Unicité de la topologie de Jordan-Fréchet

Mustapha Laayouni*

Abstract

In this paper we will prove that each algebra homomorphism from a unitary Jordan-Fréchet algebra onto a unitary semi-simple Jordan-Fréchet algebra is automatically continuous. As a consequence, the uniqueness of the Fréchet topology on unitary semi-simple Jordan-Fréchet algebra follows. A spectral characterization of the radical in a complex unitary Jordan-Fréchet algebra is given.

Introduction

Dans ce papier on montre que tout homomorphisme surjectif d'une algèbre de Jordan-Fréchet unitaire sur une algèbre de Jordan-Fréchet unitaire semi-simple est automatiquement continu (théorème 2). Il s'ensuit que la topologie de Jordan-Fréchet est unique sur une algèbre de Jordan-Fréchet unitaire semi-simple (corollaire 1). Pour une algèbre de Fréchet associative et commutative, ce résultat est connu. On le généralise au cas non commutatif. La preuve développée est une adaptation de la preuve courte de Ransford pour le théorème de Johnson classique [**11**]. Une caractérisation spectrale du radical dans le cas Fréchet est donnée.

---

*Ce travail est réalisé en collaboration avec le département de Mathématiques de la Faculté des Sciences de Meknes.

Received by the editors February 1999 - In revised form : July 1999.

Communicated by F. Bastin.

1991 *Mathematics Subject Classification :* 46H, 17A.

Key words and phrases : Algèbre de Jordan, semi-normes, topologie de Fréchet, radical.

1 Préliminaires

Soit J une algèbre sur le corps des nombres complexes. J est une algèbre de Jordan si le produit non nécessairement associatif vérifie :

i) $\forall a, b \in J$, $ab = ba$.

ii)$\forall a, b \in J$, $a^2(ba) = (a^2b)a$.

C'est le cas par exemple du produit de Jordan $\ll \circ \gg$ défini comme suit : soit A une C-algèbre associative. A^+ dénote l'espace vectoriel A muni du produit de Jordan : $aob = \frac{1}{2}(ab + ba)$. A^+ est une algèbre de Jordan. Toute algèbre isomorphe à une sous-algèbre de A^+ est dite algèbre de Jordan spéciale. Dans le cas contraire on parle d'algèbre de Jordan exceptionnelle.

Dans toute la suite J désigne une algèbre de Jordan unitaire sur le corps des nombres complexes. Tout élément a de J définit les opérateurs R_a et U_a de J par :

$$R_a(x) = ax \quad \text{et} \quad U_a = 2(R_a)^2 - R_{a^2}.$$

On dit qu'un élément a de J est inversible s'il existe b dans J tel que $ab = 1$ et $a^2b = a$, ce qui est équivalent à l'appartenance de l'unité de J à l'image de l'opérateur U_a **, [3].** Dans **[6]** McCrimmon a défini le radical de J qu'on note $Rad(J)$. Si $Rad(J) = \{0\}$ on dit que J est semi-simple.

On dit que J est une algèbre de Jordan-Fréchet si J est munie d'une topologie métrisable complète définie par une suite croissante de semi-normes $\left(\|.\|_p\right)_{p\geq 1}$ sous-multiplicatives (ie. $\|ab\|_p \leq \|a\|_p \|b\|_p$, $\forall a, b \in J$).

Pour tout $p \geq 1$, $N_p = \left\{a \in J \mid \|a\|_p = 0\right\}$ est un idéal de J et le quotient $J\,/N_p$ est une algèbre de Jordan normée par la norme :

$$\|a + N_p\| = \inf\left\{\|a + t\|_p \mid t \in N_p\right\}.$$

On pose $J_p = J/N_p$ et $\overline{J_p}$ son complété. La surjection canonique de J sur J_p est notée π_p . $\pi_p(1)$ est une unité de J_p et $\overline{J_p}$, $\forall p \geq 1$.

La suite des semi-normes étant croissante (ie. $\|a\|_i \leq \|a\|_j$, $\forall i \leq j$, $\forall a \in J$) donc $\forall x, y \in J$, $\forall i \leq j$, $\pi_j(x) = \pi_j(y) \Longrightarrow \pi_i(x) = \pi_i(y)$. On peut donc définir l'application $\pi_{ij} : J_j \longrightarrow J_i$par $\pi_{ij}\left(\pi_j(x)\right) = \pi_i(x)$, $\forall j \geq i$. Il est clair que π_{ij} est un homomorphisme continu, donc on peut le prolonger par continuité en un homomorphime $\overline{\pi_{ij}}$ de $\overline{J_j}$ dans $\overline{J_i}$. Considérons le produit cartésien $\Pi_{p\geq 1}\,\overline{J_p}$ et $\overline{\pi_i}$ la projection de $\Pi_{p\geq 1}\,\overline{J_p}$ sur $\overline{J_i}$. Alors l'ensemble :

$$LP(J) = \left\{x \in \Pi_{p\geq 1}\,\overline{J_p} \mid \overline{\pi_{ij}}(\overline{\pi_j}(x)) = \overline{\pi_i}(x)\,,\, \forall j \geq i\right\},$$

est une sous-algèbre de $\Pi_{p\geq 1}\,\overline{J_p}$.

L'application canonique $\phi : J \longrightarrow \Pi_{p\geq 1}\,\overline{J_p}$ définie par : $\phi(x) = \left(\pi_p(x)\right)_{p\geq 1}$ est un homomorphisme injectif de J dans $\Pi_{p\geq 1}\,\overline{J_p}$ qui permet d'identifier J et $\phi(J)$. Ainsi pour tout x de J et pour tout $i \geq 1$, $\pi_i(x) = \overline{\pi_i}(x)$. Le théorème 5.1, page 17 de **[7]** reste valable pour une algèbre de Jordan :

Proposition 1 : *En gardant les notations précédentes on a :*

i) $J = LP(J)$.

ii) Si $x_i \in \overline{J_i}$, $\forall i \geq 1$ *et si* $\overline{\pi_{ij}}(x_j) = x_i$, $\forall j \geq i$ *alors il existe* $x \in J$ *tel que :* $\overline{\pi_i}(x) = x_i$, $\forall i \geq 1$.

La preuve de la proposition suivante est identique à celle du théorème 5.2 page 18 de [**7**] **:**

Proposition 2 : *Soient* $\left(J\,,(\|..\|_p)_{p\geq 1}\right)$ *une algèbre de Jordan-Fréchet unitaire et x un élément de* J. *Alors : x est inversible dans* J *si et seulement si,* $\overline{\pi_i}(x)$ *est inversible dans* $\overline{J_i}$ *pour tout* $i \geq 1$.

Contrairement aux algèbres de Jordan-Banach, l'ensemble des éléments inversibles d'une algèbre de Jordan-Fréchet J n'est pas en général un ouvert.

Définitions : *Soient* $\left(J\,,\,(\|..\|_p)_{p\geq 1}\right)$ *une algèbre de Jordan-Fréchet unitaire et* x *un élément de* J.

1) On appelle spectre de x *dans* J *l'ensemble des nombres complexes* λ *tels que* $x - \lambda$ *ne soit pas inversible dans* J. *Cet ensemble est noté* $Sp_J(x)$.

2) Pour tout $p \geq 1$, *on pose* $\rho_p(x) = \inf\left\{ \left(\|x^n\|_p\right)^{\frac{1}{n}}\ ,\ n \geq 1\right\}$*(alors* $\rho_p(x) \leq \|x\|_p$*).*

3) $\rho(x) = \sup\{\rho_p(x)\ ,\ p \geq 1\}$ *qui est un élément de* $[0, +\infty]$. *Si pour tout* y *de* J, $\rho(y)$ *est fini on dit que* J *est à spectre ponctuel borné.*

Avec ces notations on a :

Proposition 3 :

i) $Sp_J(x) = \cup_{p\geq 1}\ Sp_{\overline{J_p}}\left(\overline{\pi_p}(x)\right)$.

ii) $\rho(x) = \sup_{p\geq 1}\ \rho_{\overline{J_p}}\left(\overline{\pi_p}(x)\right) = \sup_{p\geq 1}\ \lim_{n\longrightarrow +\infty}\left(\|x^n\|_p^{\frac{1}{n}}\right)$.

Preuve :

Soit λ un nombre complexe :

$$\begin{aligned}\lambda \in Sp_J(x) &\Longleftrightarrow x - \lambda \text{ non inversible dans } J\\ &\Longleftrightarrow \exists p \geq 1 \text{ tel que } \overline{\pi_p}(x-\lambda) \text{ non inversible dans } \overline{J_p}\\ &\Longleftrightarrow \exists p \geq 1 \text{ tel que } \lambda \in Sp_{\overline{J_p}}\left(\overline{\pi_p}(x)\right).\end{aligned}$$

ii) La première égalité découle de (i), la deuxième est déduite de la définition du rayon spectral dans les algèbres de Jordan-Banach $\overline{J_p}$, [**5**]**.**

Proposition 4 : *Soit* $\left(J\,,\ (\|..\|_p)_{p\geq 1}\right)$ *une algèbre de Jordan-Fréchet unitaire. Avec les notations précédentes on a :* $Rad(J) = \cap_{p\geq 1}\ \overline{\pi_p}^{-1}\left(Rad(\overline{J_p})\right)$.

Preuve :

Soit $p \geq 1$, $Rad(J)$ étant un idéal quasi-inversible de J (voir [**6**]) et $\overline{\pi_p}$ homomorphisme d'algèbre donc $\overline{\pi_p}\,(Rad(J))$ est un idéal quasi-inversible de $\overline{J_p}$, donc

$\overline{\pi_p}(Rad(J)) \subset Rad(\overline{J_p})$ donc $Rad(J) \subset \overline{\pi_p}^{-1}\left(Rad(\overline{J_p})\right)$, $\forall p \geq 1$, d'où l'inclusion directe.

Inversement pour tout $p \geq 1$, $Rad(\overline{J_p})$ est un idéal de J.
D'où $\cap_{p\geq 1} \overline{\pi_p}^{-1}\left(Rad(\overline{J_p})\right)$ est un idéal de J.

Soit $x \in \cap_{p\geq 1} \overline{\pi_p}^{-1}\left(Rad(\overline{J_p})\right)$. $\forall p \geq 1$, $\overline{\pi_p}(x) \in Rad(\overline{J_p})$, donc $\overline{\pi_p}(1-x)$ est inversible dans $\overline{J_p}$. Par suite $1-x$ est inversible dans J et $\cap_{p\geq 1} \overline{\pi_p}^{-1}\left(Rad(\overline{J_p})\right)$ est un idéal quasi-inversible dans J. Par définition de $Rad(J)$ on a donc $\cap_{p\geq 1} \overline{\pi_p}^{-1}\left(Rad(\overline{J_p})\right)$ est contenu dans $Rad(J)$.

En utilisant cette propriété et le corollaire 1, page 34 de [**2**] on obtient :

Théorème 1 : *Soit* $\left(J\,,\,(\|..\|_p)_{p\geq 1}\right)$ *une algèbre de Jordan-Fréchet unitaire. Alors* $Rad(J) = \{a \in J \mid \forall x \in J,\ \rho\,(U_x(a)) = 0\}$.

Preuve : Soit $a \in J$:

$$\begin{aligned} a \in Rad(J) &\Longleftrightarrow \forall p \geq 1,\ a \in \overline{\pi_p}^{-1}\left(Rad(\overline{J_p})\right) \\ &\Longleftrightarrow \forall p \geq 1,\ \pi_p(a) = \overline{\pi_p}(a) \in Rad(\overline{J_p}) \\ &\Longleftrightarrow \forall p \geq 1,\ \forall \xi_p \in \overline{J_p},\ \rho_p\left(U_{\xi_p}(\pi_p(a)\right) = 0 \quad ([\mathbf{2}] \text{ corollaire 1, p.34}). \end{aligned}$$

Donc $a \in Rad(J) \Longleftrightarrow \forall p \geq 1,\ \forall \xi_p \in \overline{J_p}\,,\ \rho_p\left(U_{\xi_p}(\pi_p(a))\right) = 0.$ (E)

Supposons que $a \in Rad(J)$.

D'après l'équivalence (E) on a : $\forall p \geq 1,\ \forall \xi_p \in \overline{J_p}\,,\ \rho_p\left(U_{\xi_p}(\pi_p(a))\right) = 0.$
Soit $y \in J$, l'élément $\xi_p = \pi_p(y)$ de $\overline{J_p}$ vérifie donc $\rho_p\left(U_{\pi_p(y)}(\pi_p(a))\right) = 0$, donc $\rho_p\left[\pi_p\left(U_y(a)\right)\right] = 0$. D'où $\rho\left(U_y(a)\right) = 0$.

Inversement, soit $a \in J$ tel que $\rho\left(U_y(a)\right) = 0,\ \forall y \in J$. Alors pour tout scalaire non nul λ, $U_y(a) - \lambda$ est inversible dans J. $\forall p \geq 1$, $\pi_p\left(U_y(a) - \lambda\right)$ est inversible dans $\overline{J_p}$. D'où $U_{\pi_p(y)}\left(\pi_p(a)\right) - \lambda$ est inversible dans $\overline{J_p}$, $\forall \lambda \neq 0$. Considérons l'application $\psi_p : J_p \longrightarrow \overline{J_p}$ définie par $\psi_p(y) = U_{\pi_p(y)}\left(\pi_p(a)\right) - \lambda$. ψ_p est continue sur J_p, soit $\overline{\psi_p}$ son prolongement par continuité à $\overline{J_p}$. On a : $\overline{\psi_p}(\xi_p) = U_{\xi_p}\left(\pi_p(a)\right) - \lambda\,,\ \forall \xi_p \in \overline{J_p}$.

Si $Inv(\overline{J_p})$ dénote l'ensemble des éléments inversibles dans l'algèbre de Jordan-Banach $\overline{J_p}$ alors $\overline{\psi_p}^{-1}\left(Inv(\overline{J_p})\right)$ est un ouvert de $\overline{J_p}$ qui contient J_p. Comme J_p est dense dans $\overline{J_p}$, donc $\overline{J_p} \subset \overline{\psi_p}^{-1}\left(Inv(\overline{J_p})\right)$. D'où $\forall \xi_p \in \overline{J_p}$, $U_{\xi_p}\left(\pi_p(a)\right) - \lambda$ est inversible dans $\overline{J_p}$ ($\forall \lambda \neq 0$). Donc $\rho_p\left(U_{\xi_p}(\pi_p(a)\right) = 0$, $\forall \xi_p \in \overline{J_p}$. De l'équivalence (E), on déduit que $a \in Rad(J)$.

Remarque : Soit $\left(A\,,\,(\|..\|_p)_{p\geq 1}\right)$ une algèbre de Fréchet associative unitaire sur le coprs des nombres complexes. Alors l'algèbre de Jordan spéciale $J = A^+$ est une algèbre unitaire de Jordan-Fréchet pour la topologie définie par la suite des semi-normes $\left(\|\,.\,\|_p\right)_{p\geq 1}$. Dans [**6**] McCrimmon a montré que $Rad(A) = Rad(A^+)$. Donc on a :

Corollaire : *Soit* $\left(A,\,(\|..\|_p)_{p\geq 1}\right)$ *une algèbre de Fréchet unitaire et associative sur le corps des nombres complexes. Alors* $Rad(A) = \{a \in A \;/\; \forall x \in A,\ \rho(xax) = 0\}$. *Si de plus* A *est commutative alors* $Rad(A) = \{a \in A \,/\, \forall x \in A,\ \rho(x^2a) = 0\}$.

Le lemme suivant est une forme dans le cas d'une algèbre de Jordan-Fréchet du lemme de Ransford pour une algèbre de Banach (Lemma 2, [**11**]) :

Lemme : *Soient* $\left(J, (\|..\|_p)_{p\geq 1}\right)$ *une algèbre de Jordan-Fréchet unitaire et* $Q(z)$ *un polynôme en* z *(complexe) à coefficients dans* J*. Alors pour tout* $R > 0$ *et pour tout* $p \geq 1$ *on a :* $\rho_p\left(Q(1)\right)^2 \leq \sup_{|z|=R}\,\rho_p\left(Q(z)\right)\sup_{|z|=\frac{1}{R}}\,\rho_p\left(Q(z)\right).$

Preuve :

Soient $p \geq 1$ et $R > 0$. D'après l'extension du théorème de Hahn-Banach aux semi-normes (corollaire 2, page 29, **[12]**) il existe une forme linéaire ϕ de J (qui dépend de p) telle que $|\phi(x)| \leq \|x\|_p$, $\forall x \in J$ et $|\phi\left(Q(1)\right)| = \|Q(1)\|_p$. On pose $q(z) = \phi\left(Q(z)\right) = \sum_{k=0}^{k=d}\beta_k z^k$, où d est le degré du polynôme $Q(z)$. Alors :

$$\begin{aligned}
\|Q(1)\|_p^2 &= |\phi\left(Q(1)\right)|^2 \\
&= \left|\sum_{k=0}^{k=d}\beta_k\right|^2 \\
&\leq \sum_{k=0}^{k=d}(|\beta_k|\,R^k)(|\beta_k|\,R^{-k}) \\
&\leq (d+1)\left(\sum_{k=0}^{k=d}|\beta_k|^2\,R^{2k}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=0}^{k=d}|\beta_k|^2\,R^{-2k}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq (d+1)\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\phi\left(Q(R\,e^{it})\right)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\phi\left(Q(R^{-1}e^{it})\right)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq (d+1)\sup_{|z|=R}\|Q(z)\|_p\sup_{|z|=\frac{1}{R}}\|Q(z)\|_p.
\end{aligned}$$

Donc $\|Q(1)\|_p^2 \leq (d+1)\sup_{|z|=R}\|Q(z)\|_p\sup_{|z|=\frac{1}{R}}\|Q(z)\|_p$.

En remplaçant $Q(z)$ par $Q(z)^m$ qui est de degré md, on obtient :

$$\|Q(1)^m\|_p^2 \leq (md+1)\sup_{|z|=R}\|Q(z)^m\|_p\sup_{|z|=\frac{1}{R}}\|Q(z)^m\|_p.$$

En prenant la racine $m^{ième}$ des deux membres de cette inégalité et en faisant tendre m vers l'infini on obtient l'inégalité du lemme.

Théorème 2 : *Soient* $\left(J, (\|..\|_p)_{p\geq 1}\right)$ *et* $\left(J', (\|.\|'_p)_{p\geq 1}\right)$ *deux algèbres de Jordan-Fréchet unitaires. Si le radical de* J' *est nul alors tout homomorphisme* θ *surjectif de* J *sur* J' *est automatiquement continu.*

Preuve :

Soit $S(\theta) = \{b \in J' \;/\; \exists (a_n) \subset J \text{ avec } (a_n) \longrightarrow 0 \text{ et } (\theta(a_n)) \longrightarrow b\}$ l'espace séparant de θ. D'après le théorème du graphe fermé, θ est continu si et seulement si, $S(\theta) = \{0\}$.

Soit $b \in S(\theta)$. Il existe a dans J tel que $\theta(a) = b$ et il existe une suite d'éléments de J, $(a_n)_{n\geq 0}$ qui converge vers zéro telle que $(\theta(a_n)_{n\geq 1})$ converge vers b.

Pour tout $m \geq 1$, on pose $Q_m(z) = z\theta(a_m) + (\theta(a) - \theta(a_m))$ qui est un polynôme en z à coefficients dans J'. Pour tout $p \geq 1$ on a :

$$\begin{aligned}
\text{i) } \rho'_p\left(Q_m(z)\right) &= \rho'_p\left(\theta(za_m + a - a_m)\right) \\
&\leq \sup_{q\geq 1}\rho'_q\left(\theta(za_m + a - a_m\right) = \rho'\left(\theta(za_m + a - a_m)\right) \\
&\leq \rho\left(za_m + (a - a_m)\right) \ \text{(car } \theta \text{ est un homomorphisme d'algèbres).}
\end{aligned}$$

Par définition, $\rho\left(za_m + (a - a_m)\right) = \sup_{q\geq 1} \rho_q\left(za_m + (a - a_m)\right)$. Il existe donc $q \geq 1$ tel que :

$$\begin{aligned}\rho'(Q_m(z)) &\leq \rho_q(za_m + (a - a_m)) + 1\\ &\leq \|za_m + (a - a_m)\|_q + 1\\ &\leq |z|\|a_m\|_q + \|a - a_m\|_q + 1.\end{aligned}$$

Or $\lim_{m\to+\infty}\left(\|a_m\|_q\right) = 0$ et $\lim_{m\to+\infty}\left(\|a - a_m\|_q\right) = \|a\|_q$, donc il existe $M_q > 0$ tel que :

$$\rho'_p\left(Q_m(z)\right) \leq |z|\left\|a_k\right\|_q + \left\|a - a_k\right\|_q + M_q\ ,\ \forall k \geq 1. \qquad \text{(I)}$$

ii) $\rho'_p\left(Q_m(z)\right) = \rho'_p\left(\theta(za_m + a - a_m)\right) \leq \left\|z\theta(a_m) + (\theta(a) - \theta(a_m))\right\|'_p$.

Donc $\rho'_p\left(Q_m(z)\right) \leq |z|\left\|\theta(a_m)\right\|'_p + \left\|\theta(a) - \theta(a_m)\right\|'_p$. (II)

En combinant les relations (I) et (II) avec le lemme on obtient :

$\rho'_p(b)^2 = \rho'_p\left(Q_m(1)\right)^2 \leq \sup_{|z|=R} \rho'_p\left(Q_m(z)\right) \sup_{|z|=\frac{1}{R}} \rho'_p\left(Q_m(z)\right)$

$\leq \left[R\left\|a_k\right\|_q + \left\|a - a_k\right\|_q + M_q\right]\left[R^{-1}\left\|\theta(a_m)\right\|'_p + \left\|\theta(a) - \theta(a_m)\right\|'_p\right]\ ,\ \forall k \geq 1.$

En faisant tendre k vers $+\infty$ puis m vers $+\infty$ et enfin R vers $+\infty$ on obtient : $\rho'(b) = 0$.

Donc $\rho'(b) = 0\,,\ \forall b \in S(\theta)$. (III)

Soit b' un élément de J', il existe un a' dans J tel $\theta(a') = b'$. La suite $\left(U_{a'}(a_n)\right)_{n\geq 1}$ tend vers zéro dans J et $\left(\theta(U_{a'}(a_n))\right)_{n\geq 1}$ converge vers $U_{b'}(b)$ (car $\theta\left(U_{a'}(a_n)\right) = U_{\theta(a')}\left(\theta(a_n)\right)$ et l'application $x \longmapsto U_{b'}(x)$ est continue sur J'). Donc $U_{b'}(b) \in S(\theta)$. D'après (III), $\rho'\left(U_{b'}(b)\right) = 0$ et le théorème 1 implique que $b \in Rad(J')$. Donc $b = 0$ et $S(\theta) = \{0\}$.

Corollaire 1 : *Soit* $\left(J, (\|.\|_p)_{p\geq 1}\right)$ *une algèbre de Jordan-Fréchet unitaire sur le corps des nombres complexes telle que* $Rad(J) = \{0\}$. *Alors toutes les topologies de Fréchet sur* J *sont équivalentes.*

Au cas où $J = A^+$ est une algèbre de Jordan spéciale on obtient :

Corollaire 2 : *Soit* $\left(A, (\|.\|_p)_{p\geq 1}\right)$ *une algèbre de Fréchet associative semi-simple (non nécessairement commutative). Alors toutes les topologies de Fréchet sur* A *sont équivalentes.*

Acknowledgements : The author would like to express his gratitude to the referee for his precise comments.

Références

[1] B. Aupetit : *The uniqueness of the complete norm topology in Banach and Jordan-Banach algebras.* J. Funct. Anal., 1982, p.1-6.

[2] B. Aupetit : *Spectral characterization of the radical in Banach and Jordan-Banach algebras.* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 114, 1993, p.31-35.

[3] N. Jacobson : *Structure and representation of Jordan algebras.* Amer. Math. Soc. Coll. Publ. 39, Providence R.I., 1968.

[4] B. E. Johnson : *The uniqueness of the (complete) norm topology.* Bull. Amer. Math. Soc., 73, 1967, p.537-539.

[5] J. Martinez Moreno : *Sobre algebras de Jordan normadas completas.* Tesis Doctoral, Universidad de Granada, 1977.

[6] K. McCrimmon : *A characterization of the radical of a Jordan algebra.* J. Algebra, 18, 1971, p.103-111.

[7] E. A. Michael : *Locally multiplicatively-convex topological algebras.* Mem. Amer. Math. Soc. 11, 1952.

[8] A. Rodriguez Palacios : *The uniqueness of the complete norm topology in complete normed nonassociative algebras.* J. Funct. Anal., 60, 1985, p.1-15.

[9] A. Rodriguez Palacios : *Automatic continuity with application to C*-algebras.* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. ,107, 1990, p.345-347.

[10] A. Rodriguez Palacios : *An approach to Jordan-Banach algebras from the theory of nonassociative complete normed algebras.* Ann. Sci. Univ. Clermont-Ferrand II. Série Math. Fas. 27, 1991, p.1-57.

[11] T. J. Ransford : *A short proof of Johnson's uniqueness-of-norm theorem.* Bull. London Math. Soc. 21, 1989, p.487-488.

[12] A. P. Robertson and Wendy Robertson : *Topological vector spaces.* Cambridge Universty Press, 1964.

[13] K. A. Zhevlakov, M. Slin'ko, J. P. Shestakov and A. I. Shirshov : *Rings that are nearly associative.* Academic Press, New York, 1982.

Départ. de Math.
Université My Ismail,
F.S.T. Errachidia, Maroc.