Calculs fonctionnels holomorphe et harmonique dans les algèbres de Jordan-Banach non commutatives quotients et applications.

A. Medbouhi A. Tajmouati

Abstract

The purpose of this paper is to extend the holomorphic and harmonic functionals calculus for a quotient non commutative Jordan-Banach algebras, and to give some applications.

Résumé

Ce travail a pour objet d'étendre les calculs fonctionnels holomorphe et harmonique aux algèbres de Jordan-Banach non commutatives quotients, et de donner quelques applications.

Introduction

Dans [11] L. Waelbroeck généralisait le calcul fonctionnel holomorphe à une algèbre de Banach quotient A/α, où α est un idéal bilatère de Banach tel que l'injection canonique de α dans A soit continue. Dans [2] et [4] et en se basant sur l'idée de L.Waelbroeck, H.Arroub a montré que le calcul fonctionnel harmonique construit par M.Akkar, A. El kinani et M.Oudadess dans [1] se généralisait à une algèbre de Banach involutive quotient A/α (A/α algèbre de Banach quotient, A

Received by the editors April 2001.

Communicated by F. Bastin.

1991 *Mathematics Subject Classification :* 46H30, 46H70.

Key words and phrases : Quotient no commutative Jordan-Banach Algebra, Alternative Algebra, Holomorphic Functional Calculus, Harmonic Functional Calculus.

involutive et α idéal bilatère auto-adjoint).
Dans ce travail nous nous proposons d'étendre ces calculs fonctionnels aux algèbres de Jordan-Banach non commutatives quotients.
Pour ce faire, nous organisons ce travail en cinq paragraphes. Dans le paragraphe (1), nous rappelons divers éléments mathématiques qui interviennent dans cette étude. Dans (2), nous montrons que le spectre d'un élément $\tilde{a}$ de J/α, (J/α algèbre de Jordan-Banach non commutative quotient), noté $sp_\alpha a$, est un compact non vide de $\mathbb{C}$, puis nous établissons le lemme (2.1) qui est à la base de la construction des deux calculs fonctionnels. Dans (3), nous montrons le théorème (3.1), ainsi si l'algèbre est associative on retrouve les résultats de L.Waelbroeck [11]. Dans (4), nous définissons le calcul fonctionnel harmonique ; nous montrons qu'il coïncide avec le calcul fonctionnel holomorphe sur les fonctions holomorphes (proposition (4.1)), puis nous établissons le théorème (4.1), ainsi si l'algèbre est associative, on retrouve les résultats de H. Arroub ([2] et [4]).
Finalement et pour montrer l'utilité de ces calculs fonctionnels, nous généralisons dans la partie (5) quelques applications, notamment le théorème de J.W.Ford et l'inégalité de Von.Neuman.

1 Préliminaires et notations. ([7] et [12])

Une algèbre non-associative A sur le corps $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel muni d'une application bilinéaire appelée produit. A sera dite associative si le produit est associatif. Les définitions d'algèbre unitaire, sous algèbre, sous algèbre engendrée par une partie de A, idéaux, morphismes, involution et sous algèbre pleine sont les mêmes que dans le cas associatif. Pour tout x, y et z dans A, on pose :
$[xy] = xy - yx$ et $[x, y, z] = (xy)z - x(yz)$
Une algèbre non-associative J est dite de Jordan non commutative (n.c) si elle vérifie :
(F) $x(yx) = (xy)x$
(J) $(x^2y)x = x^2(yx)$
pour tout x, y et z dans J. Elle est dite de Jordan si elle vérifie :
(c) $xy = yx$
(J) $(x^2y)x = x^2(yx)$
pour tout x, y et z dans J. Il est clair qu'une algèbre de Jordan est une algèbre de Jordan n.c. Dans [6] K. McCrimon a mis en évidence l'opérateur défini par : $U_x : J \to J$, qui à y associe $U_x(y)$ défini par : $U_x(y) = x(xy + yx) - x^2y = (yx + xy)x - yx^2$, cet opérateur joue un rôle essentiel dans l'étude de ces algèbres.
Un élément x d'une algèbre de Jordan n.c unitaire J, est inversible s'il existe y dans J tel que $xy = yx = 1$ et $x^2y = yx^2 = x$ où 1 est l'élément unité de J, ce qui est équivalent à dire que U_x est inversible dans $L(J)$ ($L(J)$ est l'algèbre des opérateurs linéaires), y est alors unique.
Tout élément d'une algèbre de Jordan n.c est contenu dans une sous algèbre associative pleine.
On appelle spectre d'un élément x dans J et on le note spx, l'ensemble $\{\lambda \in \mathbb{C}/x - \lambda,$ est non inversible $\}$.
Une algèbre de Jordan-Banach n.c est une algèbre de Jordan n.c normée telle que

l'espace vectoriel sous-jacent est un espace de Banach.
Le spectre de chaque élément d'une algèbre de Jordan-Banach n.c unitaire est une partie compacte non vide de $\mathbb{C}$.
L'ensemble des éléments inversibles d'une algèbre de Jordan-Banach n.c est un ouvert.
Soient $(E, \|.\|)$ un espace de Banach et F un sous espace vectoriel de E. F est dit sous espace de Banach de E si F est muni d'une norme η_F d'espace de Banach plus fine que celle induite par $\|.\|$. Un espace de Banach quotient E/F est la donnée d'un couple (E, F) où E est un espace de Banach et F un sous espace de Banach de E.
Si J est une algèbre de Jordan-Banach n.c et α un idéal bilatère de J tel que α soit un sous espace de Banach de J, alors J/α est appelée algèbre de Jordan-Banach n.c quotient. Si J est involutive et α est auto-adjoint, alors J/α est appelée algèbre de Jordan-Banach n.c involutive quotient.
Dans toute la suite J désigne une algèbre de Jordan-Banach n.c unitaire, d'unité 1 sur le corps $\mathbb{C}$.
Si J/α est une algèbre de Jordan-Banach n.c quotient, $\tilde{a} \in J/\alpha$ désigne la classe d'équivalence de a modulo α.
$C^\infty(\Omega, J)$ (respectivement $C^\infty(\Omega, \alpha)$) où Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$, désigne l'espace vectoriel des applications de Ω dans J (respectivement de Ω dans α) de classe C^∞.
$h(\Omega, J)$ (respectivement $h(\Omega, \alpha)$) désigne l'espace vectoriel de fonctions harmoniques de Ω dans J (respectivement de Ω dans α), c'est à dire les fonctions de classe C^2 de Ω dans J (respectivement de Ω dans α) tel que $\triangle(f) = \frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}^2} = 0$.
Muni de la topologie de la convergence compacte $h(\Omega, J)$ (respectivement $h(\Omega, \alpha)$) est un espace de Fréchet. On pose $h(\Omega, J/\alpha) = h(\Omega, J)/h(\Omega, \alpha)$.
Si J est involutive et α auto-adjoint, l'involution * : $h(\Omega, J) \to h(\Omega, J)$ qui à f associe f^* où $f^*(x) = f(x)^*$ induit une involution * : $h(\Omega, J/\alpha) \to h(\Omega, J/\alpha)$ qui à $\tilde{f}$ associe $(\tilde{f})^* = \tilde{f^*}$.
On désigne par $H(\Omega, J)$ (respectivement $H(\Omega, \alpha)$) l'algèbre des fonctions holomorphes de Ω dans J (respectivement de Ω dans α).
Muni de la topologie de la convergence compacte $H(\Omega, J)$ (respectivement $H(\Omega, \alpha)$) est un espace de Fréchet. On pose $H(\Omega, J/\alpha) = H(\Omega, J)/H(\Omega, \alpha)$. $H(\Omega)$ désigne l'algèbre des fonctions holomorphes à valeurs scalaires. On identifie $H(\Omega)$ au sous espace vectoriel formé par les éléments de la forme $f\tilde{1}$ où f est à valeurs scalaires.
Si $\tilde{a} \in J/\alpha, sp_\alpha a$ désigne le spectre de $\tilde{a}$ dans J/α.
Si J est involutive et $a \in J$, on pose $\Re a = \frac{a+a^*}{2}$.
Si $z_\circ \in \mathbb{C}$ et R un réel strictement positif, alors $B(z_\circ, R)$ (respectivement $\overline{B}(z_\circ, R)$) désigne la boule ouverte (respectivement la boule fermée) de centre $z_\circ$ et de rayon R.

2 Spectre dans une algèbre de Jordan-Banach n.c quotient.

Dans toute la suite, les algèbres considérées seront supposées unitaires sur le corps $\mathbb{C}$.

Proposition 2.1 *Soit J/α une algèbre de Jordan-Banach n.c quotient. Pour tout $a \in J, sp_\alpha a$ est une partie compacte non vide de $\mathbb{C}$.*

Preuve.
Soit α' un idéal maximal contenant α. On a donc $sp_{\alpha'}a \subset sp_\alpha a \subset spa$. Or α' est fermé, d'où J/α' est une algèbre de Jordan-Banach n.c et par suite $sp_{\alpha'}a$ et spa sont deux parties compactes non vides [7], et donc $sp_\alpha a$ est une partie bornée non vide de $\mathbb{C}$.
Montrons que $sp_\alpha a$ est fermé : Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus sp_\alpha a$, donc $\tilde{a} - \tilde{\lambda}$ est inversible. Soit $\tilde{b}_\lambda$ son inverse, on a donc $U_{\tilde{b}_\lambda}(\tilde{\lambda} - \tilde{a})^2 = \tilde{1}$, ceci implique qu'il existe $x_\lambda \in \alpha$ tel que $U_{b_\lambda}(\lambda - a)^2 + x_\lambda = 1$. On a :

$$\begin{aligned} \|U_{b_\lambda}(z-a)^2 - U_{b_\lambda}(\lambda - a)^2\| &= \|U_{b_\lambda}(z-\lambda)(z+\lambda-2a\| \\ &\leq 3\|b_\lambda\|^2|z-\lambda|\|z+\lambda-2a\| \end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{z \to \lambda} U_{b_\lambda}(z-a)^2 + x_\lambda = U_{b_\lambda}(\lambda - a)^2 + x_\lambda = 1$$

Or l'ensemble des éléments inversibles est un ouvert de J. D'où l'existence d'un voisinage ouvert V_λ dans $\mathbb{C}$ tel que $U_{\tilde{b}_\lambda}(\tilde{z} - \tilde{a})^2$ est inversible pour tout $z \in V_\lambda$, d'où $(\tilde{z} - \tilde{a})$ est inversible pour tout $z \in V_\lambda$. i.e $V_\lambda \subset \mathbb{C} \setminus sp_\alpha a$. ■

Lemme 2.1 *Soient J/α une algèbre de Jordan-Banach n.c quotient et $a \in J$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus sp_\alpha a$ il existe V_λ, voisinage ouvert de λ, inclus dans $\mathbb{C} \setminus sp_\alpha a$, et trois applications $v_\lambda : V_\lambda \longrightarrow \alpha$, $w_\lambda : V_\lambda \longrightarrow \alpha$ et $u_\lambda : V_\lambda \longrightarrow J$, de classe C^∞ sur V_λ telles que $(z-a)u_\lambda + v_\lambda = u_\lambda(z-a) + w_\lambda = 1$ sur V_λ. De plus $\widetilde{u_\lambda(z)} \in C(\tilde{a})$ où $C(\tilde{a})$ désigne la sous algèbre associative pleine engendrée par $\tilde{a}$.*

Preuve.
Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus sp_\alpha a$ et soit $b_\lambda \in J$ tel que $\tilde{b}_\lambda$ soit l'inverse de $\tilde{\lambda} - \tilde{a}$ dans J/α. On a donc $\tilde{b}_\lambda(\tilde{\lambda} - \tilde{a}) = (\tilde{\lambda} - \tilde{a})\tilde{b}_\lambda = \tilde{1}$ et $\tilde{b}_\lambda \in C(\tilde{a})$. Il existe alors y_λ et x_λ dans α tels que $(\lambda - a)b_\lambda + x_\lambda = b_\lambda(\lambda - a) + y_\lambda = 1$. Comme l'ensemble des éléments inversibles de J est un ouvert , il est facile de voir qu'il existe un voisinage ouvert V_λ de λ inclus dans $\mathbb{C} \setminus sp_\alpha a$ tel que $(z-a)b_\lambda + x_\lambda$ et $b_\lambda(z-a) + y_\lambda$ soient inversibles dans J pour tous $z \in V_\lambda$. On vérifie aussi que $(z-a)b_\lambda + x_\lambda = b_\lambda(z-a) + y_\lambda = 1 - (\lambda - z)b_\lambda$.
Posons donc pour tout $z \in V_\lambda$:
$r_z = [(z-a), b_\lambda, (1-(\lambda - z)b_\lambda)^{-1}]$
$b_z = b_\lambda(1-(\lambda - z)b_\lambda)^{-1}$
$x_z = x_\lambda(1-(\lambda - z)b_\lambda)^{-1} + r_z$
$y_z = (1-(\lambda - z)b_\lambda)^{-1}y_\lambda + r_z$
On a alors : (i) r_z, x_z et $y_z \in \alpha, \tilde{b}_z \in C(\tilde{a})$ pour tout $z \in V_\lambda$. (ii) $(z-a)b_z + x_z = b_z(z-a) + y_z = 1$. En effet $\tilde{b}_\lambda \in C(\tilde{a})$, donc $\tilde{1} - (z-\lambda)\tilde{b}_\lambda \in C(\tilde{a})$, donc $(\tilde{1} - (z-\lambda)\tilde{b}_\lambda)^{-1} = \widetilde{(1-(z-\lambda)b_\lambda)}^{-1} \in C(\tilde{a})$ pour tout $z \in V_\lambda$, d'où $r_z = [\widetilde{(z-a)}, \tilde{b}_\lambda, \widetilde{(1-(\lambda - z)b_\lambda)^{-1}}] = 0$, par conséquent $r_z \in \alpha$ pour tout $z \in V_\lambda$. Pour x_z et y_z c'est trivial. $\tilde{b}_z = (\tilde{1} - (z-\lambda)\tilde{b}_\lambda)^{-1} \in C(\tilde{a})$ car $\tilde{b}_\lambda \in C(\tilde{a})$. (ii) $b_z(z-a) + y_z = b_z(z-a) + (1-(\lambda - z)b_\lambda)^{-1}y_\lambda + r_z$. Or $r_z = -[(1-(\lambda - z)b_\lambda)^{-1}, b_\lambda, (z-a)]$, comme b_λ et $(1-(\lambda - z)b_\lambda)^{-1}$ commutent, alors $r_z + (b_\lambda(1-(\lambda - z)b_\lambda)^{-1})(z-a) = (1-(\lambda - z)b_\lambda)^{-1}(b_\lambda(z-a) + y_\lambda)$, d'où $b_z(z-a) + y_z = (1-(\lambda - z)b_\lambda)^{-1}(1-(\lambda - z)b_\lambda) = 1$.
De même on montre que $(z-a)b_z + x_z = 1$. Finalement soient u_λ , v_λ , w_λ définies

comme suit :
v_λ(resp w_λ) : $V_\lambda \to \alpha\,;\, z \to x_z$ (resp y_z) et $u_\lambda : V_\lambda \to J\,;\, z \to b_z$.
Ces applications sont de classe C^∞ et on a $(z-a)u_\lambda + v_\lambda = u_\lambda(z-a) + w_\lambda = 1$, et $\widetilde{u_\lambda(z)} \in C(\tilde{a})$ pour tout $z \in V_\lambda$. ∎

Remarque 2.1 *si J est une algèbre associative, alors $r_z = 0$ et on retrouve la construction des b_z , x_z et y_z donnée par H. Arroub (cf [2] et [4]).*

Proposition 2.2 *Soient J/α une algèbre de Jordan-Banach n.c quotient et $\tilde{a} \in J/\alpha$, alors il existe une application $u : \mathbb{C} \setminus sp_\alpha a \to J$ de classe C^∞ telle que $\tilde{u}$ soit l'inverse de $\tilde{z} - \tilde{a}$ dans l'algèbre de Jordan n.c $C^\infty(\mathbb{C} \setminus sp_\alpha, J/\alpha)$, et il existe deux applications $v,\ w : \mathbb{C} \setminus sp_\alpha a \to \alpha$ de classe C^∞ telles que $(z-a)u(z) + v(z) = u(z)(z-a) + w(z) = 1$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus sp_\alpha a$.*

Preuve.
La démonstration de cette proposition est classique ; elle est basée sur le théorème de l'existence d'une partition de l'unité.

Proposition 2.3 *Soient J/α une algèbre de Jordan-Banach n.c quotient, $\tilde{a} \in J/\alpha$ et Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ tel que $sp_\alpha a \subset V \subset \bar{V} \subset \Omega$, où V est un ouvert de $\mathbb{C}$ relativement compact et $\bar{V}$ la fermeture de V dans $\mathbb{C}$. Alors il existe $h : \mathbb{C} \to [0,1]$ de classe C^∞ a support compact contenu dans V, $h = 1$ sur un voisinage de $sp_\alpha a$ et $u_1 : \mathbb{C} \to J$ de classe C^∞ telle que $(\tilde{z} - \tilde{a})\tilde{u}_1 = \tilde{u}_1(\tilde{z} - \tilde{a}) = \tilde{1} - \tilde{h}$ dans $C^\infty(\mathbb{C}, J/\alpha)$ et $\tilde{u}_1(z) \in C(\tilde{a})$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.*

Preuve.
Pour démontrer cette proposition on raisonne comme dans [2] et [4].

Lemme 2.2 *Soient J/α une algèbre de Jordan-Banach n.c quotient, $\tilde{a} \in J/\alpha$ et l'application $u : \mathbb{C} \setminus sp_\alpha a \to J$ définie dans la proposition (2.2), alors $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}$ est une application de classe C^∞ de $\mathbb{C} \setminus sp_\alpha a$ à valeurs dans α.*

Preuve.
De la relation $(z-a)u(z) + v(z) = u(z)(z-a) + w(z) = 1$ sur $\mathbb{C} \setminus sp_\alpha a$, on déduit : (i) $(z-\tilde{a})\widetilde{\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}} = \widetilde{\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}}(z-\tilde{a}) = 0$, comme $\tilde{u}$ est l'inverse de $z - \tilde{a}$ dans $C^\infty(\mathbb{C} \setminus sp_\alpha a, J/\alpha)$, alors $(z-\tilde{a})^2\tilde{u} = z - \tilde{a}$, posons donc $\varphi(z) = (z-a)^2 u - (z-a)$, $\varphi : \mathbb{C} \setminus sp_\alpha \to \alpha$ est une fonction de classe C^∞ d'où (ii) $\widetilde{\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}}} = (z-\tilde{a})^2 \widetilde{\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}} = 0$. En utilisant (i) et (ii) on déduit que $U_{z-\tilde{a}}(\widetilde{\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}}) = 0$, or $z - \tilde{a}$ est inversible dans $C^\infty(\mathbb{C} \setminus sp_\alpha a, J/\alpha)$, d'où $\widetilde{\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}} = 0$, ce qui prouve que $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}$ est une application à valeurs dans α. ∎

3 Calcul fonctionnel holomorphe dans une algèbre de Jordan-Banach n.c quotient.

Notation
Soient J une algèbre de Jordan-Banach n.c , $a \in J$ et $P = \sum_o^n a_k z^k$ un polynôme à coefficients dans J, on note $P(a) = \sum_o^n a_k a^k \in J$.

Définition 3.1 *Soit Ω (respectivement K) un ouvert (respectivement un compact) de $\mathbb{C}$, une enveloppe W de (K, Ω) est un ouvert borné de $\mathbb{C}$ tel que $K \subset W \subset \Omega$ et la frontière de W est une réunion finie d'arcs rectifiables contenus dans Ω.*

Définition 3.2 *Soient J/α une algèbre de Jordan-Banach n.c quotient, $\tilde{a} \in J/\alpha$ et Ω un voisinage ouvert de $sp_\alpha a$ dans $\mathbb{C}$, pour tout f dans $H(\Omega, J)$ on définit $\tilde{f}[\tilde{a}]$ comme étant la classe d'équivalence modulo α de $\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\partial W} f(z)u(z)dz$ où W est une enveloppe de $(sp_\alpha a, \Omega)$ et u l'application définie dans la proposition (2.2).*

Remarques 3.1 *1) $\tilde{f}[\tilde{a}]$ a un sens car la fonction sous le signe intégral est continue. 2) $\tilde{f}[\tilde{a}]$ ne dépend pas du choix de l'enveloppe et des représentants a , f et u.*

Théorème 3.1 *Soient J/α une algèbre de Jordan-Banach n.c quotient, $\tilde{a} \in J/\alpha$ et Ω un voisinage ouvert de $sp_\alpha a$ dans $\mathbb{C}$, alors :*
i) l'application Ψ qui à $\tilde{f} \in H(\Omega, J/\alpha)$ associe l'élément $\tilde{f}[\tilde{a}]$ de J/α est induite par une application φ linéaire continue qui envoie $H(\Omega, \alpha)$ dans α.
ii) $\tilde{1}[\tilde{a}] = \tilde{1}$ et $\tilde{P}[\tilde{a}] = \widetilde{P(a)}$ où P est un polynôme à coefficients dans J.
iii) la restriction de Ψ à $H(\Omega)$ est un homomorphisme d'algèbres unitaires.
iv) $sp\tilde{f}[\tilde{a}] = sp_\alpha\varphi(f) = f(sp_\alpha a)$.

Preuve.
i) Soit l'application $\varphi : H(\Omega, J) \to J$ qui à f associe $\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\partial W} f(z)u(z)dz$ où W est une enveloppe de (sp_α, Ω). φ est continue, $\varphi(H(\Omega, \alpha)) \subset \alpha$ et $\widetilde{\varphi(f)} = \Psi(\tilde{f}) = \tilde{f}[\tilde{a}]$ par définition.
ii) Soient W une enveloppe de (sp_α, Ω) et $R > 0$ tel que spa et W soient inclus dans $B(0, R)$. On a $\tilde{1}[\tilde{a}] = \widetilde{\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\partial W} u(z)dz}$.
Or $\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\partial W} u(z)dz = \frac{1}{2i\pi}\int_W \frac{\partial u_1}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz$ (formule de Stock).
Donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial W} u(z)dz &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\bar{B}(0,R)} \frac{\partial u_1}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz - \frac{1}{2i\pi}\int_{\bar{B}(0,R)\backslash W} \frac{\partial u_1}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_{\bar{B}(0,R)} \frac{\partial u_1}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz - \frac{1}{2i\pi}\int_{\bar{B}(0,R)\backslash W} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz
\end{aligned}$$

or $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} : \mathbb{C} \to \alpha$ est de classe C^∞. Donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial W} u(z)dz &\equiv \frac{1}{2i\pi}\int_{\bar{B}(0,R)} \frac{\partial u_1}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz \quad modulo\ \alpha \\
&\equiv \frac{1}{2i\pi}\int_{|z|=R} u_1(z)dz \quad modulo\ \alpha \\
&\equiv \frac{1}{2i\pi}\int_{|z|=R} u(z)dz \quad modulo\ \alpha \\
&\equiv \frac{1}{2i\pi}\int_{|z|=R} (z-a)^{-1}dz \quad modulo\ \alpha \\
&\equiv 1 \quad modulo\ \alpha
\end{aligned}$$

En suivant les mêmes techniques, on montre que $\tilde{z}^n[\tilde{a}] = \tilde{a}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'où $\widetilde{P(a)} = \tilde{P}[\tilde{a}]$ pour tout polynôme à coefficients dans J.

iii) Soient $f, g \in H(\Omega)$ et W , V deux enveloppes telles que $\overline{W} \subset V$, on a alors $g(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial V}\frac{g(z')}{z'-z}dz'$ pour tout $z \in \overline{W}$, d'où $\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial W} fgudz = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial V} g(z')(\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial W}\frac{f(z)u(z)}{z'-z}dz)dz'$. Posons $h(z') = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial W}\frac{f(z)u(z)}{z'-z}dz$ et montrons que $\lambda(z') = h(z') - (\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial W} f(z)u(z)dz)u(z')$ est de classe C^∞ sur $\Omega \setminus \overline{W}$ à valeurs dans α.

$$\begin{aligned}
\lambda(z') &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial W} f(z)u(z)(\frac{1}{z'-z} - u(z'))dz \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial W}\frac{f(z)u(z)}{z'-z}(1-(z'-z)u(z'))dz \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial W}\frac{f(z)u(z)}{z'-z}(v(z') + (z-a)u(z'))dz \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial W}\frac{f(z)u(z)}{z'-z}v(z')dz + \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial W}\frac{f(z)u(z)}{z'-z}(z-a)u(z')dz \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial W}\frac{f(z)u(z)}{z'-z}v(z')dz + \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial W}\frac{f(z)}{z'-z}(u(z)(z-a))u(z')dz \\
&- \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial W}\frac{f(z)}{z'-z}[u(z), z-a, u(z')]dz \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial W}\frac{f(z)u(z)}{z'-z}v(z')dz + (\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial W}\frac{f(z)}{z'-z}dz)u(z') \\
&- \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial W}\frac{f(z)}{z'-z}w(z)u(z')dz - \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial W}\frac{f(z)}{z'-z}[u(z), z-a, u(z')]dz
\end{aligned}$$

Or $\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial W}\frac{f(z)}{z'-z}dz = 0$, et $[u(z), z-a, u(z')]$ est une application de classe C^∞ sur $\Omega \setminus \overline{W}$ à valeurs dans α, car $\widetilde{u(z)} \in C(\bar{a})$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus sp_\alpha a$. D'où $\lambda(z')$ est de classe C^∞ sur $\Omega \setminus \bar{W}$ à valeurs dans α, car elle est la somme de fonctions de classe C^∞ à valeurs dans α. donc $\int_{\partial V} g(z')\lambda(z')dz' \in \alpha$, c'est-à-dire

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial V} g(z')h(z')dz' - \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial W} f(z)u(z)dz\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial V} g(z')u(z')dz' \in \alpha$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial W} f(z)g(z)u(z)dz = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial W} f(z)u(z)dz\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial V} g(z')u(z')dz' \quad modulo\ \alpha$$

iv) ("Spectral mapping theorem").
Tout revient à montrer que $\tilde{f}[\tilde{a}]$ est inversible si, et seulement si, f n'a pas de zéro dans $sp_\alpha a$. Or si $f(\lambda) \neq 0$ pour tout $\lambda \in sp_\alpha a$, alors on peut trouver une enveloppe W de $(sp_\alpha a, \Omega)$ telle que $f(\lambda) \neq 0$ pour tout $\lambda \in W$, ainsi $\frac{1}{f}$ est définie et est holomorphe sur W. Donc on peut former l'élément $\tilde{g}[\tilde{a}] = \tilde{\frac{1}{f}}[\tilde{a}]$, or $fg = 1$ et $gf^2 = f$, donc iii) implique que $\tilde{g}[\tilde{a}]\tilde{f}[\tilde{a}] = \tilde{f}[\tilde{a}]\tilde{g}[\tilde{a}] = \tilde{1}$ et $\tilde{g}[\tilde{a}]\tilde{f}^2[\tilde{a}] = \tilde{f}^2[\tilde{a}]\tilde{g}[\tilde{a}] = \tilde{f}[\tilde{a}]$, d'où $\tilde{f}[\tilde{a}]$ est inversible dans J/α.
Inversement : S'il existe $\lambda \in sp_\alpha a$ tel que $f(\lambda) = 0$, alors $f = (\lambda - z)h$ où $h \in H(\Omega)$, et iii) implique que : $\tilde{h}[\tilde{a}](\tilde{h}[\tilde{a}](\tilde{\lambda} - \tilde{a})^2) = \tilde{h}[\tilde{a}]((\tilde{\lambda} - \tilde{a})^2)\tilde{h}[\tilde{a}]) = (\tilde{\lambda} - \tilde{a})^2\tilde{h}^2[\tilde{a}] = (\tilde{f}[\tilde{a}])^2$ d'où $U_{\tilde{h}[\tilde{a}]}((\tilde{\lambda} - \tilde{a})^2) = (\tilde{f}[\tilde{a}])^2$. Donc $\tilde{f}[\tilde{a}]$ est non inversible, car sinon $(\tilde{f}[\tilde{a}])^2$ est inversible, d'où $(\tilde{\lambda} - \tilde{a})^2$ est inversible, donc $(\tilde{\lambda} - \tilde{a})$ est inversible, par conséquent $\lambda \notin sp_\alpha a$; d'où la contradiction. ∎

4 Calcul fonctionnel harmonique dans une algèbre de Jordan-Banach n.c involutive quotient.

Définition 4.1 *Soient J/α une algèbre de Jordan-Banach n.c involutive quotient, $\tilde{a} \in J/\alpha$ et Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ tel que $sp_\alpha a \subset B(z_\circ, R) \subset \bar{B}(z_\circ, R) \subset \Omega$ $(z_\circ \in \mathbb{C}, R > 0)$, $u : \mathbb{C} \setminus sp_\alpha a \to J$ l'application de classe C^∞ définie dans (proposition 2.2). Pour tout $f \in h(\Omega, J)$, on pose $\tilde{f}(\tilde{a})$ la classe d'équivalence modulo α de :*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_\circ|=R} f(z)\Re((z+a-2z_\circ)u(z))\frac{|dz|}{R}$$

Remarques 4.1 - *$\tilde{f}(\tilde{a})$ a un sens car la fonction sous le signe intégral est continue.*
- *$\tilde{f}(\tilde{a})$ ne dépend pas du choix des représentants a, u, f.*

Proposition 4.1 *Soient J/α une algèbre de Jordan-Banach n.c involutive quotient, $\tilde{a} \in J/\alpha$ et Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ tel que $sp_\alpha a \subset B(z_\circ, R) \subset \bar{B}(z_\circ, R) \subset \Omega$ $(z_\circ \in \mathbb{C}, R > 0)$. Alors si $f \in h(\Omega, J)$ est holomorphe, $\tilde{f}(\tilde{a})$ coïncide avec $\tilde{f}[\tilde{a}]$ définie dans (3).*

Preuve.
Soit $R' > R$ tel que $\bar{B}(z_\circ, R') \subset \Omega$, alors pour tout $z \in \bar{B}(z_\circ, R)$ on a $f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{|z'-z_\circ|=R} \frac{f(z')}{z'-z}dz'$.
Donc $\frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_\circ|=R} f(z)\Re((z+a-2z_\circ)u(z))\frac{|dz|}{R} = \frac{1}{2i\pi}\int_{|z'-z_\circ|=R'} f(z')h(z')dz'$,
où $h(z') = \frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_\circ|=R} \frac{1}{z'-z}\Re((z+a-2z_\circ)u(z))\frac{|dz|}{R}$. Or

$$\begin{aligned}
\Re((z+a-2z_\circ)u(z)) &= \Re(((a-z)+2(z-z_\circ))u(z)) \\
&= \Re(v(z)-1+2(z-z_\circ)u(z)) \\
&= \Re v(z) - 1 + \Re 2(z-z_\circ)u(z)
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
h(z') &= \frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_\circ|=R} \frac{\Re v(z)}{z'-z}\frac{|dz|}{R} - \frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_\circ|=R} \frac{1}{z'-z}\frac{|dz|}{R} \\
&+ \frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_\circ|=R} \frac{(z-z_\circ)u(z)}{z'-z}\frac{|dz|}{R} + \frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_\circ|=R} \frac{\overline{z-z_\circ}u^*(z)}{z'-z}\frac{|dz|}{R} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_\circ|=R} \frac{\Re v(z)}{z'-z}\frac{|dz|}{R} + \frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_\circ|=R} \frac{(z-z_\circ)u(z)}{z'-z}\frac{|dz|}{R} \\
&+ \frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_\circ|=R} \frac{-1+\overline{z-z_\circ}u^*(z)}{z'-z}\frac{|dz|}{R}
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
-1+\overline{(z-z_\circ)}u^*(z) &= -1+(z-a)^*u^*(z)+(a-z_\circ)^*u^*(z) \\
&= -w^*(z)+(a-z_\circ)^*u^*(z)
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
h(z') &= \frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_\circ|=R} \frac{\Re v(z)}{z'-z}\frac{|dz|}{R} - \frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_\circ|=R} \frac{w^*(z)}{z'-z}\frac{|dz|}{R} \\
&+ \frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_\circ|=R} \frac{(z-z_\circ)u(z)}{z'-z}\frac{|dz|}{R} + (a-z_\circ)^*\frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_\circ|=R} \frac{u^*(z)}{z'-z}\frac{|dz|}{R}
\end{aligned}$$

Il est clair que l'application qui à $z' \in \{z \in \mathbb{C}/|z'-z_\circ| > R\}$ associe $\frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_\circ|=R} \frac{\Re v(z)}{z'-z}\frac{|dz|}{R}$, respectivement $\frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_\circ|=R} \frac{w^*(z)}{z'-z}\frac{|dz|}{R}$, est de classe C^∞ à valeurs dans α. On a aussi $z' \to \frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_\circ|=R} \frac{u^*(z)}{z'-z}\frac{|dz|}{R} = \frac{1}{2\pi}(\int_{|z-z_\circ|=R} \frac{u(z)}{\overline{z'-z}}\frac{|dz|}{R})^*$ est de classe C^∞ à valeurs dans α (pour le voir on suit les mêmes techniques utilisées dans [2] et [4]).
Conclusion : $h(z') = \frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_\circ|=R} \frac{(z-z_\circ)u(z)}{z'-z}\frac{|dz|}{R} + \phi(z')$ où $\phi : \{z'/|z'-z_\circ| > R\} \to \alpha$ est de classe C^∞.
D'où $f(z')h(z') = \frac{1}{2i\pi}\int_{|z-z_\circ|=R} \frac{f(z')u(z)}{z'-z}dz + f(z')\phi(z')$, d'où

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2i\pi}\int_{|z'-z_\circ|=R'} f(z')h(z')dz' &\equiv \frac{1}{2i\pi}\int_{|z'-z_\circ|=R'}\Big(\frac{1}{2i\pi}\int_{|z-z_\circ|=R} \frac{f(z')u(z)}{z'-z}dz\Big)dz' \quad \textit{modulo}\, \alpha \\
&\equiv \frac{1}{2i\pi}\int_{|z-z_\circ|=R}\Big(\frac{1}{2i\pi}\int_{|z'-z_\circ|=R'} \frac{f(z')}{z'-z}dz'\Big)u(z)dz \quad \textit{modulo}\, \alpha \\
&\equiv \frac{1}{2i\pi}\int_{|z-z_\circ|=R} f(z)u(z)dz \quad \textit{modulo}\, \alpha
\end{aligned}$$

d'où finalement

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_\circ|=R} f(z)\Re((z+a-2z_\circ)u(z))\frac{|dz|}{R} \equiv \frac{1}{2i\pi}\int_{|z-z_\circ|=R} f(z)u(z)dz \quad \textit{modulo}\ \alpha$$

■

Théorème 4.1 *Soient J/α une algèbre de Jordan-Banach n.c involutive quotient, $\tilde{a} \in J/\alpha$ et Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ tel que $sp_\alpha a \subset B(z_\circ, R) \subset \bar{B}(z_\circ, R) \subset \Omega$, ($z_\circ \in \mathbb{C}, R > 0$), alors :*
i) L'application qui à $\tilde{f}$ associe $\tilde{f}(\tilde{a}) \in J/\alpha$ est induite par une application linéaire continue : $h(\Omega, J) \to J$, qui envoie $h(\Omega, \alpha)$ dans α.
ii) Si $f = 1$ alors $\tilde{f}(\tilde{a}) = \tilde{1}$
iii) Si $f(z) = P(z)$, avec P un polynôme à coefficients dans J, alors $\tilde{f}(\tilde{a}) = \widetilde{P(a)}$.

Preuve.
i) C'est trivial
ii) et iii) découlent du théorème (3.1) et de la proposition précédente .

Proposition 4.2 *Soient J/α une algèbre de Jordan-Banach n.c involutive quotient, $\tilde{a} \in J/\alpha$, Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ tel que $sp_\alpha a \subset B(z_\circ, R) \subset \bar{B}(z_\circ, R) \subset \Omega$ ($z_\circ \in \mathbb{C}, R > 0$) et $\tilde{f}$ un élément de $h(\Omega)$, alors $\widetilde{f^*}(\tilde{a}) = (\tilde{f}(\tilde{a}))^*$.*

Preuve.
$\widetilde{f^*}(\tilde{a})$ est la classe d'équivalence modulo α de

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_\circ|=R} f^*(z)\Re((z+a-2z_\circ)u(z))\frac{|dz|}{R} = (\frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_\circ|=R} f(z)\Re((z+a-2z_\circ)u(z))\frac{|dz|}{R})^*.$$

■

5 Application du calcul fonctionnel harmonique dans une algèbre de Jordan-Banach involutive quotient.

5.1 Théorème de J.W. Ford dans une algèbre de Jordan-Banach involutive quotient.

Proposition 5.1 (J. W. Ford) *Soient J/α une algèbre de Jordan-Banach n.c involutive quotient, $\tilde{a}$ un élément hermitien de J/α tel que $sp_\alpha a \subset \{z \in \mathbb{C}/\Re z > 0\}$. Alors il existe un élément hermitien $\tilde{b}$ de J/α tel que $\tilde{b}^2 = \tilde{a}$.*

Preuve.
Soit $\Omega = \{z \in \mathbb{C}/\Re z > 0\}$, il existe une application f holomorphe sur Ω à valeurs dans $\mathbb{C}$ telle que $f^2(z) = z$ et $f(1) = 1$, et il existe $z_\circ > 0$ et $R > 0$ tel que $sp_\alpha a \subset B(z_\circ, R) \subset \bar{B}(z_\circ, R) \subset \Omega$.
Posons donc $\tilde{b} = \tilde{f}(\tilde{a})$, comme $f^2 = z$ et f holomorphe, alors $\tilde{b}^2 = \tilde{f}^2(a) = \tilde{a}$.
Montrons que $\tilde{b}$ est hermitien :
$\tilde{b}^*$ est la classe d'équivalence modulo α de
$\frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_\circ|=R} \overline{f(z)}\Re(z + a - 2z_\circ)u(z)\frac{|dz|}{R} = \frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_\circ|=R} f(\bar{z})\Re(\bar{z} + a - 2z_\circ)u(z)^*\frac{|dz|}{R}$, car $\overline{f(z)} = f(\bar{z})$, $\bar{z}_\circ = z_\circ$ et $(z + a - 2z_\circ)u(z) - u(z)(z + a - 2z_\circ) \in \alpha$.
Or il existe $R' < R$ tel que $sp_\alpha a \subset B(z_\circ, R') \subset \bar{B}(z_\circ, R') \subset B(z_\circ, R)$.
Soit $V = \{z \in \mathbb{C}/\Re z > 0 \;\; et \;\; |z - z_\circ| > R'\}$, V est invariant par $\bar{z}$.
D'autre part $\widetilde{u(z)}$ est l'inverse de $z - \tilde{a}$ dans J/α pour tout z dans $\mathbb{C} \setminus sp_\alpha$, alors $U_{z-\tilde{a}}\widetilde{u(z)} = z - \tilde{a}$ d'où $U_{\bar{z}-\tilde{a}}(\widetilde{u(z)}^*) = \bar{z} - \tilde{a}$.
Or $U_{\bar{z}-\tilde{a}}(\widetilde{u(\bar{z})}) = \bar{z} - \tilde{a}$, d'où $U_{\bar{z}-\tilde{a}}(\widetilde{u(\bar{z})} - \tilde{u}(z)^*) = 0$.
Donc $u(\bar{z}) - u(z)^* \in \alpha$ car $\bar{z} - \tilde{a}$ est inversible.
D'où finalement $\tilde{b}^*$ est la classe d'équivalence modulo α de
$\frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_\circ|=R} f(\bar{z})\Re(\bar{z} + a - 2z_\circ)u(\bar{z})\frac{|dz|}{R}$, donc $\tilde{b}^* = \tilde{b}$. ∎

5.2 Sur une inégalité de Von Neumann.

Soit A une algèbre associative, on définit sur l'espace sous-jacent A un nouveau produit par $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$, ainsi on obtient une algèbre de Jordan A^+, appelée algèbre de Jordan spéciale ; dans une telle algèbre on vérifie que $U_a(b) = 2a \circ (a \circ b) - a^2 \circ b = aba$ pour tout a, b dans A [7] et [12].
On dit qu'une algèbre associative est un élément de la famille G, si A^+ est une algèbre de Jordan-Banach [8].

Lemme 5.1 *Soient $A \in G$, α un idéal bilatère de A muni d'une norme d'espace de Banach plus fine que celle induite par la norme de A. Alors pour tout a dans A, $sp_\alpha a$ est une partie compacte non vide de $\mathbb{C}$.*

Preuve.
Le spectre de $\tilde{a}$ dans A/α est identique au spectre de $\tilde{a}$ dans $(A/\alpha)^+$ [9].
Or $(A/\alpha)^+ \simeq A^+/\alpha^+$,([12] lemme, page. 42), et puisque A^+/α^+ est une algèbre de Jordan-Banach quotient alors sp_α est une partie compacte non vide de $\mathbb{C}$ (proposition 2.1).

Dans toute la suite, A désigne un élément de G muni d'une involution hermitienne (ie pour tout h dans A tel que $h^* = h$ on a $sph \subset \mathbb{R}$) et continue, et α désigne un idéal bilatère auto-adjoint muni d'une norme d'espace de Banach plus fine que celle induite par la norme de A, de sorte que A/α soit un espace de Banach quotient [10]. Pour tout élément de A on pose alors $\rho_\alpha(a) = max\{|\lambda|/\lambda \in sp_\alpha(a)\}$ et on définit la fonction de Ptàk par la quantité $|a|_\alpha = \rho_\alpha(a^*a)^{\frac{1}{2}}$, il est clair que $\rho_\alpha(a) = \rho_\alpha(a^*)$ et que $|a|_\alpha = |a^*|_\alpha$ car $sp_\alpha(a) = \overline{sp_\alpha(a^*)}$ et $sp_\alpha(aa^*) \cup \{0\} = sp_\alpha(a^*a) \cup \{0\}$.
Dans [8] les auteurs ont montré que si A est hermitienne, alors $sp(a^*a) \subset [0, +\infty[$ pour tout élément a de A. En utilisant ce résultat et en suivant une technique analogue à celle de [3], on montre que A/α est hermitienne. Si $\tilde{h}$ et $\tilde{k}$ sont deux éléments hermitiens de A/α, on note $\tilde{h} \geq \tilde{k}$ (resp $\tilde{h} > \tilde{k}$) si $sp_\alpha(h-k) \subset [0, +\infty[$ (resp $sp_\alpha(h-k) \subset]0, +\infty[$).
Le premier but de cette partie est de montrer que la fonction de Ptàk $|.|_\alpha$ est une semi norme sur A/α.

Proposition 5.2 *Soit a un élément de A, alors :*
1)$|a|_\alpha < 1$ si, et seulement si, $\tilde{1} - \tilde{a}^*\tilde{a} > 0$.
2) $\rho_\alpha(a) \leq |a|_\alpha$.

Preuve.
La démonstration est la même que dans [3].

Proposition 5.3 *Soient a un élément de A, $||.||'$ la semi-norme sur A/α induite par la norme de A. Alors*
1) $\lim\limits_n ||\tilde{a}^n||'^{\frac{1}{n}}$ et $\lim\limits_n ||U_{\tilde{a}^n}||'^{\frac{1}{n}}$ existent.

2) $\lim\limits_n ||\tilde{a}^n||'^{\frac{1}{n}} \leq \rho_\alpha(a) \leq ||\tilde{a}||'$.

3) $\lim\limits_n ||U_{\tilde{a}^n}||'^{\frac{1}{n}} \leq \rho_\alpha(a)^2$.

Preuve.
1) Découle du fait que pour une algèbre de Jordan semi-normée $(J, |.|)$, $\lim\limits_n |a^n|^{\frac{1}{n}}$ existe pour tout a dans J, et du fait que $U_{a^n} = {U_a}^n$, [9].
2) $\lim\limits_n ||\tilde{a}^n||'^{\frac{1}{n}}$ est le rayon spectral de $\tilde{a}$ dans le complété $(\widetilde{A/\alpha})^+$, or le spectre de $\tilde{a}$ dans $(A/\alpha)^+$ contient le spectre de $\tilde{a}$ dans $(\widetilde{A/\alpha})^+$ d'où $\lim\limits_n ||\tilde{a}^n||'^{\frac{1}{n}} \leq \rho_\alpha(a)$.
D'autre part $sp_\alpha a \subset sp(a+x)$ pour tout $x \in \alpha$, Donc $\rho_\alpha(a) \leq \inf\limits_{x\in\alpha} ||a+x|| \leq ||\tilde{a}||'$.
3) Il est clair que $||U_{\tilde{a}^n}||' \leq 3||\tilde{a}^n||'^2$ d'où $||U_{\tilde{a}^n}||'^{\frac{1}{n}} \leq 3^{\frac{1}{n}} ||\tilde{a}||'^{\frac{1}{n}^2}$ d'où $\lim\limits_n ||U_{\tilde{a}^n}||'^{\frac{1}{n}} \leq \lim\limits_n ||\tilde{a}^n||'^{\frac{1}{n}^2} \leq \rho_\alpha(a)^2$. ∎

Proposition 5.4 *Si $\tilde{a}$ et $\tilde{b}$ sont deux éléments hermitiens de A/α. Alors $\rho_\alpha(ab) \leq \rho_\alpha(a)\rho_\alpha(b)$.*

Preuve.
La proposition (5.2) implique que $\rho_\alpha(ab) \leq |ab|_\alpha = \rho_\alpha(ab^2a)^{\frac{1}{2}} = \rho_\alpha(a^2b^2)^{\frac{1}{2}}$.
Par récurrence on a $\rho_\alpha(ab) \leq \rho_\alpha(a^{2n}b^{2n})^{\frac{1}{2n}}$.
Or $\rho_\alpha(a^{2n}b^{2n}) = \rho_\alpha(a^nb^{2n}a^n) = \rho_\alpha(U_{a^n}b^{2n}) \leq ||U_{\tilde{a}^n}(\tilde{b}^{2n})||' \leq ||U_{\tilde{a}^n}||'||\tilde{b}^{2n}||'$.
D'où $\rho_\alpha(ab) \leq ||U_{\tilde{a}^n}||'^{\frac{1}{2n}}||\tilde{b}^{2n}||'^{\frac{1}{2n}}$. Par passage à la limite on a :
$\rho_\alpha(ab) \leq \rho_\alpha(a)\rho_\alpha(b)$. ∎

Proposition 5.5 *:*
1) Si $\tilde{a}$ et $\tilde{b}$ sont deux éléments hermitiens de A/α tels que $\tilde{a}$, $\tilde{b} \geq 0$, alors $\tilde{a}+\tilde{b} \geq 0$.
2) Si $\tilde{a}$ et $\tilde{b}$ sont deux éléments hermitiens de A/α, alors $\rho_\alpha(a+b) \leq \rho_\alpha(a) + \rho_\alpha(b)$.
3) Pour tout a dans A on a $\rho_\alpha\frac{1}{2}(a+a^*) \leq |a|_\alpha$.
4) La fonction de Ptàk est une semi-norme sur A/α.

Preuve.
Pour montrer cette proposition on suit le même raisonnement que celui de Ptàk dans [2] et [4].

Notation
$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}\ |z| < 1\}$.
$H(\mathbb{D})$ désigne l'ensemble des fonctions holomorphes à valeurs scalaires.
$B(\mathbb{D}) = \{f \in H(\mathbb{D})/|f(z)| < 1, \forall z \in \mathbb{D}\}$.
$P(\mathbb{D}) = \{g \in H(\mathbb{D})/\Re g(z) > 0, \forall z \in \mathbb{D}\}$.

Proposition 5.6 (Ky-Fan) *Soit $\tilde{a}$ un élément de A/α tel que $|a|_\alpha < 1$, alors les deux assertions suivantes sont vérifiées :*
1) Pour tout g dans $P(\mathbb{D})$, $\Re\tilde{g}(\tilde{a}) > 0$.
2) Pour tout f dans $B(\mathbb{D})$, il existe a_1 dans A avec $\tilde{a}_1 = \tilde{f}(\tilde{a})$ tel que $|a_1|_\alpha < 1$.

Preuve.
$(A/\alpha)^+ \simeq A^+/\alpha^+$ [12], or A^+/α^+ est une algèbre de Jordan-Banach involutive quotient et $\rho_\alpha(a) \leq |a|_\alpha < 1$, donc $\tilde{g}(\tilde{a})$ a un sens pour tout g dans $H(\mathbb{D})$ et c'est un élément de A/α.

1) Soient r et r' tels que $|a|_\alpha < r < r' < 1$, $\Re g$ est continue et $\Re g > 0$ sur $\bar{D}(0, r')$, donc il existe $\delta > 0$ tel que $\Re g \geq \delta > 0$ pour tout z dans $D(0, r')$.
Posons $f = \Re g - \delta$, la proposition (2.2) met en évidence deux applications $u : \mathbb{C} \setminus sp_\alpha \to A^+$ et $v : \mathbb{C} \setminus sp_\alpha \to \alpha$ de classe C^∞ telles que
$(z-a)\circ u(z)+v(z) = 1$ et $\tilde{u}(z) \in C(\tilde{a})$ où $C(\tilde{a})$ est la sous algèbre pleine associative engendrée par $\tilde{a}$, et par définition $\tilde{f}(\tilde{a})$ est la classe d'équivalence modulo α de
$\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=r} f(z)\Re((z+a-2z_\circ)\circ u(z))\frac{|dz|}{r}$.
Un calcul direct montre que $\tilde{f}(\tilde{a})$ est la classe d'équivalence modulo α de
$\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=r} f(z)\{r^2u(z)\circ u^*(z) - (u(z)\circ a)\circ(u^*(z)\circ a^*)\}\frac{|dz|}{r}$.
Or $r^2\tilde{u}(z)\circ\tilde{u}^*(z) - (\tilde{u}(z)\circ\tilde{a})\circ(\tilde{u}^*(z)\circ\tilde{a}^*) = \frac{1}{2}\{\tilde{u}(z)(r^2-\tilde{a}\tilde{a}^*)\tilde{u}^*(z)+\tilde{u}^*(z)(r^2-\tilde{a}^*\tilde{a})\tilde{u}(z)\}$ car $\tilde{u} \in C(\tilde{a})$.
D'autre part $|a|_\alpha < 1$ implique que $r^2 - \tilde{a}\tilde{a}^* > 0$ et $r^2 - \tilde{a}^*\tilde{a} > 0$, puisque le spectre de $r^2 - \tilde{a}\tilde{a}^*$ (resp $r^2 - \tilde{a}^*\tilde{a}$) dans A/α est identique au spectre de $r^2 - \tilde{a}\tilde{a}^*$ (resp $r^2 - \tilde{a}^*\tilde{a}$) dans $(A/\alpha)^+ \simeq A^+/\alpha^+$, alors il existe deux éléments hermitiens de A, h et k, tels que $r^2 - \tilde{a}\tilde{a}^* = \tilde{h}^2$ et $r^2 - \tilde{a}^*\tilde{a} = \tilde{k}^2$,(*proposition* 5.1).

D'où $r^2\tilde{u}(z)\circ\tilde{u}^*(z)-(\tilde{u}(z)\circ\tilde{a})\circ(\tilde{u}^*(z)\circ\tilde{a}^*)=\frac{1}{2}\{\tilde{u}(z)\tilde{h}^2\tilde{u}^*(z)+\tilde{u}^*(z)\tilde{k}^2\tilde{u}(z)\}$.
Donc $\tilde{f}(\tilde{a})$ est la classe d'équivalence modulo α de
$\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=r} f(z)\frac{1}{2}\{u(z)h^2u^*(z)+u^*(z)k^2u(z)\}\frac{|dz|}{r}$.
Or $u(z)h^2u^*(z)=(u(z)h)(u(z)h)^*\geq 0$
et $u^*(z)k^2u(z)=(ku(z))^*(ku(z))\geq 0$, ([8] théorème 5.1).
Donc $u(z)h^2u^*(z)+u^*(z)k^2u(z)\geq 0$, ([8] lemme 5.7).
Donc $f(z)\frac{1}{2}\{u(z)h^2u^*(z)+u^*(z)k^2u(z)\}\geq 0$.
Or l'ensemble des $h\geq 0$ est fermé dans A [8].
Donc $\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=r} f(z)\Re((z+a)\circ u(z))\frac{|dz|}{r}\geq 0$.
D'où $\tilde{f}(\tilde{a})\geq 0$ ie $\Re(\tilde{g}(\tilde{a})\geq\delta>0$.

2) Pour montrer 2) on se ramène à 1). Soit $g=\frac{1+f(z)}{1-f(z)}$; c'est une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $\Re g>0$ sur $\mathbb{D}$, d'après 1) on aura $\Re\tilde{g}(\tilde{a})>0$.
Or $\tilde{g}(\tilde{a})=(1+\tilde{f}(\tilde{a}))\circ(1-\tilde{f}(\tilde{a}))^{-1}$, théorème 3.1 iii).
$=(1+\tilde{f}(\tilde{a}))(1-\tilde{f}(\tilde{a}))^{-1}$ car $(1+\tilde{f}(\tilde{a}))$ et $(1-\tilde{f}(\tilde{a}))^{-1}$ appartiennent à une même sous algèbre associative et commutative.
Donc
$\Re\tilde{g}(\tilde{a})=(1-\tilde{f}(\tilde{a}))^{-1}(1-\tilde{f}(\tilde{a})\tilde{f}(\tilde{a})^*)(1-\tilde{f}(\tilde{a}))^{*-1}>0$.
Donc
$\Re\tilde{g}(\tilde{a})=(1-\tilde{f}(\tilde{a}))^{-1}(1-\tilde{f}(\tilde{a})\tilde{f}(\tilde{a})^*)(1-\tilde{f}(\tilde{a}))^{*-1}=\tilde{h}^2$ avec h un élément hermitien. (*proposition* 5.1).
Donc
$(1-\tilde{f}(\tilde{a})\tilde{f}(\tilde{a})^*)=\tilde{b}\tilde{h}^2\tilde{b^*}=(\tilde{b}\tilde{h})(\tilde{b}\tilde{h})^*$, avec $\tilde{b}=(1-\tilde{f}(\tilde{a}))^{-1}$.
Or $sp_\alpha(bh)(bh)^*\subset sp(bh)(bh)^*\subset[0,+\infty[$, ([8] théorème 5.1).
de plus $\tilde{b}\tilde{h}$ est inversible car $\tilde{b}$ et $\tilde{h}$ sont inversibles.
D'où
$(1-\tilde{f}(\tilde{a})\tilde{f}(\tilde{a})^*)>0$.
ce qui est équivalent à $|a_1|_\alpha<1$ avec $\tilde{a}_1=\tilde{f}(\tilde{a})$, (*proposition* 5.1). ■

Lemme 5.2 *Soient a un élément de A tel que $|a|_\alpha\leq 1$, f une fonction holomorphe sur un voisinage de $\bar{\mathbb{D}}=\{z\in\mathbb{C}/|z|\leq 1\}$. Alors pour $r<1$ assez voisin de 1 $\tilde{f}(r\tilde{a})=\tilde{f}(\tilde{a})+\tilde{b}_r$ avec $\lim_{r\to 1^-} b_r=0$.*

Preuve.
On a $\rho_\alpha(a)\leq|a|_\alpha\leq 1$, alors $sp_\alpha a\subset\bar{\mathbb{D}}$; soit $R>1$ tel que f soit holomorphe sur un voisinage de $\bar{B}(0,R)$, alors $\tilde{f}(\tilde{a})$ est la classe d'équivalence modulo α de
$\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=R} f(z)\Re((z+a)\circ u(z))\frac{|dz|}{R}$
où u est l'application de classe C^∞ de $\mathbb{C}\setminus sp_\alpha$ dans A^+ telle que $(z-\tilde{a})\tilde{u}(z)=1$ et $\tilde{u}(z)\in C(\tilde{a})$.
On a $||(r-1)a\circ u(z)||\leq(1-r)||a||||u(z)||$,
or $u(z)$ est bornée sur $|z|=R$, d'où l'existence d'un $r_\circ$ tel que si $r_\circ<r<1$ alors $||(r-1)a\circ u(z)||<\frac{1}{2}$.
Donc $1-(r-1)a\circ u(z)$ est inversible pour tout $r_\circ<r<1$ et pour tout z tel que $|z|=R$.
D'autre part, soit $u'(z)$ l'application de classe C^∞ de $\mathbb{C}\setminus sp_\alpha ra$ dans A^+ telle que

$(z - r\tilde{a})\tilde{u}'(z) = 1$ et $\tilde{u}'(z) \in C(r\tilde{a}) \subset C(\tilde{a})$.
Il est clair que $u'(z) - u(z) \circ (1 - (r-1)a \circ u(z))^{-1} \in \alpha$ pour tout z et r tel que $|z| = R$ et $r_\circ < r < 1$.
On a alors $\tilde{f}(r\tilde{a}) - \tilde{f}(\tilde{a})$ est la classe d'équivalence modulo α de
$\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=R} f(z)\Re((z+ra)\circ u'(z))\frac{|dz|}{R} - \frac{1}{2\pi}\int_{|z|=R} f(z)\Re((z+a)\circ u(z))\frac{|dz|}{R}$.
Donc $\tilde{f}(r\tilde{a}) - \tilde{f}(\tilde{a})$ est la classe d'équivalence modulo α de
$b_r = \frac{1}{2\pi}\int_{|z|=R} f(z)\Re\{(z+ra)\circ(u(z)\circ(1-(r-1)a\circ u(z))^{-1} - (z+a)\circ u(z)\}\frac{|dz|}{R}$,
pour tout $r_\circ < r < 1$.
En utilisant le fait que u et f sont bornées sur un voisinage du cercle $|z| = R$, et le fait que $||(1-(r-1)a\circ u(z))^{-1}|| \leq (1 - |r-1|||a \circ u(z)||)^{-1} \leq 2$, on montre que $\lim_{r\to 1^-} b_r = 0$. ■

Proposition 5.7 (Inégalité de Von Neumann) *Soient f une fonction holomorphe sur un voisinage de $\bar{\mathbb{D}}$ telle que $|f(z)| \leq 1$ pour tout $z \in \bar{\mathbb{D}}$, et a un élément de A tel que $|a|_\alpha \leq 1$. Alors il existe $a_1 \in A$ avec $\tilde{a}_1 = \tilde{f}(\tilde{a})$ tel que $|a_1|_\alpha \leq 1$.*

Preuve.
On peut supposer que f n'est pas constante sur $\mathbb{D}$, d'après le principe du maximum on a $|f(z)| < 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, donc d'après la proposition 5.6 pour tout $0 < r < 1$ il existe $a_r \in A$ avec $\tilde{a}_r = \tilde{f}(r\tilde{a})$ tel que $|a_r|_\alpha < 1$. D'après le lemme 5.2, il existe $r_\circ$ tel que si $r_\circ < r < 1$ alors $\tilde{f}(\tilde{r}a) = \tilde{f}(\tilde{a}) + \tilde{b}_r$ avec $\lim_{r\to 1^-} b_r = 0$.

Soit a_1 un élément de A tel que $\tilde{f}(\tilde{a}) = \tilde{a}_1$ alors $|a|_\alpha = |a_r - b_r|_\alpha \leq |a_r|_\alpha + |b_r|_\alpha < 1 + |b_r|_\alpha$ pour tout $r_\circ < r < 1$, d'où par passage à la limite $|a_1|_\alpha \leq 1$. ■

Références

[1] M. Akkar A. El Kinani M. Oudadess : *Calculs fonctionnels harmonique et analytique réel.* Ann. Sc math. Québec. (1988). vol 12. n 2. pp 151-169.

[2] M. Akkar H. Arroub : *Calcul fonctionnel harmonique dans une algèbre de Banach involutive quotient.* Bull. Belg. Math. Soc. 3 (1996) pp 521-535.

[3] M. Akkar H. Arroub : *Applications du calcul fonctionnel harmonique dans une algèbre de Banach involutive quotient.* Bull. Belg. Math. Soc 3. (1996). pp 595-602.

[4] H. Arroub : *Calcul fonctionnel harmonique dans les algèbres quotients.* Thèse d'état.Sc. Math. Université Mohammed V, Rabat, (1997).

[5] A. Elkinani : *Holomorphic functions operating in hermitian Banach algebras.* Proc. Amer. Math. Soc. vol 111, n 4 (1991) pp 931-939.

[6] K. McCrimon : *Non commutative Jordan rings.* Trans. Amer. math. soc. (1)158, (1971). pp 1-33.

[7] A. M. Kaidi : *Bases para una teoria de las algebras no-associativas normadas.* Thèse doctorale. Université de Granada. Granada (1977).

[8] P.S. Putter and B. Yood : *Banach Jordan *-algebras.* Proc. London. Math. Soc. (3) 41 (1980) pp 21-44.

[9] H.H. Oslen and E.Stomer : *Jordan operator algebras.* Putmann Advanced Publishing (1984).

[10] L. Waelbroeck : *Quotient Banach space. Spectral theory.* Banach center publications. vol (8) Pwn-polish scientific publishers. Warasaw (1982) pp 553-562.

[11] L. Waelbroeck : *Holomorphic functional calculus and Quotient Banach algebras.* Studia Mathematica, tLXXV (1983) pp 273-286.

[12] K.A Zhevlakov A.M Slin' ko I.P Shestakov A.I Shirshov : *Rings that are nearly associative.* Acad. Press. New-York London. (1982).

Département de Mathématiques, Faculté des Sciences Dhar El Mehraz,
Université S.M Ben Abdellah, B.P 1796, Atlas-Fès, Maroc.
e.mail : atajmouati@yahoo.fr