Une généralisation du lemme de Hensel

M'hammed Boulagouaz*

Résumé

Dans ce travail on définit la notion d'un polynôme homogénéisable à coefficients dans un corps gradué de groupe de grades totalement ordonné et on établit une caractérisation ainsi qu'une expression d'un tel polynôme en fonction d'un polynôme à coefficients de grades zéro, voir la proposition1.1 et le théorème1.3. Cette expression nous permet de donner un critère d'irréductibilité et de séparabilité d'un polynôme homogénéisable, voir la proposition1.4.

Une application de la notion du polynôme homogénéisable est donnée dans le cas où le corps gradué est le gradué d'un corps valué (F, v) (voir[2] ou [8]). Ceci en généralisant la notion du polynôme résiduel d'un polynôme à coefficients dans l'anneau de valuation de F, à un polynôme de $F[X]$ vérifiant la condition $(**)$, condition équivalente à toutes les racines du polynôme dans (une clôture algèbrique) ont la même valuation, on obtient des critères de réductibilité pour de tel polynôme, voir la proposition 2.3 et le corollaire2.2, et le résultat principal du présent travail est une généralisation du lemme de Hensel aux polynômes à coefficients dans un corps valué vérifiant la condition $(**)$: Théoreme2.5.

1 Graduations de l'anneau des polynômes à coefficients dans un corps gradué

Soit Γ un groupe additif commutatif totalement ordonné et R un anneau commutatif unitaire.

On dit que R est gradué de type Γ si le groupe additif de R se décompose en

*L'auteur remercie vivement le Professeur J.P.Tignol pour les différentes discussions fructueuses abordées à propos de ce tarvail, ainsi que l'Institut Catholique de Louvain pour son hospitalité qui lui a permis de rédiger ce présent article (second trimestre 1996).

Received by the editors May 1996 – In revised form July 1997.

Communicated by J. Van Geel.

somme directe de sous-groupes :

$$R = \bigoplus_{\lambda \in \Gamma} R_\gamma$$

de manière compatible avec la multiplication, c'est-à-dire que la condition suivante est satisfaite :

$$R_\lambda . R_\delta \subseteq R_{\lambda+\delta}$$

pour $\lambda, \delta \in \Gamma$.

Pour $\lambda \in \Gamma$, les éléments de R_λ sont appelés *éléments homogènes de degré* ou *de grade* λ. On note :

$$\Gamma_R = \{\lambda \in \Gamma \mid R_\lambda \neq \{0\}\}.$$

L'ensemble Γ_R est appelé le support de l'anneau gradué R.
On dit que R est un *corps gradué* si $R \neq \{0\}$ et si tout élément homogène non nul est inversible. L'ensemble Γ_R est alors un groupe et il est appelé, le groupe des grades de R. Dans tout ce qui suit R est un corps gradué de support Γ_R.

Pour tout λ élément d'une extension du groupe Γ_R, on définit une graduation de l'anneau $R[X]$ de support $\Gamma[\lambda]$ (le semi groupe engendré par Γ et λ) et où la composante homogène de grade $\delta \in \Gamma_R[\lambda]$ est donnée par :

$$R[X]_\delta = \{\Sigma a_i X^i \text{ tel que } a_i \text{ homogène et } \mathrm{grade}(a_i) + i\lambda = \delta\}.$$

L'anneau $R[X]$ muni da la graduation définie par λ est noté $R[X]^{(\lambda)}$.
A remarquer que dans $R[X]^{(\lambda)}$, le polynôme X est homogène de grade γ.

Dans toute la suite un polynôme $P(X) = \Sigma p_i X^i$ de $R[X]^{(\lambda)}$ sera dit homogène s'il est homogène comme élément de l'anneau gradué $R[X]^{(\lambda)}$. Donc $P(X) = \Sigma p_i X^i$ de $R[X]^{(\lambda)}$ est homogène dans $R[X]^{(\lambda)}$ si $grade(p_i) + i\lambda = grade(p_j) + j\lambda$, dès que p_i et p_j sont non nuls.

Exemple :
Soit K un corps quelconque et $R = K[T, T^{-1}] = \bigoplus_{\mathbb{Z}} KT^n$, alors :
1)$F(X) = 2T^4 + 4TX^3 + X^4$ est homogène dans $R[X]^{(1)}$.
2)$G(X) = T^2 + TX^2 + X^4$ est homogène dans $R[X]^{(\frac{1}{2})}$.

Soit $P(X) = \Sigma p_i X^i \in R[X]$. On dira que $P(X)$ est *homogénéisable* s'il existe λ dans une extension du groupe Γ_R tel que $P(X)$ est homogène dans $R[X]^{(\lambda)}$.
$F(X)$ et $G(X)$ cités dans l'exemple cidessus sont donc des polynômes homogénéisables de $K[T, T^{-1}][X]$.

Proposition 1.1. $P(X) = \Sigma_{i=0}^n p_i X^i \in R[X]$ *est homogénéisable si et seulement si*

$$\frac{grade(p_i) - grade(p_j)}{j - i}$$

est indépendant du couple (i, j) *dans* $\Gamma_R \bigotimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$*, pour tous* p_i *et* p_j *non nuls.*

Démonstration: La condition est nécessaire, car dire que $P(X)$ est homogénéisable c'est dire qu'il existe δ dans une extension de Γ_R tel que :
$\text{grade}(p_i) + i\delta = \text{grade}(p_j) + j\delta$, pour p_i et p_j non nuls. Donc

$$\frac{\text{grade}(p_i) - \text{grade}(p_j)}{j-i} = \delta \text{ est indépendant du couple } (i,j).$$

La condition est suffisante. En effet, le groupe $\Gamma_R \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ est bien une extension de Γ_R, et pour $\delta = \frac{\text{grade}(p_j) - \text{grade}(p_i)}{i-j}$ on a $P(X)$ est homogène dans $R[X]^{(\delta)}$. ■

Dans la suite posons $\Delta = \Gamma_R \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.
Remarquons que si $P(X)$ est homogénéisable pour la valeur δ et s'il n'est pas un monôme, alors δ est d'ordre fini sur Γ_R et $\Gamma_R(\delta)$, groupe engendré par Γ_R et δ, est un sous groupe totalement ordonné de $\Gamma_R \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. En effet soient $i \neq j$ tel que p_i et p_j non nuls, alors $(i-j)\delta = \text{grade}(p_j) - \text{grade}(p_i) \in \Gamma_R$.

Corollaire 1.2. *Si $P(X)$ est homogène dans $R[X]^{(\lambda)}$ et différent d'un monôme, alors tout diviseur de $P(X)$ est homogène dans $R[X]^{(\lambda)}$.*

Démonstration: $P(X)$ n'est pas un monôme, donc λ est d'ordre fini sur Γ_R et $\Gamma_R(\lambda)$ est un sous groupe totalement ordonné de $\Gamma_R \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Donc $R[X]$ est un anneau gradué intègre de semi groupe de graduation totalement ordonné, alors il est connu que dans un tel cas que tout diviseur d'un élément homogène est homogène. ■

Soit $P(X) = \Sigma_{i=1}^{n} p_n X^n \in R[X]$ un polynôme non égal à un monôme, homogènéisable pour une valeur $\lambda \in \Delta$ et d le dénominateur de λ (le plus petit entier d tel que $d\lambda \in \Gamma_R$) dans Γ_R, si $n = kd + r$ est la division euclidienne de n par d et si a (resp.b) désigne un élément non nul de R de grade $d\lambda$ (resp. de grade $gr(p_n) + kd$), alors :

Théorème 1.3.

$$P(X) = bX^r H(a^{-1}X^d),$$

$$\text{où} \quad H(X) = \Sigma_{j=0}^{k} b^{-1} p_{n+(j-k)d} a^j X^j \in R_0[X].$$

Démonstration: $P(X)$ homogène donc $gr(p_i) - gr(p_j) = (j-i)\lambda$, dès que p_i et p_j sont non nuls i.e. $(j-i)$ est divisible par d dès que p_i et p_j sont non nuls. Comme p_n est non nul, les autres coefficients non nuls sont les p_{n-jd} pour $0 \leq j \leq k$. Ainsi

$$P(X) = \Sigma_{i=1}^{n} p_{n-jd} X^{n-jd} = \Sigma_{i=1}^{n} p_{n-jd} X^{n-kd} X^{d(k-j)}$$

$$= X^{n-kd} \Sigma_{i=1}^{n} p_{n-(k-j)d} X^{dj} = bX^{n-kd} \Sigma_{i=1}^{n} b^{-1} p_{n-(k-j)d} (a^{-1}X^d)^j$$

$$= bX^r H(a^{-1}X^d), \text{ avec } H(X) = \Sigma_{j=0}^{k} b^{-1} p_{n+(j-k)d} a^j X^j \in R_0[X].$$

■

Proposition 1.4. *Soient $P(X)$ un polynôme non égal à un monôme, homogène de $R[X]^{(\lambda)}$ et $H(X)$ le polynôme de $R_0[X]$ donné par le théorème1.3. Alors :*
1) $P(X)$ est irréductible dans $R[X]$ si et seulement si $H(X)$ est irréductible dans $R_0[X]$.
2) $P(X)$ est séparable sur $R[X]$ si et seulement si $H(X)$ est séparable sur R_0 et p la caractéristique de R_0 ne divise pas d.

Démonstration:
1) Si $P(X) = P_1(X)P_2(X)$ alors $P_1(X)$ et $P_2(X)$ sont homogènes dans $R[X]^{(\lambda)}$ et le théorème 1.3 donne que :

$$P_1(X) = b_1H_1(a^{-1}X^d) \quad \text{et} \quad P_2(X) = b_2H_2(a^{-1}X^d),$$

$$\text{d'où} \quad bH(a^{-1}X^d) = b_1H_1(a^{-1}X^d)b_2H_2(a^{-1}X^d)$$

et donc $H(X)$ est réductible. Il est trivial que si $H(X)$ est réductible dans $R_0[X]$ alors $P(X)$ est réductible dans $R[X]$.
2) Une simple application de la définition de la séparabilité d'un polynôme. ■

Proposition 1.5. *Soit $P(X)$ un polynôme homogène de $R[X]^{(\lambda)}$. Alors*

1. *Tout polynôme de $R[X]$ admet une division euclidienne par $P(X)$.*
2. *Si $U(X) = Q(X)P(X)+S(X)$, est la division euclidienne de $U(X)$ par $P(X)$, alors dans $R[X]^{\lambda)}$ on a :*

$$grade(U(X)) = grade(Q(X)P(X)) = grade(S(X)).$$

Démonstration: Pour un anneau de polynômes intègre la division euclidienne par un polynôme est possible dès que celui-ci est à coefficient dominant invérsible. Or R est un corps gradué, donc tous les éléments homogènes non nuls de R (qui sont les coefficients des polynômes homogènes de $R[X]^{\gamma}$) sont invérsibles.
Pour montrer la deuxième partie de la proposition, la première affirmation nous donne que :

$$R[X] = R[X]P(X) \bigoplus N,$$

où N est le R-module gradué des polynômes de degré inférieur strictement à celui de $P(X)$. Or l'idéal engendré par $P(X)$ est aussi gradué, donc si $U(X)$ est homogène, $Q(X)P(X)$ et $S(X)$ sont aussi homogènes et ont le même grade que $U(X)$. ■

Corollaire 1.6. *Soit L une extension graduée de degré fini sur R. Si α est un élément de L annulant un polynôme homogénéisable de $R[X]$ alors :*

1. *Il existe un polynôme de degré minimal irréductible homogénéisable de $R[X]$ annulé par α, appelé le polynôme minimal homogène de α et noté $f_\alpha(X)$.*
2. *Tout polynôme homogénéisable annulé par α est un multiple de $f_\alpha(X)$.*
3. *$R[\alpha]$ est un anneau gradué et un R-module gradué libre de rang le degré de $f_\alpha(X)$.*

Démonstration: Pour montrer la première affirmation, $f_\alpha(X)$ sera le polynôme homogénéisable de degré minimal annulé par α, le corollaire1.2 nous assure alors l'irréductibilité de $f_\alpha(X)$.
Pour la seconde assertion du corollaire, tout polynôme homogénéisable de $R[X]$ annulé par α doit avoir un reste nul dans la division euclidienne par $f_\alpha(X)$ (voir le corollaire1.2).
Pour la dernière proposition, $R[\alpha]$ est bien un anneau gradué de type $\Gamma_R(grade(\alpha))$ (sous groupe de Γ_L engendré par Γ_R et $grade(\alpha)$) et où :

$$R[\alpha]_m = \{\Sigma_{i=1}^{n-1} a_i\alpha^i \ \text{ tel que } \ a_i \ \text{ homogène et grade}(a_i) + i\omega(\alpha) = m\}$$

avec degré de $f_\alpha(X)$ égal à n. Ceci prouve bien que $(1, \alpha, \alpha^2, ..., \alpha^{n-1})$ est une base de $R[\alpha]$. ■

Comme conséquence immédiate de ce corollaire est que $R[\alpha] \simeq R[X]/(f_\alpha(X))$.

Polynôme résiduel d'ordre α :

Soit (F, v) un corps valué de groupe de valuation Γ_F et de corps résiduel $\bar{F}$. Pour $\lambda \in \Gamma_F$, on définit :

$$F_\lambda = \{x \in F \mid v(x) \geq \lambda\},$$
$$F_{\lambda^+} = \{x \in K \mid v(x) > \lambda\},$$

et note $gr(F)_\lambda$ le groupe additif égal à F_λ/F_{λ^+}. En particulier $gr(F)_0 = \bar{F}$ (corps résiduel de F). Alors $gr(F) = \bigoplus_\Gamma gr(F)_\lambda$ est un groupe additif gradué de type Γ et la multiplication définie entre éléments homogènes de $gr(F)$ par :

$$(a + F_{\lambda^+})(b + F_{\delta^+}) = (ab + F_{(\lambda+\delta)^+}),$$

et prolongée par linéarité, fait de $gr(F)$ un corps gradué de support Γ_F appelé *le gradué du corps valué* (F, v).
Pour $\lambda \in \Delta$, on note : π_λ , l'homomorphisme projection canonique de F_λ dans $gr(F)_\lambda$ et pour $x \in F$ on pose : $\tilde{x} = \pi_{v(x)}(x)$. Γ_F étant totalement ordonné, $gr(F)$ est intègre et a donc un corps de fraction qu'on note $\tilde{F}$ dans la suite de ce travail.
Il est à noter que si E/F est une extension de corps valués alors $gr(F)$ est un sous corps gradué de $gr(E)$. Pour plus de détails sur le gradué d'un corps valué voir [1] ou [2].
Pour le reste de ce paragraphe posons : $R = gr(F)$, $\Delta = \mathbb{Q} \bigotimes_{\mathbb{Z}} \Gamma_F$, Ω la clôture algébrique de F, et S le gradué de Ω (il est simple de vérifier que S est une extension graduée de R de groupe de grade Δ et Ω_0 est la cloture algébrique de R_0).

Soit $\alpha \in \Delta$ et $f(X) = \Sigma_{i=1}^n a_i X^i$ un polynôme unitaire de $F[X]$ tel que

$$v(a_i) \geq \alpha(n - i) : \quad (*).$$

On définit :

$$\tilde{f}^{(\alpha)}(X) = \Sigma_{i=1}^n \pi_{\alpha(n-i)}(a_i) X^i,$$

lequel polynôme est appelé *reste résiduel d'ordre* α de $f(X)$.

Posons $\tilde{f}(X) = \prod_{i=1}^n (X - \pi_{v(x_i)}(x_i)) \in S[X]$. Où $x_1, \ldots.., x_n$ sont les racines de $f(X)$ dans Ω.
Remarquons que $\tilde{f}^{(\alpha)}(X)$ et $\tilde{f}(X)$ sont homogènes de grade $n\alpha$ dans $R[X]^{(\alpha)}$.

Exemple :
Soit p un entier premier, $F = \mathbb{Q}_p$ et v la valuation p-adique sur $\mathbb{Q}_p$.
$R = gr(\mathbb{Q}_p) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[T, T^{-1}]$ et $f(X) = p^4 + p^5 X + p^7 X^2 - 2pX^3 + X^4$.
Le polynôme $f(X)$ vérifie la condition $v(a_i) \geq (n - i)$ et

$$\tilde{f}^{(1)}(X) = T^4 - 2TX^3 + X^4 \in \mathbb{Q}_p[X].$$

De même que $f(X)$ vérifie la condition $v(a_i) \geq (n - i)\frac{1}{2}$ et

$$\tilde{f}^{(\frac{1}{2})}(X) = X^4.$$

2 Applications

Soit (F,v) est un corps valué hensélien, désignons par R son gradué associé $gr(F)$. Dans cette section montrons un énoncé renforçant le lemme de Hensel. Cet énoncé s'étend à tout polynôme $f(X)$ de $F[X]$ vérifiant la condition $(**)$ qui généralise l'hypothèse du lemme de Hensel : $f(X)$ est à coefficients dans l'anneau de valuation de F.

Lemme 2.1. *$f(X)=\Sigma_{i=0}^{n}a_iX^i$ est tel que*

$$v(a_i)\geq v(a_0)(1-\frac{i}{n}) \qquad : \qquad (**).$$

si et seulement si toutes les racines de $f(X)$ ont la même valuation.

Démonstration: Si $f(X)$ vérifie $(**)$, notons alors $x_1,\ \ldots\ ,x_n$ ses racines dans une clôture algébrique de F et ordonnons les $v_i=v(x_i)$ dans le sens croissant :
$v_1<v_2<\ \ldots\ <v_r$. Soit $I_j=\{x_i \mid v(x_i)=v_j\}$ et posons s_j le cardinal de I_j, on a alors $\Sigma s_j=n$.
$a_{n-s_1}=\Sigma_{i_1<\ldots<s_1}x_{i_1}\ldots x_{i_{s_1}}$, entraine que

$$v(a_{n-s_1})=v(\prod_{i\in I_1}x_i)=s_1v_1$$

car l'$\inf_{i_1<\ldots<s_1}v(x_{i_1}\ldots x_{i_{s_1}})$ est atteint en l'unique terme $\prod_{i\in I_1}x_i$ de $\Sigma x_{i_1}\ldots x_{i_{s_1}}$.
Du fait que $v(a_0)(\frac{n-(n-s_1)}{n})=v(a_0)\frac{s_1}{n}$ et de la condition $(**)$ du lemme on a

$$v_1\geq\frac{v(a_0)}{n}.$$

Donc s'il existe un des v_i différent de v_1, on aura :

$$v(a_0)=v(\Pi x_i)>v(a_0).$$

Inversement, supposons que les racines $x_1,\ldots,x_n$ de $f(X)$ ont la même valuation, alors cette valeur est $\frac{v(a_0)}{n}$. Or de $a_{n-r}=\Sigma x_{i_1}\ldots x_{i_r}$ on a bien

$$v(a_{n-r})\geq r\frac{v(a_0)}{n}.$$

∎

A remarquer qu'un polynôme à coefficients dans l'anneau de valuation de F vérifie $(**)$ si $v(a_0)=0$.

Corollaire 2.2. *Si $f(X)\in F[X]$ est unitaire et ne vérifie pas la condition $(**)$ alors $f(X)$ est réductible.*

Démonstration: En effet si $f(X)$ est irréductible alors toutes les racines de $f(X)$ ont la même valuation, puisque (F,v) est hensélien. Donc $f(X)$ doit vérifier $(**)$. ∎

Proposition 2.3. *Soit $f(X)=\Sigma_0^n a_iX^i\in F[X]$ vérifiant la condition $(**)$ et $\frac{v(a_0)}{n}$ est d'ordre n sur Γ_F. Alors $f(X)$ (resp. $\tilde{f}^{(\frac{v(a_0)}{n})}(X)$) est irréductible dans $F[X]$ (resp. dans $R[X]$).*

Démonstration: $f(X)$ vérifie la condition $(**)$ donc toutes les racines de $f(X)$ ont

$$\text{la même valuation (à savoir } \frac{v(a_0)}{n}) \text{ et } \tilde{f}^{(\frac{v(a_0)}{n})}(X) = \tilde{f}(X).$$

Si $f(X) = g(X)h(X)$ dans $F[X]$ (resp. si $\tilde{f}(X) = G(X)H(X)$ dans $R[X]$) et si r, le $\deg(h(X))$ ou le $\deg(g(X))$ (resp. le $\deg(H(X))$ ou le $\deg(G(X))$) est strictement plus petit que n alors r est l'ordre des valuations des racines de $f(X)$ (resp. de $\tilde{f}(X)$), absurde. ∎

Lemme 2.4. *Si $f(X)$ est tel que*

$$v(a_i) \geq v(a_0)(1 - \frac{i}{n}) \qquad (**),$$

Alors

$$\tilde{f}^{(\frac{v(a_0)}{n})}(X) = \tilde{f}(X) = \pi(X - \pi_{v(x_i)}(x_i)).$$

Démonstration: D'après le lemme précédent, les $v(x_i)$ sont tous égaux.
Notons cette valeur commune $\delta = \frac{v(a_o)}{n}$.
Posons :

$$\Pi(X - \pi_{v(x_i)}(x_i)) = \Sigma b_j X^j.$$

Alors,

$$b_j = \Sigma_{i_1 \Sigma i_{(n-j)}} \pi_\delta(x_{i_1}) \Sigma \pi_\delta(x_{i_{(n-j)}})$$

$$= \Sigma_{i_1 \Sigma i_{(n-j)}} \pi_{(n-j)\delta}(x_{i_1} \Sigma x_{i_{(n-j)}})$$

$$= \pi_{(\frac{n-j}{n})v(a_0)}(\Sigma_{i_1 \Sigma i_{n-j}} x_{i_1} \Sigma x_{i_{(n-j)}})$$

$$= \pi_{\frac{(n-j)v(a_0)}{n}}(a_j).$$

∎

Théorème 2.5. *(lemme du Hensel généralisé) Si $f(X)$ est tel que :*
– $v(a_i) \geq (\frac{n-i}{n})v(a_0)$: $(**)$
– $\tilde{f}^{(\frac{v(a_0)}{n})}(X) = g(X)h(X)$ *dans* $R[X]$ *et* $(g,h) = 1$.
Alors f(X) est réductible dans $F[X]$.

Démonstration: D'une part le lemme2.4 nous assure l'existence de deux racines t_1 et t_2 de $f(X)$ telles que :
– $\tilde{t_1} = \pi_{v(t_1)}(t_1) = \alpha$ est une racine de $g(X)$.
– $\tilde{t_2} = \pi_{v(t_2)}(t_2) = \beta$ est une racine de $h(X)$.
D'autre part, si $f(X)$ est irréductible dans $F[X]$ alors $F(t_1) \simeq F(t_2)$ par un F-isomorphisme σ qui transforme t_1 en t_2. L'isomorphisme σ induit un R-isomomorphisme $\tilde{\sigma}$ de $R[\alpha] \simeq R[\beta]$ par :

$$\tilde{\sigma}(\tilde{t_1}) = \tilde{t_2},$$

et prolongé par linéarité à $R[\alpha]$. Donc le polynôme minimal de α est annulé par β.
D'où $g(X)$ et $h(X)$ ne sont pas premiers entre eux. ∎

Exemple
Considérons la valuation p-adique de $\mathbb{Q}_p$, $(p \neq 2)$:
1) $f(X) = -3p^2 + p^3X - 2pX^2 + p^2X^3 + X^4$ alors $f(X)$ vérifie la condition $(**)$ qui n'est rien d'autre que $v(a_i) \geq \frac{(4-i)}{4}$.
$\tilde{f}(X) = \tilde{f}^{\frac{1}{2}}(X) = -3T^2 - 2TX^2 + X^4 = (X^2 - 3T)(X^2 + T)$. Donc $f(X)$ est réductible dans $\mathbb{Q}_p[X]$.
2) $f(X) = p^2 + p^5X - 2pX^2 + X^4$.
$\tilde{f}(X) = T^2 - 2TX + X^4 = (X^2 - T)^2$. Dans ce cas on ne peut pas conclure que $f(X)$ est réductible dans $\mathbb{Q}_p(X)$, vu que la décomposition n'est pas à facteurs premiers entre eux.

A remarquer aussi que si $v(a_0) = 0$, alors le théorème qu' on vient d'établir n'est rien d'autre que le lemme de Hensel. Mais si $v(a_0) \neq 0$ et si $f(X)$ vérifie $(**)$, alors le théorème ci-dessus peut s'appliquer et le lemme de Hensel est inappliquable, car même si $\tilde{f}(X) = bH(a^{-1}X^d)$ (d'après le théorème1.3) et si $H(X)$ se décompose en facteurs premiers entre eux dans $R_0[X]$. On ne peut pas affirmer que l'un des polynômes $P(X)$, de la forme $u^{-1}f((wX)^{\frac{1}{d}})$ avec $\tilde{u} = b$ et $\tilde{w} = a$, est dans $A_v[X]$ (où A_v est l'anneau de valuation de F), pour pouvoir écrire $\bar{P}(X) = H(X)$ et appliquer par la suite le lemme de Hensel. Regardons d'ailleurs l'exemple suivant :
considérons la valuation p-adique de $\mathbb{Q}_p$:
$f(X) = -3p^2 + p^3X - 2pX^2 + p^2X^3 + X^4$ alors $f(X)$ vérifie la condition $(**)$ qui n'est rien d'autre que $v(a_i) \geq \frac{(4-i)}{4}$.
$\tilde{f}(X) = -3T^2 - 2TX^2 + X^4 = (X^2 - 3T)(X^2 + T)$, $(p \neq 2)$.
Il est vrai que $\tilde{f}(X) = T^2H(T^{-1}X^2)$ avec $H(X) = X^2 - 2X - 3$, et que
$H(X) = X^2 - 2X - 3 = (X+1)(X-3)$. Donc les $Q(X) \in \mathbb{Z}_p[X]$ tel que $\tilde{Q}(X) = H(X)$ sont décomposable dans $\mathbb{Z}_p[X]$. Mais aucun des $P(X) = u^{-1}f((wX)^{\frac{1}{2}})$ avec $\tilde{u} = T^2$ et $\tilde{w} = T$ n'est dans $\mathbb{Z}_p[X]$.

Corollaire 2.6. *Soient K un corps valué hensélien et $f(X) \in K[X]$ tel que : $v(a_i) \geq (\frac{n-i}{n})v(a_0)$, et $\tilde{f}^{(\frac{v(a_0)}{n})}(X)$ a une racine simple α dans $R = gr(K)$. Alors $f(X)$ a une racine x dans K telle que $\tilde{x} = \alpha$.*

Démonstration: Notons $\tilde{f}(X) = \prod(X - \pi_{v(x_i)}(x_i))$. D'après le lemme2.4 on a :

$$\tilde{f}(X) = \tilde{f}^{(v(a_0))}(X).$$

Soit alors $P(X)$ un facteur irréductible de $f(X)$ tel que :

$$\tilde{P}(X) = (X - \alpha)g(X);$$

alors le lemme 3 montre que $P(X)$ est réductible, donc $P(X)$ est de degré un. ∎

Exemple
Soit $(p \neq 2)$ un entier premier, $K = \mathbb{Q}_p$ et v la valuation p-adique sur $\mathbb{Q}_p$.
Le gradué de K est $gr(K) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[T, T^{-1}]$ où T est une indéterminée égale à $\pi_1(p)$.
Soit $f(X) = p^4 + p^5X + p^7X^2 - 2pX^3 + X^4$, ce polynôme vérifie la condition $v(a_i) \geq (\frac{n-i}{n})v(a_0)$ et

$$\tilde{f}^{(\frac{v(a_0)}{4})}(X) = T^4 - 2TX^3 + X^4,$$

a une racine simple égale à T dans $gr(K)$.
Donc $f(X)$ a une racine x dans $\mathbb{Q}_p$ divisible par p et non divisible par p^2.

Références

[1] M. Boulagouaz *Corps gradué d'un corps valué*. Séminaire de Mathématique, Rapport n^o 194, 1991. Institut de Mathématique pure et appliquée Université Chatholique de Louvain, Belgique.

[2] M. Boulagouaz *The graded and tame extension.* Lecture note in pures and applied mathematics $n^0$153,M. Dekker Inc., New York, 1993.

[3] N.Bourbaki ; Algèbre(Chapitre 1 à 3), Masson, Paris (1964)

[4] O. Endler ;Valuation theory ; Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[5] M. Krasner ; Une généralisation de la notion de corps : le corpoïde.
Un corpoïde remarquable de la théorie des corps valués ; Comptes Rendus t.219 (1944), pp 345–347

[6] M.Krasner ;Théorie de Galois des corpoïdes commutatifs sans torsion et ses applications à la théorie de la ramification des extensions algébriques des corps valués, Université Pierre et Marie Curie,Paris (1976)

[7] O.F.G Schilling ; The Theory of Valuations ; Math. surveys 4, Amer. Math. Soc., Providence, R.I, 1950.

[8] Van Geel et F.Van Oystayen ; About graded fields, Indag. Math. 43(1981), 273-286.

Département de mathématique,
Faculté des Sciences et Techniques Fès-Saiss
B.P.2202 Route d'Imouzzar, Fès ; Maroc.