Groupes n-abéliens généralisés

A. Abdollahi B. Daoud G. Endimioni

Abstract

Let n be an integer $\geqslant 2$. A group G is called generalized n-abelian if it admits a *positive polynomial* endomorphism of degree n, that is if there exist n elements $a_1, a_2, \ldots, a_n$ of G such that the function $\varphi : x \mapsto x^{a_1}x^{a_2}\cdots x^{a_n}$ is an endomorphism of G. In this paper we give some sufficient conditions for a generalized n-abelian group to be abelian. In particular, we show that every group admitting a positive polynomial monomorphism of degree 3 is abelian.

Résumé

Soit n un entier $\geqslant 2$. Un groupe G est dit n-abélien généralisé s'il admet un endomorphisme *polynomial positif* de degré n, c'est à dire s'il existe n éléments $a_1, a_2 \ldots, a_n$ de G tels que l'application $\varphi : x \mapsto x^{a_1}x^{a_2}\cdots x^{a_n}$ soit un endomorphisme de G. Dans cet article, on donne quelques conditions suffisantes que doit vérifier un groupe n-abélien généralisé pour qu'il soit abélien. En particulier, on montre que tout groupe admettant un monomorphisme polynomial positif de degré 3 est abélien.

1 Introduction

Les notations rappelées ici sont classiques. En particulier, si x et y sont deux éléments d'un groupe, on pose $x^y = y^{-1}xy$ et $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$. Pour les notations qui ne sont pas définies, nous renvoyons le lecteur à [6].

Soient n un entier $\geqslant 2$ et φ un endomorphisme d'un groupe G. On dit que φ est un endomorphisme *polynomial*, s'il existe n éléments $a_1, a_2 \ldots, a_n$ de G et n entiers $k_1, \ldots, k_n$ tels que

$$\varphi(x) = (x^{k_1})^{a_1}(x^{k_2})^{a_2}\cdots(x^{k_n})^{a_n}$$

Received by the editors April 2004.

Communicated by M. Van den Bergh.

2000 *Mathematics Subject Classification :* 20D45; 20D15.

Key words and phrases : Polynomial automorphisms; n-abelian groups.

pour tout $x \in G$. L'ensemble des automorphismes polynomiaux $J(G)$ d'un groupe *fini* G est un sous-groupe normal de $Aut(G)$ contenant le groupe des automorphismes intérieurs de G. Si G est infini, $J(G)$ n'est pas nécessairement un sous-groupe (considérer par exemple dans le groupe multiplicatif des réels non nuls l'automorphisme $x \mapsto x^3$).

Ces automorphismes polynomiaux ont été étudiés en particulier dans [2, 3, 8]. Il est par exemple prouvé dans [2, Theorem 3.5] qu'un groupe fini G est nilpotent de classe $c \geq 2$ si et seulement si $J(G)$ est nilpotent de classe $c - 1$.

On dit que φ est un endomorphisme polynomial *positif* de degré m si tous les entiers $k_1, \ldots, k_n$ sont strictement positifs, avec $m = k_1 + \cdots + k_n$. On dit qu'un groupe G est *n-abélien généralisé* si G admet un endomorphisme polynomial positif de degré n. En particulier, si G est un groupe n-abélien (c'est à dire si $(xy)^n = x^n y^n$ pour tous $x, y \in G$), alors G est un groupe n-abélien généralisé. Les groupes n-abéliens ont été complètement caractérisés par Alperin [1]. Le but de cet article est d'étudier les groupes n-abéliens généralisés.

Il n'est pas difficile de voir qu'un groupe 2-abélien généralisé est abélien. De plus, il est bien connu qu'un groupe n-abélien qui n'admet aucun élément non trivial d'ordre divisant $n(n-1)$ est abélien [1]. Si π est un ensemble de nombres premiers, on dit qu'un groupe est π-libre s'il n'admet aucun π-élément non trivial. Pour chaque entier $n \geqslant 2$, on note π_n l'ensemble des nombres premiers inférieurs ou égaux à n. Remarquons qu'un groupe π_n-libre n'admet aucun élément non trivial d'ordre divisant $n(n-1)$. Dans la section 2 de cet article, nous prouvons que tout groupe fini π_n-libre et n-abélien généralisé est abélien (théorème 2.1). Avec des hypothèses convenables, ce résultat peut s'étendre à des groupes infinis (voir la proposition 2.1 et le corollaire 2.2). Cependant, le résultat ne se généralise pas à un groupe quelconque. En effet, considérons par exemple le groupe $G = \langle a, b \mid (b^2)^a = b^{-2},\ (a^2)^b = a^{-2} \rangle$ donné par V.A. Churkin comme solution à un problème du *Kourovka Notebook* [4, p. 121, solution du problème 3.11]. Ce groupe est non abélien, sans torsion et il vérifie la relation $x^2(x^2)^a(x^2)^b(x^2)^{ab} = 1$ quel que soit x dans G. C'est donc un groupe 8-abélien généralisé, π_8-libre mais non abélien. On peut aussi noter que ce groupe est polycyclique et métabélien.

D'après un résultat de Levi [5], un groupe G est 3-abélien si et seulement si G est 2-Engel et l'exposant de son sous-groupe dérivé G' divise 3 ; en particulier, un tel groupe est nilpotent. Dans la section 3, on étend ce résultat en prouvant que tout groupe 3-abélien généralisé est nilpotent (théorème 3.1). L'existence de groupes non résolubles d'exposant 4 montre qu'un groupe 4-abélien généralisé n'est pas nécessairement nilpotent. Même dans la classe des groupes métabéliens polycycliques, un groupe 4-abélien généralisé n'est pas nécessairement nilpotent. Un exemple simple est donné par le groupe diédral infini $\langle a, b \mid a^2 = b^2 = 1 \rangle$, qui est 4-abélien généralisé puisque $ax^2ax^2 = 1$ quel que soit x.

A l'aide du résultat de Levi [5] cité plus haut, il est facile de montrer que dans un groupe, si l'application $x \mapsto x^3$ est un monomorphisme, alors le groupe est abélien (voir aussi [9]). Nous obtenons ici un résultat similaire pour les groupes admettant un monomorphisme polynomial positif de degré 3 (corollaire 3.2). Enfin, dans le corollaire 3.3, nous caractérisons les groupes admettant un automorphisme polynomial positif de degré 3.

On termine cette section avec les questions suivantes :

1) Un groupe 4-abélien généralisé et π_4-libre est-il nécessairement abélien ?
2) Quelle est la meilleure borne c pour la classe de nilpotence d'un groupe 3-abélien généralisé ? D'après le théorème 3.1, un tel groupe est nilpotent de classe au plus 10, donc $c \leqslant 10$.

2 Groupes finis n-abéliens généralisés

Dans tout ce qui suit, n est toujours un entier $\geqslant 2$. On note $\zeta(G)$ le centre d'un groupe G. Plus généralement, $\zeta_k(G)$ désigne le $(k+1)$ième terme de la suite centrale ascendante de G. On a donc en particulier $\zeta_0(G) = 1$ et $\zeta_1(G) = \zeta(G)$.

Proposition 2.1. *Soient G un groupe nilpotent n-abélien généralisé et π l'ensemble des nombres premiers p divisant $n(n-1)/2$. Si ce groupe G est π-libre, alors il est abélien.*

Démonstration. Si c désigne la classe de nilpotence de G, supposons d'abord $c = 2$. Le groupe G étant n-abélien généralisé, il existe n éléments $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de G tels que l'application $\varphi : x \mapsto x^{a_1} x^{a_2} \cdots x^{a_n}$ soit un endomorphisme de G. Soient $x, y \in G$. On peut écrire $\varphi(x) = x\,[x, a_1]\, x\,[x, a_2] \cdots x\,[x, a_n]$ d'où

$$\varphi(x) = x^n\,[x, a_1]\,[x, a_2] \cdots [x, a_n] = x^n\,[x, a_1 a_2 \cdots a_n]$$

puisque les commutateurs $[x, a_i]$ sont dans le centre de G. On a ainsi

$$\varphi(xy) = (xy)^n\,[xy, a_1 a_2 \cdots a_n]\,,$$

$$\varphi(x)\varphi(y) = x^n\,[x, a_1 a_2 \cdots a_n]\, y^n\,[y, a_1 a_2 \cdots a_n] = x^n y^n\,[xy, a_1 a_2 \cdots a_n]\,,$$

ce qui entraîne que $(xy)^n = x^n y^n$. Mais dans un groupe nilpotent de classe inférieure ou égale à 2, on a la relation $(xy)^n = x^n y^n [y, x]^{\frac{n(n-1)}{2}}$ [6, 5.3.5]. Puisque G est π-libre, il en résulte que G' est trivial, ce qui est contradictoire.
Supposons maintenant $c \geqslant 3$. Le groupe quotient $\bar{G} = G/\zeta_{c-2}(G)$ est nilpotent de classe 2 et n-abélien généralisé. De plus, G étant π-libre, il est bien connu qu'il en est de même pour $\bar{G}$. Alors, d'après le premier cas, $\bar{G}$ est abélien ce qui est contradictoire. ■

Notons que pour tout ensemble π de nombres premiers, un groupe nilpotent est π-libre si et seulement si son centre l'est.

Corollaire 2.1. *Si G est un groupe nilpotent de type fini, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) G est n-abélien généralisé (pour un entier $n \geqslant 2$).

(2) G est une extension finie de son centre.

(3) G est m-abélien (pour un entier $m \geqslant 2$).

Démonstration. Supposons d'abord que G est n-abélien généralisé et considérons son sous-groupe de torsion T. Ce sous-groupe est fini et G/T est un groupe n-abélien généralisé, nilpotent et sans torsion. D'après la proposition précédente, G/T

est abélien, donc G' est fini. Le fait que $|G : \zeta(G)|$ soit fini est alors bien connu et facile à montrer (c'est aussi une conséquence de [6, 14.5.11 et 14.5.6]).
Supposons maintenant que $|G : \zeta(G)| = m < \infty$. Alors $x \mapsto x^m$ est un endomorphisme de G d'après un célèbre résultat de Schur [6, 10.1.3], ce qui prouve que G est m-abélien (notons que si $m = 1$, G est abélien et donc m'-abélien pour tout entier m'). Le fait que (3) implique (1) est clair. ∎

Théorème 2.1. *Tout groupe fini n-abélien généralisé et π_n-libre est abélien.*

Démonstration. Supposons qu'il existe un groupe fini non abélien vérifiant les hypothèses du théorème. Soit G un tel groupe, choisi d'ordre minimal. Puisque G est d'ordre impair, il est résoluble en vertu du théorème de Feit-Thompson. De plus, tous les quotients propres de G satisfont les hypothèses du théorème. Ils sont donc abéliens par minimalité. Alors, d'après [6, Exercice 9.2.9], G est isomorphe soit à un groupe extra-special généralisé [6, Exercice 5.3.8], soit à un sous-groupe de $H(q)$ $(q > 2)$ [6, 7.1], où $H(q)$ est le groupe des matrices de la forme $f = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, pour tous $a \neq 0$ et b dans le corps fini $GF(q)$ d'ordre q. Si G était isomorphe à un groupe extra-spécial généralisé, il serait abélien en vertu de la proposition 2.1. Donc G est isomorphe à un sous-groupe de $H(q)$. Puisque G est n-abélien généralisé, il existe n éléments $g_1, \ldots, g_n$ de G tels que l'application $\varphi : f \mapsto f^{g_1} \cdots f^{g_n}$ soit un endomorphisme de G. Posons $g_i = \begin{pmatrix} c_i & d_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec $c_i, d_{i,} \in GF(q)$ et $c_i \neq 0$. Le groupe G n'étant pas abélien, on peut toujours trouver un élément $f = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ et un élément $f' = \begin{pmatrix} 1 & b' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G'$ avec $a \neq 0, 1$ et $b' \neq 0$. Puisque l'application φ est un endomorphisme, on a

$$\prod_{i=1}^{n} (ff')^{g_i} = \left(\prod_{i=1}^{n} f^{g_i} \right) \left(\prod_{i=1}^{n} f'^{g_i} \right).$$

A l'aide de la relation

$$\prod_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \prod_{i=1}^{n} a_i & b_1 + \sum_{j=2}^{n} (\prod_{i=1}^{i=j-1} a_i) b_j \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on peut écrire

$$\prod_{i=1}^{n} (ff')^{g_i} = \prod_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} a & c_i^{-1}(ad_i + ab' + b - d_i) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^n & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (*)$$

en posant

$$v = c_1^{-1}(ad_1 + ab' + b - d_1) + \sum_{j=2}^{n} a^{j-1} c_j^{-1}(ad_j + ab' + b - d_j).$$

De même,

$$\prod_{i=1}^{n} f^{g_i} = \prod_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} a & c_i^{-1}(ad_i + b - d_i) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^n & c_1^{-1}(ad_1+b-d_1)+\sum_{j=2}^n a^{j-1}c_j^{-1}(ad_j+b-d_j) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\prod_{i=1}^n f'^{g_i} = \prod_{i=1}^n \begin{pmatrix} 1 & c_i^{-1}b' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (c_1^{-1}+\cdots+c_n^{-1})b' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il en résulte l'égalité

$$\left(\prod_{i=1}^n f^{g_i}\right)\left(\prod_{i=1}^n f'^{g_i}\right) = \begin{pmatrix} a^n & w \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (**)$$

en posant

$$w = a^n(c_1^{-1}+\cdots+c_n^{-1})b' + c_1^{-1}(ad_1+b-d_1)+\sum_{j=2}^n a^{j-1}c_j^{-1}(ad_j+b-d_j).$$

En égalisant les matrices $(*)$ et $(**)$, après simplification, on obtient la relation

$$P(a) = c_1^{-1}+c_2^{-1}a+\ldots+c_{n-1}^{-1}a^{n-2}+(-c_1^{-1}-\cdots-c_{n-1}^{-1})a^{n-1}=0.$$

Notons que P est un polynôme non nul à coefficients dans $GF(q)$ de degré inférieur ou égal à $n-1$.
L'égalité $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} a^k & b(a^k-1)(a-1)^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ montre que l'ordre e de f dans G est égal à l'ordre de a dans le groupe multiplicatif $GF(q)\setminus\{0\}$ (rappelons que a est choisi distinct de 1). En remplaçant successivement dans le calcul précédent f par $f^2,\ldots,f^{e-1}$, on en déduit que les éléments $a, a^2,\ldots,a^{e-1}$ sont des racines (distinctes) du polynôme P ; notons aussi que $P(1)=0$. De plus, on a $e \geqslant n+1$ puisque G est π_n-libre. Le polynôme P doit donc être de degré $\geqslant n+1$, d'où une contradiction. Il en résulte que G ne peut pas être isomorphe à un sous-groupe de $H(q)$, ce qui achève la démonstration du théorème. ■

Corollaire 2.2. *Soit G un groupe périodique et π_n-libre admettant un endomorphisme de la forme $\varphi : x \mapsto x^{a_1}x^{a_2}\cdots x^{a_n}$. Supposons que la clôture normale de $\{a_1,\ldots,a_n\}$ dans G soit finie (c'est par exemple le cas si $\{a_1,\ldots,a_n\}$ est un ensemble normal). Alors G est abélien.*

Démonstration. Notons F la clôture normale de $\{a_1,\ldots,a_n\}$ dans G. Le groupe quotient G/F est π_n-libre et n-abélien. Or tout groupe n-abélien π_n-libre est abélien [1]. Par suite G' est fini. D'après un théorème de Hall [6, 14.5.3], $G/\zeta_2(G)$ est un groupe fini (et π_n-libre). Le théorème 2.1 et la proposition 2.1 impliquent alors la commutativé de G. Le fait que F soit fini quand $\{a_1,\ldots,a_n\}$ est un ensemble normal est bien entendu une conséquence du lemme de Dicman. ■

3 Groupes 3-abéliens généralisés

Théorème 3.1. *Tout groupe 3-abélien généralisé est nilpotent (de classe $\leqslant 10$).*

Démonstration. Soit G un groupe 3-abélien généralisé. Il existe donc 3 éléments c_1, c_2, c_3 de G tels que l'application $\varphi : x \mapsto x^{c_1}x^{c_2}x^{c_3}$ soit un endomorphisme de G. Par conséquent, $\phi : x \mapsto x^{a_1}xx^{a_2}$ est aussi un endomorphisme de G, où $a_1 = c_1c_2^{-1}$ et $a_2 = c_3c_2^{-1}$. Pour chaque $x \in G$, on a $\phi(x^{a_2{}^{-1}}x^{a_1{}^{-1}}) = \phi(x^{a_2{}^{-1}})\phi(x^{a_1{}^{-1}})$, ce qui implique l'égalité

$$xx^{a_2{}^{-1}}x^{a_1{}^{-1}}x = x^{a_2^{-1}}x^2x^{a_1^{-1}} \quad \text{pour chaque } x \in G.$$

En substituant a_i à x dans cette dernière égalité (pour $i = 1$ et $i = 2$), on obtient $a_1^{a_2}a_1 = a_1a_1^{a_2}$ et $a_2^{a_1}a_2 = a_2a_2^{a_1}$. Il en résulte que le commutateur $c = [a_1, a_2]$ commute avec a_1 et a_2. A l'aide de ce résultat, il est facile de voir que la relation $\phi(cya_1{}^{-1}) = \phi(c)\phi(ya_1{}^{-1})$ (pour un y quelconque dans G) implique la relation $y^2 = y^{c^2}y^c$. Grâce à cette égalité et celle obtenue en remplaçant y par y^{-1}, on obtient la relation $y^{c^2}y^c = y^cy^{c^2}$. Il en résulte que $[c, y, y] = 1$ pour tout $y \in G$, d'où $c^2 \in \zeta_3(G)$ d'après [7, Théorème 7.13 (ii) et (v)]. L'égalité $y^2 = y^{c^2}y^c$ donne alors $y \equiv y^c \mod \zeta_3(G)$, ce qui prouve que c appartient à $\zeta_4(G)$.
Partant de la relation $\phi(a_1{}^{-1}y) = \phi(a_1{}^{-1})\phi(y)$ (et grâce au fait que $[a_1, a_2] \equiv 1 \mod \zeta_4(G)$), on montre facilement que $y^2 \equiv y^{a_1{}^2}y^{a_1} \mod \zeta_4(G)$. En utilisant cette congruence et celle obtenue en remplaçant y par y^{-1}, on obtient $y^{a_1}y^{a_1{}^2} \equiv y^{a_1{}^2}y^{a_1} \mod \zeta_4(G)$, d'où $[a_1, y, y] \equiv 1 \mod \zeta_4(G)$. En appliquant à nouveau [7, Théorème 7.13 (ii) et (v)], on en déduit que $a_1^2\zeta_4(G)$ appartient à $\zeta_3(G/\zeta_4(G))$; en d'autres termes, on a $a_1^2 \in \zeta_7(G)$.
De façon analogue, en partant de la relation $\phi(ya_2) = \phi(y)\phi(a_2)$, on montre que $y^2 \equiv y^{a_2}y^{a_2{}^2} \mod \zeta_4(G)$, et ensuite que a_2^2 appartient à $\zeta_7(G)$.
Les congruences $y^2 \equiv y^{a_1{}^2}y^{a_1} \mod \zeta_4(G)$ et $y^2 \equiv y^{a_2}y^{a_2{}^2} \mod \zeta_4(G)$ impliquent donc $y \equiv y^{a_1} \mod \zeta_7(G)$ et $y \equiv y^{a_2} \mod \zeta_7(G)$, ce qui montre que a_1 et a_2 sont dans $\zeta_8(G)$. Le groupe quotient $G/\zeta_7(G)$ est donc 3-abélien puisque ϕ induit sur ce quotient l'endomorphisme $x \mapsto x^3$. D'après un résultat de Levi [5], cela implique que $G/\zeta_7(G)$ est 2-Engel. Donc ce quotient est nilpotent de classe au plus 3 [6, 12.3.6]. Il en résulte que G est nilpotent de classe au plus 10. ∎

Corollaire 3.1. *Un groupe 3-abélien généralisé de type fini est une extension finie de son centre.*

Démonstration. C'est une conséquence directe du théorème précédent et du corollaire 2.1. ∎

Corollaire 3.2. *Soit G un groupe admettant un endomorphisme polynomial positif φ de degré 3. Alors G est abélien si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :*

(1) le centre de G n'admet aucun éléments d'ordre 3.

(2) φ est monomorphisme.

Démonstration. D'après le théorème précédent, G est nilpotent. Donc, si le centre de G n'admet aucun élément d'ordre 3, il est facile de voir que G est 3-libre. La première partie du corollaire est ainsi une conséquence de la proposition 2.1. Remarquons maintenant que tout élément d'ordre 3 dans le centre de G appartient au noyau de φ. Il en résulte que si ce noyau est trivial, le centre de G n'admet aucun élément d'ordre 3 et l'on est ramené au cas précédent. ∎

Notre dernier résultat caractérise les groupes possédant un automorphisme polynomial positif de degré 3 (rappelons que par définition, si d est un entier positif, un groupe abélien G est d-divisible si $G = \{g^d \mid g \in G\}$).

Corollaire 3.3. *Un groupe G admet un automorphisme polynomial positif de degré 3 si et seulement si G est un groupe abélien 3-divisible sans éléments d'ordre 3.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que d'après le corollaire précédent, un groupe admettant un automorphisme polynomial positif de degré 3 est nécessairement abélien. Le reste de la démonstration est clair. ∎

Remerciements. Les deux premiers auteurs remercient l'administration du *Centre de Mathématiques et Informatique* de l'Université de Provence pour leur hospitalité durant le séjour qu'ils ont effectué dans cette université. Le deuxième auteur remercie également l'administration du département de Mathématiques de l'Université d'Ispahan de leur hospitalité et de l'accueil chaleureux qui lui a été réservé durant le séjour qu'il a effectué dans cette université.

Références

[1] J.L. Alperin, *A classification of n-abelian groups,* Canad. J. Math. **21** (1969) 1238–1244.

[2] G. Corsi Tani et M.F. Rinaldi Bonafede, *Polynomial automorphisms in nilpotent finite groups,* Boll. Un. Mat. Ital. A (6) 5 (1986), no. 2, 285–292.

[3] G. Kowol, *Polynomautomorphismen von Gruppen,* Arch. Math. **57** (1991), no. 2, 114–121.

[4] "Kourovka Notebook No 15" (*Unsolved problems in group theory*) Novosibirsk, 2002.

[5] F. W. Levi, *Notes on group theory. I, II,* J. Indian Math. Soc. (N.S.) **8** (1944) 1–9.

[6] D.J.S. Robinson, "A Course in the Theory of Groups", Springer-Verlag, Berlin, 1982.

[7] D.J.S. Robinson, "Finiteness Conditions and Generalized Soluble Groups, Part I, II," Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972.

[8] D. Schweigert, *Polynomautomorphismen auf endlichen Gruppen,* Arch. Math. **29** (1977), no. 1, 34–38.

[9] H.F. Trotter, *Groups in which raising to a power is an automorphism,* Canad. Math. Bull. **8** (1965) 825–827.

Département de Mathématiques ; Université d'Ispahan ;
Ispahan 81746-73441 ; Iran
email :abdollahi@member.ams.org

Département de Mathématiques ; Université F. Abbas ;
Sétif 19000 ; Algérie
email :boun_daoud@yahoo.fr

C.M.I.-Université de Provence ; UMR-CNRS 6632 ;
39, rue F. Joliot-Curie ; 13453 Marseille Cedex 13 ; France
email :endimion@gyptis.univ-mrs.fr