On quasi-invariant measures in topological vector spaces

H. Hogbe Nlend

Abstract

We give a complete solution of the fundamental problem of existence of quasi-invariant measures in infinite dimensional vector spaces considered and partially solved by I.M. Gelfand in 1967 [4]. Our general result shows particularly that in all infinite dimensional usual vector spaces, in particular,in all Fréchet, Banach or Hilbert spaces and in all spaces of distributions, the only quasi-invariant measure is null measure.

Résumé

Nous donnons une solution complète au problème fondamental de l'existence des mesures quasi-invariantes dans les espaces vectoriels de dimension infinie, problème posé et partiellement résolu par I.M. Gelfand en 1967 [4]. Notre résultat général montre notamment que dans tous les espaces vectoriels usuels de dimension infinie, en particulier, dans tous les espaces de Fréchet, Banach ou Hilbert et dans tous les espaces de distributions, la seule mesure quasi-invariante est la mesure nulle.

0 Introduction

Dans [4], I. M. Gelfand a démontré le théorème suivant : Soit E un espace de Fréchet de dimension infinie sur le corps des réels, *séparable et tel que l'enveloppe convexe équilibrée de tout compact de E est rare dans E.* Alors la seule mesure quasi-invariante sur E est la mesure nulle ([4] page 352, th. 4).

Received by the editors July 1996.
Communicated by J. Schmets.
1991 *Mathematics Subject Classification :* 28C20, 46G12.
Key words and phrases : quasi-invariant measures, infinite dimensional spaces.

Le but de la présente Note est d'améliorer ce résultat en le démontrant pour tous les espaces de Fréchet de dimension infinie et en particulier pour tous les espaces de Banach et espaces de Hilbert de dimension infinie, sans aucune condition restrictive particulière et de l'étendre à une vaste classe d'espaces vectoriels topologiques comprenant pratiquement tous les espaces usuels de l'Analyse mathématique en dimension infinie.

Soit E un espace vectoriel topologique séparé sur le corps des nombres réels. Rappelons qu'une mesure positive sur E est dite σ-finie si E est réunion d'une suite de parties de mesures finies. Une mesure μ, positive σ-finie, sur E est une mesure quasi-invariante si pour toute partie A de E de μ-mesure nulle, ses translatées $x + A$ pour tout $x \in E$ sont aussi de μ-mesure nulle.

Sauf mention expresse du contraire, notre terminologie est celle de N. Bourbaki en ce qui concerne les espaces vectoriels topologiques et les bornologies [1],[2] et la théorie de la mesure dans les espaces topologiques non localement compacts [3]. Les espaces vectoriels considérés sont de dimension infinie sur le corps des réels.

1 Le théorème principal et ses premières conséquences

Théorème 1 : *Soit E un espace localement convexe séparé de dimension infinie et soit μ une mesure quasi-invariante sur E.*

a) Si E est ultrabornologique, tout disque compact de E est de μ-mesure nulle.

b) Si E est limite inductive d'une suite strictement croissante de sous espaces vectoriels boréliens, l'espace E tout entier est de μ-mesure nulle.

Enonçons tout de suite les premières conséquences de ce résultat général.

Corollaire 1 : *Dans tout espace ultrabornologique quasi-complet et en particulier dans tout espace de Fréchet de dimension infinie , ou dans tout espace de Banach ou de Hilbert de dimension infinie, la seule mesure quasi-invariante est la mesure nulle.*

Corollaire 2 :*Dans tout espace dual de Fréchet, de dimension infinie, la seule mesure quasi-invariante est la mesure nulle.*

Corollaire 3 : *Dans tout espace (LF) de dimension infinie, limite inductive stricte dénombrable d'espaces de Fréchet, la seule mesure quasi-invariante est la mesure nulle.*

Corollaire 4 :*Soit E le dual fort d'un espace nucléaire complet de dimension infinie. Si E est quasi-complet, la seule mesure quasi-invariante sur E est la mesure nulle.*

En particulier dans les huit principaux espaces de la théorie des distributions : $\mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{S}, \mathcal{E}', \mathcal{S}', \mathcal{D}', \mathcal{O}_{\mathrm{M}}, \mathcal{O}'_{\mathrm{C}}, \ldots$ la seule mesure quasi-invariante est la mesure nulle.

2 Démonstrations du théorème principal et des corollaires

a) Soit E un espace localement convexe séparé ultrabornologique de dimension infinie. Supposons qu'il existe K un disque compact de E tel que $\mu(K) \neq 0$. Alors l'espace vectoriel E_K engendré par K et normé par la jauge de K est un espace de Banach et une partie borélienne de E, réunion dénombrable des boréliens nK, n entier ≥ 1. Donc $\mu(E_K) \neq 0$.

Par ailleurs $E_K \neq E$. En effet, sinon l'identité $E \to E_K$ serait une bijection linéaire dont l'inverse est continue donc serait continue en vertu du théorème du graphe fermé, puisque E est supposé ultrabornologique [1] ou [2]. Donc E et E_K seraient topologiquement isomorphes et parsuite K qui est compact dans E serait compact dans E_K ; donc E_K serait de dimension finie et parsuite E serait de dimension finie ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc $E_K \neq E$.

Comme $\mu(E_K) \neq 0$, $\mu(x + E_K) \neq 0$ pour tout $x \in E$ par hypothèse de quasi-invariance de la mesure μ. Considérons l'espace quotient $E/_{E_K}$. Cet espace vectoriel est de dimension ≥ 1 sur le corps des réels, donc a la puissance du continu. Tout point $\dot{x} = x + E_K$ de $E/_{E_K}$ avec $x \in E$ est donc de mesure > 0. L'ensemble de ces points forme une partition infinie non dénombrable de parties de E de mesures non nulles, ce qui est impossible en vertu de la propriété de σ-finitude de la mesure μ.

En conclusion tout disque compact de E est de μ-mesure nulle, ce qui achève la démonstration de la première partie du théorème 1.

b) Supposons que E soit une limite inductive d'une suite strictement croissante (E_n) de sous-espaces vectoriels boréliens, autrement dit $E = \cup_{n=0}^{\infty} E_n$ et $E_n \subseteq E_{n+1}$, $E_n \neq E_{n+1}$, et E_n borélien de E.

Supposons $\mu(E) \neq 0$. Alors puisque μ est dénombrablement additive, il existe un entier $m \geq 1$ tel que $\mu(E_m) \neq 0$. On obtient la contradiction comme dans le raisonnement du premier cas **a)** en considérant l'espace quotient $E/_{E_m}$ car $E_m \neq E_{m+1}$ entraine $E_m \neq E$; on conclue alors que $\mu(E) = 0$, ce qui achève la démonstration du théorème 1.

c) Passons à la *démonstration des corollaires.*

De manière générale la mesure de l'espace tout entier E est la borne supérieure des mesures de ses compacts en vertu de la propriété de régularité intérieure des mesures [3].

Le théorème 1,a) entraine donc que tout espace localement convexe séparé, de dimension infinie, ultrabornologique dont tout compact est contenu dans un disque compact est de μ-mesure nulle. Il en est ainsi de tout espace de Fréchet ou de tout espace (LF), limite inductive stricte d'espaces de Fréchet, puisque dans un tel espace l'enveloppe convexe équilibrée fermée d'un compact est encore compacte, d'où les corollaires 1 et 3.

Le corollaire 2 est une conséquence du théorème 1,b). En effet soit E un espace de Fréchet. Son dual E' est réunion de la suite des espaces de Banach E'_n où E'_n est le sous espace de E' engendré par le polaire $\cup_n^0$ d'un voisinage de zéro de E, avec $(\cup_n)$ un système fondamental dénombrable de voisinages de zéro de E. Comme $\cup_n^0$ est une partie équicontinue faiblement fermée de E', c'est un borélien de E' pour toutes les topologies usuelles de E', donc E'_n est un borélien de E' pour n'importe laquelle de ces topologies. On peut donc appliquer le théorème 1,b) et obtenir le corollaire 2.

Le corollaire 4 résulte du théorème 1,a) combiné avec les résultats suivants [5] : Le dual fort d'un espace localement convexe séparé nucléaire complet est ultrabornologique et si E est quasi-complet, l'enveloppe convexe équilibrée de tout compact de E est encore compacte. Notons qu'il existe un espace nucléaire complet dans le dual fort duquel il existe des suites de Cauchy non convergentes, d'où la nécessité de l'hypothèse de quasi-complétude sur E (voir [5] théorème 1 et remarque 2).

Références

[1] N. Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques,* Masson, Paris (1981).

[2] N. Bourbaki, *Topological Vector Spaces,* Springer-Verlag, (1987).

[3] N. Bourbaki, *Intégration, chap IX : Intégration sur les espaces topologiques séparés,* Hermann, Paris (1969).

[4] I.M. Gelfand & N.Y. Vilenkin, *Applications de l'Analyse harmonique* Les distributions, Tome 4, Dunod, Paris, (1967).

[5] H. Hogbe Nlend, *Sur un théorème de L. Schwartz,* CRAS, Paris, T. 273, (1971), 1130–1131.

H. Hogbe Nlend
Mathématiques - Informatique
Université Bordeaux I
351, Cours de la Libération
33405 TALENCE / Bordeaux, France
E.mail :h2n@math.U-bordeaux.fr