11}(E(0)+E(T)) \tag{4.15}$$

$$+2c_{14}(E(0)-E(T))+c_{12}\int_0^T\int_\Omega e^{\phi_1}|u_1|^2\,dx\,dt$$

$$+c_{13}\int_0^T\int_\Omega e^{\phi_1}\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\partial_{x_i}u_1\partial_{x_j}u_1\,dx\,dt.$$

Pour simplifier (4.15), on distingue deux cas comme auparavant.
Si $\alpha_1 e^{\phi_2}=\alpha_2 e^{\phi_1}$**,** on a alors $a_0=c_6=0$ et E est décroissante, donc, en utilisant (4.13) avec ϵ assez petit et tel que

$$c_{13}c_9=\frac{\epsilon}{2}c_{13}<\frac{\alpha_0}{2},$$

(4.15) implique que

$$\int_0^T\int_\Omega e^{\phi_2}|u_2|^2\,dx\,dt \leq cE(0)+c\int_0^T\int_\Omega e^{\phi_1}|u_1|^2\,dx\,dt.$$

Par un raisonnement analogue, on montre que le système dérivé (par rapport à t) de $(P4)$ vérifie :

$$\int_0^T\int_\Omega e^{\phi_2}|u_2'|^2\,dx\,dt \leq cE_1(0)+c\int_0^T\int_\Omega e^{\phi_1}|u_1'|^2\,dx\,dt \leq c(E(0)+E_1(0)).$$

Finalement, en reportant dans (4.10) (avec ϵ_0 assez petit), on obtient (2.4) pour $m=1$ et $f(t)=1$.

Si $\alpha_1 e^{\phi_2} \neq \alpha_2 e^{\phi_1}$**,** E n'est pas décroissante en général. Par hypothèse, g est linéaire : $g(s) = ds$ ($d_1 = d_2 = d$ dans (4.1)) et donc, on déduit de (4.13) et (4.15) que

$$(\frac{\alpha_0}{2} - c_{15}) \int_0^T \int_\Omega e^{\phi_2} |u_2|^2 \, dx \, dt \leq c_{16} E(0) + c_{17} E(T) + c_{18} \int_0^T \int_\Omega e^{\phi_1} |u_1|^2 \, dx \, dt$$

où

$$c_{15} = c_6 c_{14} + c_9 c_{13}, \ c_{16} = c_{11} + 2c_{14} + c_{13}(c_7 + c_8),$$

$$c_{17} = c_{11} - 2c_{14} + c_{13}(c_7 - c_8), \ c_{18} = c_{12} + c_{10} c_{13}.$$

De même, pour le système dérivé (par rapport à t) de $(P4)$

$$(\frac{\alpha_0}{2} - c_{15}) \int_0^T \int_\Omega e^{\phi_2} |u_2'|^2 \, dx \, dt \leq c_{16} E_1(0) + c_{17} E_1(T) + c_{18} \int_0^T \int_\Omega e^{\phi_1} |u_1'|^2 \, dx \, dt.$$

On choisit $\epsilon = \sqrt{a_0}$ dans la définition de c_8, c_9 et c_{10} et on suppose que a_0 est assez petit et tel que

$$c_{15} < \frac{\alpha_0}{2}. \tag{4.16}$$

On obtient, d'après (4.1), (4.3) et (4.11) :

$$(1 - c_{19}) \int_0^T E(t) \, dt \leq c_{20}(E(0) + E_1(0)) + c_{21} E(T) + c_{22} E_1(T)$$

où

$$c_{19} = c_3 + \frac{2a_0 c_{18}}{d(\alpha_0 - 2c_{15})}, \ c_{20} = \max\{\frac{2c_{16}}{\alpha_0 - 2c_{15}}, c_4 + \frac{2c_{18}}{d(\alpha_0 - 2c_{15})}\},$$

$$c_{21} = c_5 - \frac{2c_{18}}{d(\alpha_0 - 2c_{15})}, \ c_{22} = \frac{2c_{17}}{\alpha_0 - 2c_{15}}.$$

On choisit $0 < \alpha_0 \leq \inf_\Omega |\alpha_2|$ et tel que $c_{11} \leq 2c_{14}$ et on suppose que a_0 est assez petit et tel que

$$c_{19} < 1, \quad c_{22} \leq 0 \quad \text{et} \quad a_0 c_{21} < 1 - c_{19}, \tag{4.17}$$

et on trouve (2.4) pour $m = 1$ et $f(t) = 1$. Noter que, quand a_0 converge vers zéro, c_{15}, c_{19} et $a_0 c_{21} + c_{19}$ convergent vers zéro, et c_{22} devient négatif. Donc, avec a_0 assez petit, les conditions (4.16) et (4.17) sont satisfaites.

Cas 2 : $A_1 \neq A_2$**.** On a alors, par hypothèse, $\alpha_1 e^{\phi_2} = \alpha_2 e^{\phi_1}$. Donc $a_0 = c_6 = 0$ et E est décroissante. Soit $z_1(t)$ la solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} A_2 z_1(t) = A_1 u_1(t) & \text{dans} \quad \Omega, \\ z_1 = 0 & \text{sur} \quad \Gamma. \end{cases}$$

La solution z_1 vérifie (voir F. Conrad et B. Rao [5]) :

$$\int_\Omega |z_1|^2 \, dx \leq c \int_\Omega |u_1|^2 \, dx, \tag{4.18}$$

$$\int_\Omega |z_1'|^2 \, dx \leq c \int_\Omega |u_1'|^2 \, dx, \quad \int_\Omega |z_1''|^2 \, dx \leq c \int_\Omega |u_1''|^2 \, dx, \tag{4.19}$$

$$\int_\Omega |\nabla z_1|^2 \, dx \leq c \int_\Omega \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \partial_{x_i} u_1 \partial_{x_j} u_1 \, dx. \tag{4.20}$$

En multipliant la première et la deuxième équation de $(P4)$ par $e^{\phi_2}u_2$ et $e^{\phi_2}z_1$ respectivement, en remplaçant A_1u_1 par A_2z_1 et en intégrant par parties leur différence sur $\Omega \times [0,T]$, on trouve :

$$\int_0^T \int_\Omega \alpha_2 e^{\phi_2}|u_2|^2\,dx\,dt = \Big[\int_\Omega e^{\phi_2}(z_1u_2' - z_1'u_2)\,dx\Big]_0^T + \int_0^T \int_\Omega \alpha_1 e^{\phi_2} z_1 u_1\,dx\,dt$$
$$+ \int_0^T \int_\Omega e^{\phi_2}u_2\Big(z_1'' - u_1'' + \beta_2 z_1 - \beta_1 u_1 - g(u_1')\Big)\,dx\,dt$$
$$+ \int_0^T \int_\Omega e^{\phi_2}u_2\Big(\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\partial_{x_i}\phi_1\partial_{x_j}u_1 - \sum_{i,j=1}^N b_{ij}(x)\partial_{x_i}\phi_2\partial_{x_j}z_1\Big)\,dx\,dt,$$

donc, en utilisant (4.18), (4.19) et (4.20) (noter que $0 < \alpha_0 \le \inf_\Omega |\alpha_2|$),

$$\alpha_0\int_0^T \int_\Omega e^{\phi_2}|u_2|^2\,dx\,dt \le cE(0) + \frac{\alpha_0}{2}\int_0^T \int_\Omega e^{\phi_2}|u_2|^2\,dx\,dt \tag{4.21}$$
$$+c\int_0^T \int_\Omega\Big(|u_1''|^2 + g^2(u_1') + |u_1|^2 + \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\partial_{x_i}u_1\partial_{x_j}u_1\Big)\,dx\,dt.$$

D'après (4.3) et (4.1), on a :

$$\int_0^T \int_\Omega g^2(u_1')\,dx\,dt \le c\int_0^T \int_\Omega e^{\phi_1}u_1'g(u_1')\,dx\,dt \le cE(0). \tag{4.22}$$

De même, en utilisant le système dérivé de $(P4)$, on obtient :

$$E_1'(t) = \Big(E(u_1'(t), u_2'(t))\Big)' = -\int_\Omega e^{\phi_1}|u_1''|^2 g'(u_1')\,dx.$$

D'où, d'après (4.1),

$$\int_0^T \int_\Omega |u_1''|^2\,dx\,dt \le c\int_0^T \int_\Omega e^{\phi_1}|u_1''|^2 g'(u_1')\,dx\,dt \le cE_1(0). \tag{4.23}$$

En reportant l'inégalité (4.13) et les deux inégalités (4.22) et (4.23) dans (4.21) avec ϵ (définition de c_8, c_9 et c_{10}) assez petit, on obtient :

$$\int_0^T \int_\Omega e^{\phi_2}|u_2|^2\,dx\,dt \le c(E(0) + E_1(0)) + c\int_0^T \int_\Omega |u_1|^2\,dx\,dt.$$

De même, on obtient l'inégalité similaire pour le système dérivé (par rapport à t) de $(P4)$ suivante :

$$\int_0^T \int_\Omega e^{\phi_2}|u_2'|^2\,dx\,dt \le c(E_1(0) + E_2(0)) + c\int_0^T \int_\Omega |u_1'|^2\,dx\,dt.$$

Finalement,

$$\int_0^T \int_\Omega e^{\phi_2}|u_2'|^2\,dx\,dt \le c(E(0) + E_1(0) + E_2(0)).$$

En remplaçant dans (4.10) et en choisissant ϵ_0 assez petit, on obtient (2.4) pour $m = 2$ et $f(t) = 1$.

5 Commentaires et questions ouvertes

Comme généralisation significative du Théorème 2.1 et du Théorème 2.2 démontrés et appliqués dans les paragraphes 2, 3 et 4, il serait intéressant d'obtenir une estimation de stabilité similaire à (2.7) sur E sous les hypothèses

$$\begin{cases} \int_0^T f(t)E(t)\,dt \le a_1 \sum_{k=0}^{m} \Big(E_k^{a_2}(0) + E_k^{a_3}(T) \Big), & \forall T \ge 0,\ \forall U^0 \in D(A^m), \\ E'(t) \le a_0 E(t), \quad \forall t \ge 0,\ \forall U^0 \in D(A) \end{cases}$$

où $a_i > 0$ et $\in f \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$. Une autre question ouverte intéressante concerne la stabilisation *indirecte* des systèmes *non dissipatifs*, comme le système $(P3)$ avec deux constantes α_1 et α_2 de signes différents. Dans le cas d'un feedback non linéaire, nos estimations de stabilité ne sont satisfaites que pour $n = 1$, c-à-d : on a la même estimation $E(t) \le \frac{c}{t}$ quelle que soit la régularité des données initiales. Si de plus, le système considéré est non dissipatif, on n'obtient aucune estimation de stabilité et la question reste ouverte dans ce cas-là. Dans les systèmes couplés traités dans ce papier, le couplage considéré est linéaire et d'ordre zéro. Il est très intéressant de regarder le cas d'un couplage plus général (comme par exemple celui que j'ai considéré dans [10]) et surtout d'ordre supérieur à zéro, notamment dans le cas de la stabilisation indirecte. D'autre part, les résultats de stabilisation indirecte obtenus dans ce papier peuvent être généralisés au cas d'un système couplé de n équations (avec un couplage linéaire d'ordre zéro du même type) soumis à $n-1$ contrôles. L'une des questions intéressantes qui restent posées est la suivante : quel est le minimum de contrôles nécessaires à la stabilisation du système et quelles sont les estimations de stabilisation valables dans ce cas-là? Plus généralement, trouver une relation entre le nombre des contrôles et l'estimation de stabilité liée.

References

[1] F. Alabau-Boussouira, Indirect boundary stabilization of weakly coupled hyperbolic systems, SIAM J. Cont. Optim., 41 (2002), 511-541.

[2] F. Alabau-Boussouira, P. Cannarsa et V. Komornik, Indirect internal stabilization of weakly coupled evolution equations, J. Evol. Equa., 2 (2002), 127-150.

[3] A. Beyrath, Stabilisation indirecte interne par un feedback localement distribué de systèmes d'équations couplées, C. R. Acad. Sci. Paris, 333 (2001), 451-456.

[4] A. Beyrath, Indirect linear locally distributed damping of coupled systems, Bol. Soc. Parana. Math., 22 (2004), 17-34.

[5] F. Conrad et B. Rao, Decay of solutions of wave equations in a starshaped domain with nonlinear boundary feedback, Asymptotic Anal., 7 (1993), 159-177.

[6] A. Guesmia, On the decay estimates for elasticity systems with some localized dissipations, Asymptotic Analysis, 22 (2000), 1-13.

[7] A. Guesmia, Une nouvelle approche pour la stabilisation des systèmes distribués non dissipatifs, C. R. Acad. Sci. Sér I. Math. Paris, 332 (2001), 633-636.

[8] A. Guesmia, A new approach of stabilization of nondissipative distributed systems, SIAM J. Cont. Optim., 42 (2003), 24-52.

[9] A. Guesmia, Nouvelles inégalités intégrales et applications à la stabilisation des systèmes distribués non dissipatifs, C. R. Acad. Sci. Sér I. Math. Paris, 336 (2003), 801-804.

[10] A. Guesmia et S. Messaoudi, On the boundary stabilization of a compactly coupled system of nonlinear wave equations, Intern. J. Evolut. Equa., 1 (2006), 211-224.

[11] P. Martinez, A new method to obtain decay rate estimates for dissipative systems, ESAIM: Control. Optim. Calcul. Varia., 4 (1999), 419-444.

[12] R. Racke, Lectures on nonlinear evolution equations. Initial value problems. Aspect of Mathematics E19. Friedr. Vieweg Sohn, Braunschweig/Wiesbaden (1992).

LMAM, ISGMP, Bat. A, UFR MIM
Université Paul Verlaine - Metz
Ile du Saulcy, 57045 Metz cédex 01, France
E-mail : guesmia@univ-metz.fr