Régularité globale et estimation *a priori* pour des opérateurs elliptiques sur des espaces de Sobolev à poids

Najib Benkirane

1 Introduction et résultats

La théorie des opérateurs elliptiques sur des espaces de Sobolev avec poids construits à partir des espaces L^p a été introduite par L. Nirenberg et H. Walker [NW] et développée dans de nombreux travaux. Citons en particulier ceux de M. Cantor $[C_1]$, $[C_2]$, R. McOwen $[Mc_1]$, $[Mc_2]$, R. Lockhart [L], Y. Choquet-Bruhat et D. Christodoulou [CBC], M. Murata [Mu], R. Bartnik [B], J. Leed et T. Parker [LP] ...

On s'intéresse ici à des estimations L^p obtenues dans [NW] pour des opérateurs différentiels elliptiques dans $\mathbb{R}^n$ vérifiant des hypothèses de régularité pondérée à l'infini. Le but de ce travail est d'établir un théorème de régularité globale avec estimation *a priori* relativement à des espaces de Sobolev avec poids. En utilisant une technique de "*scaling*" on obtient en particulier une autre démonstration des estimations L^p type Nirenberg et Walker pour des opérateurs dont les coefficients satisfont des hypothèses plus faibles. Cette technique est utilisée par Pierre Bolley et Pham The Lai [BP] dans le cadre des espaces de Hölder avec poids.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, l un entier ≥ 0 et p un nombre réel tel que $1 \leq p \leq \infty$. L'espace de Sobolev classique $W^{p,l}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions $u \in L^p(\Omega)$ telles que :

$$||u||_{W^{p,l}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq l} \|\partial^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \quad \text{si} \quad 1 \leq p < \infty$$

Received by the editors January 2000.
Communicated by J. Mawhin.

$$||u||_{W^{\infty,l}(\Omega)} = \max_{|\alpha|\leq l} \|\partial^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty.$$

Pour a un nombre réel et $1 \leq p \leq \infty$ nous noterons $W_a^{p,l}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions $W_{loc}^{p,l}(\mathbb{R}^n)$ telles que :

$$||u||_{W_a^{p,l}(\mathbb{R}^n)} = \sum_{|\alpha|\leq l} \left\| < x >^{a+|\alpha|} \partial^\alpha u \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \infty$$

où $< x >= (1 + |x|^2)$, pour $l = 0$ nous noterons $L_a^p(\mathbb{R}^n)$ l'espace $W_a^{p,0}(\mathbb{R}^n)$.
Ces espaces de Sobolev avec poids sont des espaces de Banach relativement à cette norme.

Rappelons d'abord le résultat de Nirenberg et Walker [NW] :

Théorème [NW] . *Soit a et p des nombres réels avec $1 < p < \infty$. Considérons l'opérateur différentiel elliptique dans $\mathbb{R}^n$ d'ordre $m \geq 1$ de la forme :*

$$A = A_\infty + \sum_{|\alpha|\leq m} b_\alpha(x)\, \partial^\alpha$$

où A_∞ est un opérateur différentiel homogène d'ordre m à coefficients constants, et les coefficients b_α satisfont les conditions suivantes :

(i) lorsque $|\alpha| = m$ il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\lim_{|x|\to\infty} \sup |b_\alpha(x)| < \delta;$$

(ii) pour $|\alpha| < m$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x|^{m-|\alpha|} |b_\alpha(x)| < \infty.$$

Si δ est suffisament petit alors il existe une constante C telle que pour tout $u \in W^{p,m}(\mathbb{R}^n)$ avec $< . >^{m+a} Au$ et $< . >^a u$ dans l'espace $L^p(\mathbb{R}^n)$ on ait l'estimation :

$$\sum_{|\alpha|\leq m} \left\| < x >^{|\alpha|+a} \partial^\alpha u \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \left\{ \| < x >^{m+a} Au\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \| < x >^a u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right\}.$$

Le résultat principal de ce travail est :

Théorème 1. *Soit a et p des nombres réels avec $1 < p < \infty$, l un entier ≥ 0* et *A un opérateur différentiel d'ordre $m \geq 1$ dans $\mathbb{R}^n$ de la forme :*

$$A = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\, \partial^\alpha$$

à coefficients a_α dans $W_{m-|\alpha|}^{\infty,l}(\mathbb{R}^n)$ pour $|\alpha| \leq m$, et uniformément elliptique dans le sens qu'il existe une constante $\Theta > 0$ telle que pour tous x et ξ dans $\mathbb{R}^n$

$$\left| \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\, \xi^\alpha \right| \geq \Theta\, |\xi|^m.$$

Alors :

i) Si $u \in W_{loc}^{p,l+m}(\mathbb{R}^n) \cap L_a^p(\mathbb{R}^n)$ et si $Au \in W_{a+m}^{p,l}(\mathbb{R}^n)$ alors $u \in W_a^{p,l+m}(\mathbb{R}^n)$

ii) Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in W_a^{p,l+m}(\mathbb{R}^n)$:

$$\|u\|_{W_a^{p,l+m}(\mathbb{R}^n)} \leq C \left\{ \|Au\|_{W_{a+m}^{p,l}(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{L_a^p(\mathbb{R}^n)} \right\}.$$

2 Résultats préliminaires

Pour a un nombre réel et x_0 un point fixé de $\mathbb{R}^n$ on définit la transformation affine T_{x_0} sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$T_{x_0}(x) = \frac{x-x_0}{<x_0>}.$$

A toute fonction u sur $\mathbb{R}^n$ nous associons la fonction $T_{x_0,a}(u)$ définie pour tout $z \in \mathbb{R}^n$ par :

$$(T_{x_0,a}(u))(z) = < x_0 >^a u(< x_0 > z + x_0),$$

de manière que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on ait :

$$(T_{x_0,a}(u))(T_{x_0}(x)) = < x_0 >^a u(x).$$

Pour ρ et p des nombres réels tels que $0 < \rho < 1 < p < \infty$ et l un entier ≥ 0, nous introduisons l'espace $W^{p,l}_{a,\rho}(\mathbb{R}^n)$ des fonctions $u \in W^{p,l}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ telles que

$$\|u\|_{W^{p,l}_{a,\rho}(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|T_{x_0,a}(u)\|^p_{W^{p,l}(B_\rho)} dx_0\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

où B_ρ est la boule $\{x \in \mathbb{R}^n; |x| < \rho\}$.

Dans ce qui suit nous faisons constamment le changement de variables

$$z \to y = < x_0 > z + x_0$$

où x_0 est un point fixé de $\mathbb{R}^n$, et nous noterons :

$$M_a := \sup\left(\left(\frac{1}{\rho+2}\right)^a, \left(\frac{2}{1-\rho}\right)^a\right)$$
$$m_a := \inf\left(\left(\frac{1}{\rho+2}\right)^a, \left(\frac{2}{1-\rho}\right)^a\right).$$

L'image de B_ρ par cette transformation étant la boule $B(x_0, \rho < x_0 >)$ de centre x_0 et de rayon $\rho < x_0 >$ telle que pour a et ρ des nombres réel avec $0 < \rho < 1$ on ait :

$$m_a < y >^a \leq < x_0 >^a \leq M_a < y >^a$$

pour tout $y \in B(x_0, \rho < x_0 >)$. Ces estimations découlent du fait que pour $y = < x_0 > z + x_0$ avec $z \in B_\rho$ on a :

$$< y > \leq 1 + |y| \leq \rho < x_0 > + |x_0| + 1 \leq (\rho + 2) < x_0 >$$
$$2 < y > \geq |y| + 1 \geq |x_0| - \rho < x_0 > +1 \geq (1-\rho) < x_0 >.$$

• Concernant l'espace $W^{p,l}_{a,\rho}(\mathbb{R}^n)$ nous avons :

Lemme 2.1. *Soit $a, p, \rho \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \rho < 1 < p < \infty$ et l un entier ≥ 0. Alors*

i) l'espace $W^{p,l}_{a,\rho}(\mathbb{R}^n)$ coincide avec $W^{p,l}_a(\mathbb{R}^n)$

ii) $\|.\|_{W^{p,l}_{a,\rho}(\mathbb{R}^n)}$ et $\|.\|_{W^{p,l}_a(\mathbb{R}^n)}$ sont des normes équivalentes de $W^{p,l}_a(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. Grâce à l'équivalence des normes sur l'espace $W^{p,l}_a(\mathbb{R}^n)$ il suffit de montrer que $\|.\|_{W^{p,l}_{a,\rho}(\mathbb{R}^n)}$ est une norme équivalente :

$$\|u\|^{\#}_{W^{p,l}_a(\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq l} \left\|< . >^{a+|\alpha|} \partial^\alpha u\right\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

• Montrons d'abord qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in W_a^{p,l}(\mathbb{R}^n)$ on ait

$$\|u\|_{W_{a,\rho}^{p,l}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|^{\#}_{W_a^{p,l}(\mathbb{R}^n)}.$$

Cela revient à montrer que pour $|\alpha| \leq l$ il existe une constante $C_\alpha > 0$ telle que pour tout $u \in W_a^{p,l}(\mathbb{R}^n)$ on ait :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|\partial^\alpha (T_{x_0,a}(u))\|^p_{L^p(B_\rho)} dx_0 \leq C_\alpha \left\|< . >^{a+|\alpha|} \partial^\alpha u\right\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

En effet, pour $u \in W_a^{p,l}(\mathbb{R}^n)$ on a :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|\partial^\alpha (T_{x_0,a}(u))\|^p_{L^p(B_\rho)} dx_0 = \int_{\mathbb{R}^n} < x_0 >^{(a+|\alpha|)p-n} \left(\int_{B(x_0,\rho<x_0>)} |\partial^\alpha u(y)|^p dy\right) dx_0.$$

En posant $b = a + |\alpha|$, $v = \partial^\alpha u$ on a :

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} \|\partial^\alpha (T_{x_0,a}(u))\|^p_{L^p(B_\rho)} dx_0 \\
&\quad\leq (M_b)^p \int_{\mathbb{R}^n} \left|< y >^b v(y)\right|^p \left(\int_{B(x_0,\rho<x_0>)} < x_0 >^{-n} dx_0\right) dy \\
&\quad\leq (M_b)^p \int_{\mathbb{R}^n} \left|< y >^b v(y)\right|^p \left(\int_{\frac{<y>}{\rho+2}\leq<x_0>\leq\frac{2<y>}{1-\rho}} < x_0 >^{-n} dx_0\right) dy \\
&\quad\leq (M_b)^p \int_{\mathbb{R}^n} \left|< y >^b v(y)\right|^p \left(\tfrac{<y>}{\rho+2}\right)^{-n} \left(\int_{|x_0|\leq\frac{2<y>}{1-\rho}} dx_0\right) dy \\
&\quad\leq \left(M_{a+|\alpha|}\right)^p \left(\tfrac{4(\rho+2)}{1-\rho}\right)^n \left\|< . >^{a+|\alpha|} \partial^\alpha u\right\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

• Inversement, montrons qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in W_a^{p,l}(\mathbb{R}^n)$ on ait

$$\|u\|^{\#}_{W_a^{p,l}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W_{a,\rho}^{p,l}(\mathbb{R}^n)}.$$

Pour cela il suffit de montrer que pour $|\alpha| \leq l$ il existe une constante $C_\alpha > 0$ telle que pour tout $u \in W_a^{p,l}(\mathbb{R}^n)$ on ait

$$\left\|< . >^{a+|\alpha|} \partial^\alpha u\right\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_\alpha \int_{\mathbb{R}^n} \|\partial^\alpha (T_{x_0,a}(u))\|^p_{L^p(B_\rho)} dx_0.$$

En effet, posant $b = a + |\alpha|$, $v = \partial^\alpha u$ il vient que pour tout $u \in W_a^{p,l}(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} \|\partial^\alpha (T_{x_0,a}(u))\|^p_{L^p(B_\rho)} dx_0 \\
&\quad= \int_{\mathbb{R}^n} \left\|T_{x_0,a+|\alpha|}(\partial^\alpha u)\right\|^p_{L^p(B_\rho)} dx_0 \\
&\quad\geq (m_b)^p \int_{\mathbb{R}^n} \left|< y >^b v(y)\right|^p \left(\int_{B(x_0,\rho<x_0>)} < x_0 >^{-n} dx_0\right) dy \\
&\quad\geq (m_b)^p \int_{\mathbb{R}^n} \left|< y >^b v(y)\right|^p \left(\int_{|x_0-y|\leq\frac{\rho}{\rho+2}<y>} < x_0 >^{-n} dx_0\right) dy \\
&\quad\geq (m_b)^p \left(\tfrac{2}{1-\rho}\right)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \left|< y >^b v(y)\right|^p < y >^{-n} \left(\int_{B\left(y,\frac{\rho}{\rho+2}<y>\right)} dx_0\right) dy \\
&\quad\geq \left(m_{a+|\alpha|}\right)^p \left(\tfrac{2}{1-\rho}\right)^{-n} \left(\tfrac{\rho}{\rho+2}\right)^n \left\|< . >^{a+|\alpha|} \partial^\alpha u\right\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

■

Soit maintenant A un opérateur différentiel d'ordre $m \geq 1$ dans $\mathbb{R}^n$ de la forme

$$A = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x)\, \partial^\alpha.$$

Si x_0 est un point fixé de $\mathbb{R}^n$ et u une fonction assez régulière alors pour tout $z \in B_\rho$ on a:

$$\begin{aligned}
&(T_{x_0,a+m}(Au))(z) \\
&\quad = \sum_{|\alpha| \leq m} < x_0 >^{a+m} (a_\alpha \partial^\alpha u)(< x_0 > z + x_0) \\
&\quad = \sum_{|\alpha| \leq m} \left[< x_0 >^{m-|\alpha|} a_\alpha (< x_0 > z + x_0) \right] \partial^\alpha \left(< x_0 >^a u(< x_0 > z + x_0) \right) \\
&\quad = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \left[T_{x_0,m-|\alpha|}(a_\alpha) \right] \partial^\alpha (T_{x_0,a}(u)) \right)(z).
\end{aligned}$$

Considérons alors l'opérateur auxiliaire :

$$\begin{aligned}
A_{x_0} &= \sum_{|\alpha| \leq m} \left[T_{x_0,m-|\alpha|}(a_\alpha) \right] \partial^\alpha \\
A_{x_0}(T_{x_0,a}(u)) &= T_{x_0,a+m}(Au)
\end{aligned}$$

dont la régularité des coefficients se déduit du résultat suivant :

Lemme 2.2. *Soit* a, p et ρ *des nombres réels tels que* $0 < \rho < 1 < p < \infty$, l *un entier* ≥ 0 et $x_0 \in \mathbb{R}^n$. *Alors il existe une constante* C *indépendante de* x_0 *telle que :*

i) *pour tout* $f \in W_a^{p,l}(\mathbb{R}^n)$

$$\| T_{x_0,a}(f) \|_{W^{p,l}(B_\rho)} \leq C \| f \|_{W_a^{p,l}(\mathbb{R}^n)},$$

ii) pour tout $f \in W_a^{\infty,l}(\mathbb{R}^n)$

$$\| T_{x_0,a}(f) \|_{W^{\infty,l}(B_\rho)} \leq C \| f \|_{W_a^{\infty,l}(\mathbb{R}^n)}.$$

Démonstration. Avec les notations précédentes nous avons d'une part :

$i)$ pour tout $f \in W_a^{p,l}(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned}
\| T_{x_0,a}(f) \|^p_{W^{p,l}(B_\rho)} &= \sum_{|\alpha| \leq l} \int_{B_\rho} \left| \partial^\alpha \left[< x_0 >^a f(< x_0 > z + x_0) \right] \right|^p dz \\
&= \sum_{|\alpha| \leq l} < x_0 >^{p(a+|\alpha|)} \int_{B_\rho} \left| (\partial^\alpha f)(< x_0 > z + x_0) \right|^p dz \\
&\leq < x_0 >^{-n} \sum_{|\alpha| \leq l} \left(M_{a+|\alpha|} \right)^p \int_{B(x_0,\rho < x_0 >)} \left| < y >^{a+|\alpha|} \partial^\alpha f(y) \right|^p dy \\
&\leq < x_0 >^{-n} \left(\sup_{|\alpha| \leq l} \left(M_{a+|\alpha|} \right) \right)^p \sum_{|\alpha| \leq l} \left\| < . >^{a+|\alpha|} \partial^\alpha f \right\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \left(\sup_{|\alpha| \leq l} \left(M_{a+|\alpha|} \right) \right)^p \| f \|^p_{W_a^{p,l}(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

$ii)$ D'autre part, pour tout $f \in W_a^{\infty,l}(\mathbb{R}^n)$ on a :

$$\begin{aligned}
\|T_{x_0,a}(f)\|_{W^{\infty,l}(B_\rho)} &= \max_{|\alpha|\le l}\left(\sup_{z\in B_\rho}\left|\partial^\alpha\left[< x_0 >^a f\left(< x_0 > z + x_0\right)\right]\right|\right)\\
&= \max_{|\alpha|\le l}\left(\sup_{y\in B(x_0,\rho<x_0>)} < x_0 >^{a+|\alpha|}\left|\left(\partial^\alpha f\right)(y)\right|\right)\\
&\le \max_{|\alpha|\le l}\left(M_{a+|\alpha|}\sup_{y\in B(x_0,\rho<x_0>)} < y >^{a+|\alpha|}\left|\left(\partial^\alpha f\right)(y)\right|\right)\\
&\le \left(\sup_{|\alpha|\le l}\left(M_{a+|\alpha|}\right)\right)\max_{|\alpha|\le l}\left\|< . >^{a+|\alpha|}\left(\partial^\alpha f\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\\
&\le \left(\sup_{|\alpha|\le l}\left(M_{a+|\alpha|}\right)\right)\|f\|_{W_a^{\infty,l}(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

■

3 Démonstration du théorème 1

• Pour ρ un nombre réel tel que $0 < \rho < 1$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$ l'opérateur A_{x_0} est uniformément elliptique dans la boule B_ρ avec une constante d'ellipticité indépendante de x_0 (et de ρ) car le symbole principal de A_{x_0} :

$$\sigma\left(A_{x_0}\right)(z,\xi) = \sum_{|\alpha|=m}\left[T_{x_0,0}\left(a_\alpha\right)\right](z)\,\xi^\alpha$$

est tel que pour tout $z \in B_\rho$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
\left|\sigma\left(A_{x_0}\right)(z,\xi)\right| &= \left|\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha\left(< x_0 > z + x_0\right)\xi^\alpha\right|\\
&\ge \Theta\left|\xi\right|^m
\end{aligned}$$

où Θ est la constante d'ellipticité de l'opérateur A.

• Comme l'opérateur A est à coefficients a_α dans $W_{m-|\alpha|}^{\infty,l}(\mathbb{R}^n)$ pour $|\alpha| \le m$ nous déduisons du lemme 2.2 que l'opérateur auxiliaire A_{x_0} est à coefficients $T_{x_0,m-|\alpha|}\left(a_\alpha\right)$ dans $W^{\infty,l}\left(B_\rho\right)$ pour $|\alpha| \le m$ et définit donc un opérateur borné de $W^{p,l+m}\left(B_\rho\right)$ dans $W^{p,l}\left(B_\rho\right)$. De plus il existe une constante C indépendante de x_0 telle que pour tout $v \in W^{p,l+m}\left(B_\rho\right)$:

$$\left\|A_{x_0}v\right\|_{W^{p,l}(B_\rho)} \le C\left\|v\right\|_{W^{p,l+m}(B_\rho)}.$$

En effet, pour $l = 0$ on a :

$$\begin{aligned}
&\left\|A_{x_0}v\right\|_{L^p(B_\rho)}^p\\
&\le \sum_{|\alpha|\le m}\left\|\left[T_{x_0,m-|\alpha|}\left(a_\alpha\right)\right]\partial^\alpha v\right\|_{L^p(B_\rho)}^p\\
&\le \sum_{|\alpha|\le m}\int_{B_\rho}\left|< x_0 >^{m-|\alpha|} a_\alpha\left(< x_0 > z + x_0\right)\partial^\alpha v\left(z\right)\right|^p dz\\
&\le \sum_{|\alpha|\le m}\left(\frac{2}{1-\rho}\right)^{p(m-|\alpha|)}\sup_{y\in B(x_0,\rho<x_0>)}\left(< y >^{m-|\alpha|}\left|a_\alpha\left(y\right)\right|\right)^p\int_{B_\rho}\left|\partial^\alpha v\left(z\right)\right|^p dz\\
&\le \left(\frac{2}{1-\rho}\right)^{pm}\left(\sup_{|\alpha|\le m}\left\|a_\alpha\right\|_{W_{m-|\alpha|}^{\infty,0}(\mathbb{R}^n)}^p\right)\left\|v\right\|_{W^{p,m}(B_\rho)}^p
\end{aligned}$$

D'où le résultat dans le cas $l = 0$. Le cas général où l est un entier ≥ 1 s'en déduit par récurrence sur l.

• Les estimations *a priori* intérieures (cf [A] par exemple) pour les opérateurs uniformément elliptiques appliquées à A_{x_0} permettent alors d'écrire que pour tout ouvert ω relativement compact tel que $\varpi \subset B_\rho$ il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de n, m, p, Θ,ρ et K avec $K = \max_{|\alpha| \leq m} \|a_\alpha\|_{W^{\infty,0}_{m-|\alpha|}(\mathbb{R}^n)}$, indépendante notamment de x_0 (et de a) telle que pour tout $v \in W^{p,m}(B_\rho)$:

$$\|v\|_{W^{p,m}(\omega)} \leq C \left\{ \|A_{x_0} v\|_{L^p(B_\rho)} + \|v\|_{L^p(B_\rho)} \right\}.$$

Appliquant cette inégalité à $\omega = B_{\frac{1}{4}}$, $\rho = \frac{1}{2}$ en tenant compte du lemme 2.2 il vient que pour tout $u \in W^{p,m}_a(\mathbb{R}^n)$:

$$\|T_{x_0,a}(u)\|_{W^{p,m}\left(B_{\frac{1}{4}}\right)} \leq C \left\{ \|A_{x_0} T_{x_0,a}(u)\|_{L^p\left(B_{\frac{1}{2}}\right)} + \|T_{x_0,a}(u)\|_{L^p\left(B_{\frac{1}{2}}\right)} \right\}.$$

En prenant la norme L^p dans $\mathbb{R}^n$ par rapport à x_0 en tenant compte de la relation $A_{x_0} T_{x_0,a} = T_{x_0,a+m} A$ il vient que pour tout $u \in W^{p,m}_a(\mathbb{R}^n)$:

$$\|u\|_{W^{p,m}_{a,\frac{1}{4}}(\mathbb{R}^n)} \leq C \left\{ \|Au\|_{W^{p,0}_{a+m,\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{W^{p,0}_{a,\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)} \right\}.$$

Grâce à l'équivalence des normes établie dans le lemme 2.1 nous déduisons qu'il existe une constante $C > 0$ telle qur pour tout $u \in W^{p,m}_a(\mathbb{R}^n)$:

$$\|u\|_{W^{p,m}_a(\mathbb{R}^n)} \leq C \left\{ \|Au\|_{L^p_{a+m}(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{L^p_a(\mathbb{R}^n)} \right\}.$$

D'où le théorème 1 dans le cas $l = 0$. Le cas général où l est un entier ≥ 1 s'en déduit par récurrence sur l. ■

Références

[ADN] S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg, Estimates Near The Boundary for Solutions of Elliptic Partial Differential Equations Satisfying General Conditions II, *Comm. Pure Appl. Math., XVII, , 1964, p. 35-92.*

[B] R. Bartnik, The Mass of an Asymptoticaly Flat Manifold, *Comm. Pure Appl. Math., 34, 1986, p. 661-693.*

[BP] P. Bolley et Pham The Lai, 1993. Propriétés d'indice en théorie höldérienne pour des opérateurs différentiels elliptiques dans $\mathbb{R}^n$. *J. Math. Pures Appl., 72, p.105-119.*

[C_1] M. Cantor, Spaces of Functions with Asymptotic Conditions in $\mathbb{R}^n$, *Indiana Univ Math. J., 24, (9) 1975, p. 897-902.*

[C_2] M. Cantor, Elliptic Operators and the Elliptic Decomposition of Tensor Fields, *Bull. Amer. Math. Soc., 5. 1981, p. 235-262.*

[CBC] Y.Choquet-Bruhat et D. Christodoulou, Elliptic Systems in $H_{s,\delta}$ Spaces on Manifold which are euclidien at infinity, *Acta Math.,146, 1981, p.126-150.*

[CSCB] A. Chaljub-Simon et Y. Choquet–Bruhat, 1978. Problèmes elliptiques du second ordre sur une variété euclidienne à l'infini. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math., 1, p.9-25.*

[LP] J. M. Leed et T. H. Parker, The Yamabe Problem, *Bulletin (New series) of the Am. Math. Soc, vol. 17, I, (1987), 37-91.*

[L] R. B. Lockhart, Fredholm Properties on a Class of Elliptic Operators on Non Compact Manifolds, *Duke Math. J., 48, 1981, 289-312.*

[Mc_1] R. C. McOwen, The Behavior of the Laplacien on Weighted Sobolev Spaces, *Comm. Pure Appl. Math., 32, 1979, p. 783-795.*

[Mc_2] R. C. McOwen, On Elliptic Operators in $\mathbb{R}^n$, *Comm. Partial Differential Equations, 5, 1980, p. 913-933.*

[Mu] M. Murata, Isomorphism Theorems for Elliptic Operators in $\mathbb{R}^n$, *Comm. Partial Differential Equations, 9, (11), 1984, p. 1085-1105.*

[NW] L. Nirenberg et H. F. Walker, 1973. The null spaces of Elliptic Partial Differential Operators in $\mathbb{R}^n$. *J. Math. Anal. Appl., 42, p.271-301.*

Fac Sc Dhar mehraz
BP 1796 atlas
Dépt Math
Fès Maroc