Fractions continues p-adiques et indépendance algébrique

Ali Kacha*

Résumé

Dans cet article, nous donnons des conditions suffisantes sur les quotients partiels de k nombres p-adiques $A_1, A_2, ...$ et A_k $(k \geq 2)$ pour que ces derniers soient algébriquement indépendants. La méthode utilisée est basée sur le théorème de Ridout [Rid] qui exprime une condition suffisante de transcendance de nombres p-adiques.

Abstract

In this article, we give sufficient conditions on the p-adic continued fractions $A_1, A_2, ...$ and A_k $(k \geq 2)$ which ensure the algebraic independence of these numbers. We use Ridout's theorem which gives sufficient condition for transcendence of the p-adic numbers.

1 Introduction.

En utilisant les fractions continues dans le cas réel, Mahler [Mal] a établi un algorithme géométrique des fractions continues p-adiques pour l'utiliser dans l'approximation rationnelle de nombres p-adiques. En 1970, Th. Schneider [Dea] a développé cet algorithme de telle sorte que l'on puisse donner le développement de toute fraction

*Ce travail a été effectué à l'Université Moulay Ismail, Faculté des Sciences de Meknès Département de Mathématiques B.P 4010, Meknès, MAROC.

Received by the editors June 1997.

Communicated by J. Van Geel.

1991 *Mathematics Subject Classification :* 11A55, 11Y55, 11J70.

Key words and phrases : Fraction continue, p-adique, transcendance, indépendance algébrique.

continue p-adique.

Soient p un nombre premier fixé, Q_p le complété de Q pour la valeur absolue p-adique, Z_p l'anneau des entiers de Q_p et C_p le complété de la clôture algébrique de Q_p.

Dans [Bun],P. Bundschuh a construit des exemples de couples de nombres réels algébriquement indépendants en utilisant le critère d'indépendance algébrique d'Alain Durand [Dur]. Dans [Kac], nous avons généralisé ce résultat de Bundschuh et nous avons construit un nombre fini quelconque de nombres réels algébriquement indépendants en utilisant le théorème de Roth [Rot] pour la transcendance, nous y avons de même étendu l'indépendance algébrique de deux nombres à Q_p.

Dans le présent article, nous proposons la construction d'un nombre fini quelconque d'éléments de Q_p algébriquement indépendants. La méthode utilisée est basée sur le théorème de Ridout [Rid]qui donne une condition suffisante de transcendance des nombres p-adiques.

Nous donnons par la suite l'algorithme défini par W.Liansciang [Lia 1] qui donne d'une façon plus simple que celles de Mahler et de Schneider le développement en fraction continue p-adique de tout nombre p-adique.

Définition de l'algorithme
Soit ξ un nombre p-adique de Q_p, d'après le développement de Hensel, ξ peut être représenté d'une façon unique comme suit

$$\xi = c_{-\alpha}p^{-\alpha} + ... + c_{-1}p^{-1} + c_0 + c_1 p + c_2 p^2 + ...$$

avec $\alpha \geq 0$, $0 \leq c_i \leq p-1$ pour tout $i \geq -\alpha$.

On définit la partie entière p-adique du nombre ξ qu'on note par $[\xi]_p$ par

$$[\xi]_p = c_{-\alpha}p^{-\alpha} + ... + c_{-1}p^{-1} + c_0$$

si $[\xi]_p \neq \xi$, en littérature, la partie entière est aussi utilisée pour

$c_{-\alpha}p^{-\alpha} + ... + c_{-1}p^{-1}$ (sans la constante c_0.)

Soit $a_0 = [\xi]_p$ si $[\xi]_p \neq \xi$, on écrit ξ sous la forme $\xi = \xi_0 = a_0 + \frac{1}{\xi_1}$ avec $|\xi_1|_p \geq p$, où $| .|_p$ est la valeur absolue p-adique de ξ_1. Pour qu'il n'ait pas de confusion, on notera $| . |$ la valeur absolue usuelle.

Plus précisement,

$$\xi_1 = a_{1,-\alpha_1}p^{-\alpha_1} + ... + a_{1,-1}p^{-1} + a_{1,0} + a_{1,1}p + a_{1,2}p^2 + ...$$

avec $a_{1,-\alpha_1} \neq 0, \alpha_1 \geq 1$, on pose $a_1 = [\xi_1]_p$.

A ce point, on procède comme pour les nombres réels, en posant

$$\xi_0 = \xi,\ \ a_k = [\xi_k]_p \ \text{ et } \ \xi_{k+1} = \frac{1}{\xi_k - a_k} \ \text{ pour } \ k \geq 1.$$

Alors a_k est un rationnel tel que $0 < a_k < p$ et on a

$|\xi_k|_p = |a_k|_p = p^{\alpha_k}$ et $|\xi_{k+1}|_p \geq p$.

D'après ce qui précède, ξ peut s'écrire sous la forme $\xi = [a_0; a_1, a_2, ..., a_{n-1}, \xi_n]$.

Remarque
a) Le processus précèdent est illimité si et seulement si $\xi \notin Q$ et dans ce cas le développement de ξ est dit une fraction continue p-adique simple infinie. Par conséquent, on a

$$\xi = \lim_{n\to+\infty} [a_0; a_1, a_2, ..., a_n], (\text{ voir [Bed] pour les détails}).$$

b) Si le processus précèdent s'arrête au bout d'un certain rang n, alors $\xi_n = a_n$ et ξ est dit une fraction continue p-adique simple finie.

Si on regarde $a_0, a_1, a_2, ...$ comme des variables, on définit les polynômes p_n, q_n pour tout $n \geq 1$ par les relations de récurrence suivantes :

$$\begin{cases} p_{-2} = 0 & p_{-1} = 1 \\ q_{-2} = 1 & q_{-1} = 0 \end{cases} \ \text{et}\ \begin{cases} p_n = a_n\ p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_n = a_n\ q_{n-1} + q_{n-2} \end{cases}, \ \text{pour} \ \ n \geq 0 \qquad (1)$$

On vérifie que p_n et q_n sont des polynômes en $a_0, a_1, ..., a_n$ avec des coefficients égaux à 1 et que

$$[a_0; a_1, a_2, ..., a_n] = \frac{p_n}{q_n} \ \text{ pour } \ \text{tout } n \geq 0.$$

En considérant $a_0, a_1, a_2, ...$ comme des fractions p-adiques, soit $\dfrac{P_n}{Q_n} = [a_0; a_1, a_2, ..., a_n]$ avec P_n, Q_n des entiers premiers entre eux. Donc l'une au moins des deux égalités suivantes est vérifiée

$$(P_n, p) = 1, (Q_n, p) = 1,$$

où la notation (P_n, p) désigne le plus grand commun diviseur de P_n et p.

Définition
Le nombre rationnel P_n/Q_n est appelé la nième convergente du développement en fraction continue p-adique de ξ.

Pour la preuve de transcendance des nombres p-adiques (éléments de Q_p) qu'on considère dans cet article, on utilise le théorème de Ridout que nous rappelons ici. C'est une généralisation du théorème de Thue-Siegel-Roth.

Théorème de Ridout.[Rid]
Soit δ un réel > 2 et ξ un élément de Q_p. Si l'inégalité $|Q\xi - P|_p \leq \max(|P|, |Q|)^{-\delta}$ admet une infinité de solutions $P, Q \in Z, Q \geq 1$ avec P et Q premiers entre eux, alors ξ est un nombre p-adique transcendant.

2 Résultat fondamental

Dans ce paragraphe, nous exprimons le résultat fondamental où nous donnons des conditions suffisantes sur les quotients partiels $a_{n,j}$ pour $j \in \{1, 2, ..., k\}$ pour que les fractions continues p-adiques qu'ils définissent $A_1, A_2, ..., A_k$ avec $k \geq 2$ soient algébriquement indépendantes.

2.1 Notations et propriétés

a) Soient $A_1, A_2, ..., A_k \in Q_p \setminus Q$ et ayant pour développement en fraction continue p-adique (simple) les expressions suivantes :

$$A_1 = [a_{0,1}; a_{1,1}, ..., a_{n,1}, ...], ... \text{ et } A_k = [a_{0,k}; a_{1,k}, ..., a_{n,k}, ...]$$

Pour $j \in \{1, 2, ..., k\}$ et pour tout $n \geq 1$ les $a_{n,j}$ sont des rationnels tels que

$$\begin{cases} 0 \leq a_{0,j} < p \\ 0 < a_{n,j} < p \end{cases}$$

Pour tout $j \in \{1, 2, ..., k\}$, on pose $\dfrac{p_{n,j}}{q_{n,j}} = [a_{0,1}; a_{1,j}, ..., a_{n,j}]$ où $p_{n,j}$ et $q_{n,j}$ sont définies de la même manière que dans les relations (1), donc $\dfrac{p_{n,j}}{q_{n,j}}$ est une fraction réduite.

b) Précisons qu'inversement, une suite de a_n définit un élément $A \in Q_p$ dont elle est la suite des quotients partiels dans le développement en fraction continue p-adique. Soient $A = [a_0; a_1, a_2, ...]$ la fraction continue p-adique associée à la suite (a_n) et $\dfrac{P_n}{Q_n} = [a_0; a_1, a_2, ..., a_n]$ sa réduite d'ordre n. On pose aussi $\xi_n = [0; a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, ...]$.

Lemme 1. Avec les mêmes notations que pour b) ci-dessus, soit $A \in Q_p \setminus Q$, alors on a
i)

$$|p_n|_p = \begin{cases} |a_0 a_1 ... a_n|_p \text{ si } a_0 \neq 0 \\ |a_2 ... a_n|_p \text{ et } |p_1|_p = 1 \text{ si } a_0 = 0 \end{cases}$$

ii)

$$|q_n|_p = |a_1 a_2 ... a_n|_p.$$

iii)

$$A - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n(q_n\xi_{n+1} + q_{n-1})}.$$

iv)

$$|A - \frac{P_n}{Q_n}|_p = \frac{1}{|q_n q_{n+1}|_p}.$$

Preuve. Les égalités i) et ii) se démontrent par récurrence, voir [Lia 1].
iii) et iv) mêmes preuves que dans [Sch].

Lemme 2. Les notations sont toujours les mêmes, soient A un élément de $Q_p \setminus Q$ et p un nombre premier. Alors, on a

i) $0 < p_n \leq (p+1)^{n+1}$, pour tout $n \geq 1$.

ii) $0 < q_n \leq (p+1)^n$, pour tout $n \geq 1$.

Preuve. En utilisant les définitions de p_n et q_n ainsi que les relations (1) du paragraphe I) on prouve facilement les inégalités i) et ii).

2.2 Résultat principal

On reprend les notations de 1) a) ci-dessus.

Théorème. *Soient $A_1, A_2, ..., A_k$ des éléments de Q_p, r un nombre réel > 1 et α un réel > 2. Si $r^{-1}|a_{n,j}|_p > |a_{n,j-1}|_p$ pour $j \in \{1, 2, ..., k\}$ et $|a_{n,1}|_p > |a_{n-1,k}|_p^{\alpha}$ pour n suffisamment grand, alors, pour tout polynôme non nul $P \in Z[X_1, ..., X_n]$ tel que $d = deg_{X_1}P + ... + deg_{X_k}P < \frac{\alpha}{2}$, le nombre p-adique $P(A_1, A_2, ..., A_n)$ est transcendant.*

Remarque. Notons que sous les conditions du théorème, les nombres p-adiques $A_1, A_2, ..., A_k$ sont transcendants. Donc le résultat du théorème contient celui de [Lia 2].

Corollaire. *Soient r un nombre réel > 1 et $(\beta_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels > 2 et qui tend vers $+\infty$. Si $r^{-1}|a_{n,j}|_p > |a_{n,j-1}|_p$ pour $j \in \{2, ..., k\}$ et $|a_{n,1}|_p > |a_{n-1,k}|_p^{\beta_{n-1}}$ pour tout $n \geq 1$, alors, les nombres p-adiques $A_1, A_2, ..., A_k$ sont algébriquement indépendants.*

Avant de donner la preuve du théorème du résultat principal, nous énonçons le lemme 3 ainsi que quelques notations.

Soient P un polynôme non nul de $Z[X_1, ..., X_k]$, posons $P = \sum B_{i_1 i_2 \ldots i_k} X_1^{i_1} \ldots X_k^{i_k}$,

avec $deg_{X_j} P \leq d_j$ pour $j \in \{1, 2, ..., k\}$.
Pour $j \in \{1, 2, ..., k\}$, on pose aussi $A_{n,j} = \dfrac{p_{n,j}}{q_{n,j}} = [a_{0,j}, , a_{1,j}, ..., a_{n,j}]$.
Soit $\dfrac{P_n}{Q_n}$ la fraction suivante :

$$P(A_{n,1}, ..., A_{n,k}) = \frac{1}{(q_{n,1})^{d_1} ... (q_{n,k})^{d_k}} \sum B_{i_1 ... i_k} (p_{n,1})^{i_1} (q_{n,1})^{d_1 - i_1} ... (p_{n,k})^{i_k} (q_{n,k})^{d_k - i_k}. \tag{2}$$

L'egalité se lit en séparant numérateur et dénominateur

$$p_n = \sum B_{i_1 i_2 ... i_k} (p_{n,1})^{i_1} (q_{n,1})^{d_1 - i_1} ... (p_{n,k})^{i_k} (q_{n,k})^{d_k - i_k}$$

et $q_n = (q_{n,1})^{d_1} ... (q_{n,k})^{d_k}$.

D'après le lemme 1, il existe une constante $C_1 = C(a_{0,1}, a_{0,2}, ..., a_{0,k}) > 0$ telle que

$$\max\, (|p_n|_p, |q_n|_p) \leq C_1 \prod_{j=1}^{k} |a_{1j} a_{2,j} ... a_{n,j}|_p^{d_j}. \tag{3}$$

Enfin, pour $n \geq 1$, posons

$$P_n^{'} = p_n \max\, (|p_n|_p, |q_n|_p), Q_n^{'} = q_n \max\, (|p_n|_p, |q_n|_p)$$

et

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_n^{'}}{Q_n^{'}} \quad \text{avec} \quad Q_n \in Z, Q_n > 0 \quad \text{telle que} \quad (P_n, Q_n) = 1.$$

Par conséquent, $(Q_n, p) = 1$ et $|Q_n|_p = 1$.

Lemme 3. Avec les notations ci-dessus, on a :
i) S'il existe un réel $r > 1$ et un entier $n_0 \geq 1$ tels que pour $j \in \{2, ..., k\}$ et pour tout $n \geq n_0$, $r^{-1}|a_{n,j}|_p > |a_{n,j-1}|_p$, alors pour n suffisamment grand,

$$|q_{n,j}|_p > r^n |q_{n,1}|_p.$$

ii) Soit α un réel > 2, si $|a_{n,k}|_p > |a_{n-1,k}|_p^{\alpha}$ pour tout $n \geq n_1$, alors il existe une constante $C_2 = C(\alpha, n_1) > 0$ telle que, pour n suffisamment grand, on a

$$|q_{n,k}|_p^{\alpha - 1} < C_2 |a_{n,k}|_p^{\alpha}.$$

iii) Il existe une constante $C_3 = C(p, P) > 0$ qui dépend du nombre premier p et du polynôme P telle que

$$\max\, (|P_n|, Q_n) \leq \max\, (|P_n^{'}|, Q_n^{'}) \leq C_3 (p+1)^{n(d_1 + ... + d_k)} \prod_{j=1}^{k} |a_{1,j} ... a_{n,j}|_p^{d_j}.$$

iv) Si $|a_{n,j}|_p > |a_{n,j-1}|_p$, pour $j \in \{1, 2, ..., k\}$ et pour tout $n \geq n_2$, alors il existe une constante $C_4 = C(a_{0,1} a_{0,2}, ..., a_{0,k}, n_2, P) > 0$ telle que

$$|Q_n P(A_1, ..., A_k) - P_n|_p \leq C_4 |a_{1,1} ... a_{n,1}|_p^{-1} |a_{1,1} ... a_{n+1,1}|_p^{-1}, \text{pour } n \text{ assez grand.}$$

Preuve du lemme 3.
ı) C'est la même que dans le cas réel, voir [Bun].
ii) On la prouve de la même manière que dans le cas réel, voir lemme 2.5 de [Kac].
iii) D'après les définitions de $P_n, Q_n, P_n^{'}$ et $Q_n^{'}$, on a

$$\max\ (|P_n|, Q_n) \leq\ \max\ (|P_n^{'}|, Q_n^{'}) \leq\ \max\ (|p_n|, |q_n|)\ \max\ (|p_n|_p, |q_n|_p).$$

En utilisant la relation (2), il existe alors une constante $C_4 = C(P) > 0$ telle que

$$\max\ (|p_n|, |q_n| \leq C_4 \prod_{j=1}^{k} (\ \max\ (|p_{n,j}|, |q_{n,j}|))^{d_j} \tag{4}$$

En vertu du lemme 2, il existe une constante $C_5 = C(p, P) > 0$ telle que

$$\max\ (|p_n|, |q_n| \leq C_5 (p+1)^{n(d_1+...+d_k)} \tag{5}$$

A partir de (3) et (5), on déduit le résultat.
iv) On sait que

$$|Q_n P(A_1, ..., A_k) - P_n|_p = |Q_n|_p |P(A_1, ..., A_k) - P_n/Q_n|_p = |P(A_1, ..., A_k) - P(A_{n,1}, ..., A_{n,k})|_p,$$

donc il existe une constante $C_6 = C(a_{0,1}, a_{0,2}, ..., a_{0,k}, P) > 0$ qui vérifie

$$|Q_n P(A_1, ..., A_k) - P_n|_p \leq C_6\ \max\ |A_j - A_{n,j}|_p = C_6 |A_1 - A_{n,1}|_p.$$

D'après le lemme 1, on a

$$|A_1 - A_{n,1}|_p = \frac{1}{|q_{n,1} q_{n+1,1}|_p} = |a_{1,1} ... a_{n,1}|_p^{-1} |a_{1,1} ... a_{n+1,1}|_p^{-1}.$$

ce qui achève la preuve du lemme 3.
Preuve du théorème.
a) Nous allons montrer tout d'abord que pour tout polynôme $P \in Z[X_1, ..., X_k]$, de degré total d vérifiant $d < \alpha/2$, on a $P(A_1, ..., A_k) \neq 0$.

On suppose qu'il existe un polynôme non nul $P \in Z[X_1, ..., X_k]$, de degré total et minimal $d < \alpha/2$, tel que $P(A_1, ..., A_k) = 0$. En exprimant P en série de Taylor en $A_1, A_2, ..., A_k$, on obtient

$$P(x_1, ..., x_k) - P(A_1, ..., A_k) = \sum_{\nu_1+...+\nu_k \geq 1} B_{(\nu)} (x_1 - A_1)^{\nu_1} ... (x_k - A_k)^{\nu_k} \tag{6}$$

avec $\nu = (\nu_1, ..., \nu_k)$.
Pour $i = 1, 2, ..., k$, soit $B_i = B_{(\nu)}$ où la ième coordonnée contient 1 et des zéros ailleurs. En utilisant le fait que le degré de P est minimal, on aura fercément

$$B_1 = B(1, 0, ..., 0) = \frac{\partial P}{\partial x_1}(A_1, ..., A_k) \neq 0.$$

Par la suite nous prenons $x_1 = A_{n,1}, x_2 = A_{n,2}, ...,$ et $x_k = A_{n,k}$ dans la relation (6), ce qui donne

$$P(A_{n,1}, ..., A_{n,k}) = (A_{n,1} - A_1)\{B_1 + B_2 \frac{A_{n,2} - A_2}{A_{n,1} - A_1} + ... + B_k \frac{A_{n,k} - A_k}{A_{n,1} - A_1} + o(|A_{n,1} - A_1|)\}. \tag{7}$$

Remarque

1) Le choix de $B_1 \neq 0$ et celui de $(A_{n,1} - A_1)$ en facteur dans la relation (7) provient du fait que $|A_{n,1} - A_1|$ est le maximum des $|A_{n,j} - A_j|$ pour $j \in \{1, 2, ..., k\}$.
2) Pour $j \in \{1, 2, ..., k\}$, d'aprŝ le 1) du lemme 3, on a

$$|\frac{A_j - A_{n,j}}{A_1 - A_{n,1}}|_p = |\frac{q_{n,1}q_{n+1,1}}{q_{n,j}q_{n+1,j}}|_p < r^{-(2n+1)}$$

qui tend vers zéro quand n tend vers l'infini, de plus le fait que $A_{n,1} - A_1 \neq 0$ implique que $P(A_{n,1}, A_{n,2}, ..., A_{n,k}) \neq 0$ pour n assez grand.

Comme $P(A_{n,1}, A_{n,2}, ..., A_{n,k}) \neq 0$, il existe alors une constante $E_n \in Z_p$, telle que

$$|P(A_1, ..., A_k) - P(A_{n,1}, ..., A_{n,k})|_p = \frac{|E_n|_p}{|q_{n,1}^{d_1} ... q_{n,k}^{d_k}|_p}. \tag{8}$$

Puisque $E_n \in Z_p$ donc il existe $k_0 \in Z$ telle que $|E_n|_p = p^{k_0}$.

De plus, on sait qu'il existe une constante $C_6 = C(P, A_1, ..., A_k) > 0$ telle que

$$|P(A_1, ..., A_k) - P(A_{n,1}, ..., A_{n,k})|_p \leq C_6 |A_1 - A_{n,1}|_p. \tag{9}$$

D'après les relations (8) et (9), on obtient

$$\frac{p^{k_0}}{|q_{n,1}^{d_1} ... q_{n,k}^{d_k}|_p} \leq C_6 |A_1 - A_{n,1}|_p. \tag{10}$$

Par ailleurs, d'après l'hypothŝe $|a_{n+1,1}|_p > |a_{n,k}|_p$, on a

$$|A_1 - A_{n,1}|_p = \frac{1}{|q_{n,1}q_{n+1,1}|_p} < \frac{1}{|a_{n+1,1}|_p} < \frac{1}{|a_{n,k}|_p^{\alpha}}. \tag{11}$$

En utilisant le fait que $|a_{n,k}|_p > |a_{n,j}|_p$ et le ii) du lemme 3, on trouve

$$|a_{n,k}|_p^{\alpha} > C_7 |q_{n,k}|_p^{\alpha - 1} \ \text{ et } \ |q_{n,k}|_p > |q_{n,j}|_p \ \text{ pour n assez grand} \tag{12}$$

En se servant des inégalités (11) et (12), la relation (10) devient

$$|q_{n,k}|_p^{\alpha - 1} < C_8 |q_{n,k}|_p^d,$$

pour n assez grand.

Ce qui implique que $\alpha - 1 < d$, et contredit l'hypothèse du théorème $d < \alpha/2$.
Par conséquent, $P(A_1, ..., A_k) \neq 0$ pour tout polynôme non nul $P \in Z[X_1, ..., X_k]$ de degré total $d < \alpha/2$.

b) Maintenant,on va montrer que $P(A_1, ..., A_k)$ est transcendant.

La suite $P(A_{n,1}, ..., A_{n,k})$ n'est pas stationnaire, la preuve est identique à celle qu'on vient de voir pour prouver que $P(A_1, ..., A_k) \neq 0$.

D'après le lemme 3, on a

$$\max\,(|P_n|, Q_n) \leq C_1(p+1)^{dn} \prod_{j=1}^{k} |a_{1,j}a_{2,j}...a_{n,j}|_p^{d_j}. \tag{13}$$

Puisque $|a_{n,j}|_p < |a_{n,k}|_p$ et que $d_1 + ... + d_k = d$, alors (13) devient

$$(\max\,(|P_n|, Q_n))^{\alpha/d} \leq C_9(p+1)^{\alpha n}|a_{1,k}...a_{n,k}|_p^{\alpha}. \tag{14}$$

Par ailleurs, $|a_{n,1}|_p > |a_{n-1,1}|_p^{\alpha}$ pour tout $n \geq 1$ et $|a_{1,1}|_p \geq p$, donc

$$|a_{n,1}|_p > p^{\alpha^{n-1}} \geq (p+1)^{\alpha(n-1)} \quad \text{pour tout} \quad n \geq 1. \tag{15}$$

Par conséquent, la relation (14) devient

$$(\max\,(|P_n|, Q_n))^{\alpha/d} \leq C_9|a_{1,k}...a_{n,k}|_p^{\alpha}|a_{n,1}|_p. \tag{16}$$

On utilise encore le fait que $|a_{i,k}|_p^{\alpha}| < a_{i+1,1}|_p$ pour tout $i \in \{1, ..., n-1\}$, on trouve

$$(\max\,(|P_n|, Q_n))^{\alpha/d} \leq C_9|a_{2,1}...a_{n+1,1}|_p|a_{n,1}|_p. \tag{17}$$

Puisque, pour tout $i \in \{1, ..., n-1\}$ on a $|a_{i,1}|_p \geq 1$, alors

$$(\max\,(|P_n|, Q_n))^{\alpha/d} \leq C_9|a_{1,1}...a_{n+1,1}|_p|a_{1,1}...a_{n,1}|_p. \tag{18}$$

Par ailleurs, le iv) du lemme 3 nous permet d'avoir

$$|Q_nP(A_1, ..., A_k) - P_n|_p \leq C_1|a_{1,1}...a_{n+1,1}|_p^{-1}|a_{1,1}...a_{n,1}|_p^{-1}. \tag{19}$$

Finalement, en utilisant (18) et (19), on trouve

$$|Q_nP(A_1, ..., A_k) - P_n|_p \leq C_{10}(\max\,(|P_n|, Q_n))^{-\frac{\alpha}{d}},$$

pour n suffisamment grand.

Comme $\frac{\alpha}{d} > 2$, le théorème de Ridout nous permet de conclure.

Preuve du corollaire

Puisque la suite $(\beta_n)_{n\geq 1}$ tend vers $+\infty$, alors l'hypothèse du théorème $d < \frac{\alpha}{2}$ est vérifiée pour tout polynôme $P \in Z[X_1, ..., X_k]$, ce qui prouve que les nombres p-adiques $A_1, A_2, ..., A_k$ sont algébriquement indépendants.

Références

[Bed] E.BEDOCCHI - Nota sulle frazioni continue p-adiche, Ann. Mat. Pura. Appl. 152. (1988), p.197-207

[Bun] P. BUNDSCHUH - Transcendental continued fractions, Journal of Number Theory no 18, 1984, p 91-98.

[Dea] A. DEANIN - Periodicity of p-adic continued fraction expansions, Journal of Number Theory, vol 23,number 3 (1986), p. 367-387.

[Dur] A. DURAND - Indépendance algébrique de nombres complexes et critère de transcendance, Compositio Math no 36, (1977), p. 259-267.

[Kac] A.KACHA - Approximations algébriques de fractions continues, Thèse de Doctorat d'Université, Spécialité : Mathématiques, 1993,Université de Caen,France.

[Lia 1] W. LIANSCIANG - p-adic continued fraction (I), Scientia Sinica (Serie A), vol 28, no 10, octobre 1985, p. 1009-1017.

[Lia 2] W. LIANSCIANG - p-adic continued fraction (I), Scientia Sinica (Serie A), vol 28, no 10, octobre 1985, p. 1018-1028.

[Mal] K. MAHLER - On a geometrical representation of p-adic numbers, Ann. of Math 41(1940), p. 8-56.

[Rid] D. RIDOUT - The p-adic generalisation of the Thue-Siegel-Roth théoème, Mathematika 5 (1958) part 1,9 ; p.40-48.

[Rot] K.F. ROTH - Rational approximations to algebraic numbers, Mathematika 1955, vol 12, p. 1-20.

[Sch] W.M. SCHMIDT - Diophantine approximation, Lecture notes in Math.,785, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1980.

Ali Kacha
Université Moulay Ismail,
Faculté des Sciences et Techniques,
Département de Mathématiques
B.P 509, Errachidia, MAROC.