Existence globale et décroissance polynomiale de l'énergie des solutions des équations de Kirchhoff-Carrier moyennement dégénérées avec des termes non-linéaires dissipatifs

Abbès Benaissa

Résumé

On étudie le problème aux limites à valeurs initiales pour l'équation de Kirchhoff-Carrier moyennement dégénérée avec des termes non-linéaires dissipatifs. Sous des conditions de taille des conditions initiales, On démontre que la solution est globale et unique. On détermine aussi la vitesse de décroissance de la solution.

Abstract

We study the initial-boundary value problem for mildly degenerate Kirchhoff-Carrier equation with nonlinear dissipative terms. We prove the existence and uniqueness of global solution for small data and we determine the decay rate of the solution.

1 Introduction

Soit Ω un ouvert borné avec une frontière régulière Γ, on considère le problème aux limites à valeurs initiales

$$(P) \qquad \begin{cases} u'' - \|\nabla_x u\|_2^{2\gamma}\Delta_x u + g(u') + f(u) = 0 \text{ dans } \Omega \times [0, +\infty[, \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma \times [0, +\infty[, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u'(x,0) = u_1(x) \text{ sur } \Omega, \end{cases}$$

Received by the editors January 2000.
Communicated by J. Mawhin.
1991 *Mathematics Subject Classification :* 35B40, 35L70, 35B37.
Key words and phrases : Mildly degenerate Kirchhoff-Carrier equations, Global existence, Polynomial decay, Nonlinear dissipative terms.

Lorsque $n = 1$, l'équation (P) modélise le mouvement transversal d'une corde vibrante. L'équation origine est :

$$\rho\, h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \tau\ \frac{\partial u}{\partial t} = \left(P_0 + \frac{E\ h}{2L}\int_0^L \left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right|^2\ ds\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f$$

où $0 \leq x \leq L$ et $t > 0$, $u(x,t)$ est le déplacement vertical du point x à l'instant t, ρ la densité de masse, h la surface de la section de la corde, L la longueur de la corde, P_0 la tension initiale de la corde, τ le module de la résistance, E le module de Young du matériel et f la force extérieure (par exemple l'action de la pesanteur). Lorsque $g = f = 0$, cette équation a été proposée en 1876 par le physicien allemand G. Kirchhoff [**14**].
Plusieurs auteurs ([**18**], [**24**],...) se sont attachés à l'étude systématique des problèmes relatifs à des équations du type

$$(*) \qquad u_{tt}(t,x) = \Phi\left(\int_P |\nabla_x u(t,x)|^2\ dx\right)\Delta_x u$$

sous la condition $\Phi(s) \geq m > 0$ exprimant le caractère hyperbolique strict de l'équation, et des résultats d'existence locale dans certains espaces de Sobolev ont pu être établis. Reprenant les travaux de S. I. Pohozaev [**23**] , dans un cadre abstrait, J. L. Lions a présenté une collection de problèmes liés à ces équations. Un de ces problème consiste à considérer ces équations sous une condition d'hyperbolicité faible ($\Phi(s) \geq 0$). Dans ce cadre A. Arosio-S. Spagnolo [**7**] et P. D' Ancona-S. Spagnolo [**9**] (voir aussi [**11**] et [**12**]) ont donné une réponse positive dans la classe des fonctions deux fois dérivables par rapport au temps et analytiques par rapport aux variables d'espaces x. D'autres auteurs ont étudié dans des espaces de Sobolev le cas "moyennement dégénéré" ou le cas de "la bonne dégénérescence", (voir H. R. Crippa [**8**], Y. Ebihara-L. A. Medeiros-M. M. Miranda [**10**], L. A. Medeiros-M. M. Miranda [**19**], Y. Yamada [**25**], T. Yamazaki [**26**], A. Arosio-S. Garavaldi [**6**], et ils ont prouvé l'existence locale de la solution. Pour traiter l'existence globale des équations de Kirchhoff moyennement dégénérées, il est naturel d'ajouter un terme dissipatif (par exemple u', $-\Delta_x u'$, $\Delta_x^2 u$).

Dans [**1**] M. Aassila a étudié le problème (P) lorsque $f \equiv 0\,(\gamma = 1)$. Dans [**3**] M. Aassila et l'auteur ont réussi à généraliser le travail [**1**] au cas où le coefficient $\|\nabla_x u\|_2^2$ est remplacé par $\Phi(\|\nabla_x u\|_2^2)$ avec Φ une fonction localement Lipschitzienne ($\Phi \geq 0$) et ils ont prouvé que l'énergie ne tend pas en générale vers zéro et sous la condition supplémentaire $\Phi(0) = 0$, ils ont prouvé la stabilité asymptotique forte de la solution.

Dans ce travail, on se propose d'étudier dans $[0, +\infty[\times\Omega$ le problème aux limites à valeurs initiales (P), avec des conditions sur la taille des conditions initiales. On prouvera l'existence et l'unicité d'une solution globale faible dans des espaces de Sobolev en combinant la méthode de Faedo-Galerkin et la méthode de M. Nakao [**20**], qui consiste à estimer la décroissance de l'energie de la solution.

2 Notions préliminaires

Lemme 2.1 (Inégalité de Sobolev-Poincaré). *Soit α un nombre avec $0 \leq \alpha < +\infty$ $(N = 1, 2)$ ou $0 \leq \alpha \leq \dfrac{4}{N-2}(N \geq 3)$. Alors, il existe une constante $C(\alpha, \Omega)$ telle que*

$$\|u\|_{\alpha+2} \leq C(\alpha, \Omega)\|\nabla_x u\|_2 \quad \textit{pour } u \in H_0^1(\Omega).$$

Lemme 2.2 (Inégalité de Gagliardo-Nirenberg). *Soient r, p et q des nombres avec $1 \leq r < p \leq \infty$ et $q \leq p$. Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\|u\|_p \leq C\|u\|_{W^{m,q}}^{\theta}\|u\|_r^{1-\theta} \quad \textit{pour } u \in W^{m,q} \bigcap L^r.$$

avec

$$\theta = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right)\left(\frac{m}{n} + \frac{1}{r} - \frac{1}{q}\right)^{-1}$$

pourvu que $0 < \theta \leq 1$ (nous supposons que $0 < \theta < 1$ si $p = \infty$).

Lemme 2.3. *Soit $\phi(t)$ une fonction positive décroissante dans $[0, T]$, $T > 1$, satisfaisant*

$$\phi(t)^{1+\alpha} \leq C_0(1 + t)^r(\phi(t) - \phi(t + 1)) \textit{ dans } [0, T]$$

où C_0 est une constante positive, α et r deux constantes positives. Alors, on a :
(i) Si $\alpha > 0$ et $0 \leq r < 1$, alors

$$\phi(t) \leq (\phi(0)^{-\alpha/(1-r)} + \alpha C_0^{-1}(t - 1)^+)^{-(1-r)/\alpha} \textit{ dans } [0, T]$$

3 Notations et résultats

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ avec une frontière régulière Γ. $L^2(\Omega)$ représente l'espace des fonctions de carré intégrable sur Ω muni du produit scalaire $(.,.)$ et la norme $\| \,.\, \|_2$, sur l'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$, nous considérons la norme suivante

$$\|u\|_{H_0^1}^2 = \|\nabla_x u\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dx$$

et le produit scalaire associé :

$$(u, v)_{H_0^1} = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} dx.$$

Soit $A = -\Delta$ l'opérateur de Laplace sur $L^2(\Omega)$, $D(-\Delta) = \{u \in H_0^1(\Omega); \Delta_x u \in L^2(\Omega)\} = H_0^1(\Omega) \bigcap H^2(\Omega)$, A possède les propriétés suivantes :
(a) $\exists m_0 > 0$ telle que $(-\Delta_x u, u) \geq m_0\|u\|_2^2 \quad \forall u \in H_0^1 \bigcap H^2(\Omega)$,
(b) $(-\Delta_x u, u) = \|\nabla_x u\|_2^2$, $\forall u \in H_0^1 \bigcap H^2(\Omega)$,
(c) Il existe une suite $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de nombres réels et une suite $(\omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de $L^2(\Omega)$ telle

que :

$$\begin{cases} m_0 \leq \lambda_1^2 \leq \lambda_2^2 \leq \ldots \leq \lambda_j^2 \ldots \\ -\Delta\omega_j = \lambda_j^2 \omega_j, \ \forall j \in \mathbb{N} \\ \lim\limits_{j \to +\infty} \lambda_j^2 = +\infty \end{cases}$$

$\{\omega_j\}_j$ est un système orthonormal complet dans $L^2(\Omega)$ et orthogonal dans $H_0^1(\Omega)$ et dans $H_0^1(\Omega) \bigcap H^2(\Omega)$

On supposera que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue croissante et vérifie les hypothèses suivantes :

$$g(0) = 0, \tag{1}$$

$$g'(x) \geq \tau > 0, \tag{2}$$

$$|g(x)| \leq c_1 |x|^q, \tag{3}$$

où c_1 et τ sont deux constantes et $q \geq 1$ telle que $(n-2)q \leq n+2$.
$f(u)$ satisfait l'hypothèse suivante :
$f(u)$ est une fonction de classe C^1 telle que

$$\begin{array}{l} \displaystyle\int_\Omega f(u)u\,dx \geq k_0^{-1} \int_\Omega F(u)\,dx \geq 0, \text{ où } F(u) \equiv 2\int_0^u f(\eta)\,dx \\ |f(u)| \leq k_1 |u|^{\alpha+1}, \quad |f'(u)| \leq k_2 |u|^\alpha \end{array} \tag{4}$$

Théorème 3.1. *Supposons que $N = 3$, et que α et γ satisfait la relation*

$$\gamma \geq 1 \quad et\ \alpha + 2 > 4\gamma. \tag{5}$$

Supposons que les conditions (1), (2) et (3) sont satisfaites. Pour toute donnée initiale $(u_0, u_1) \in H^2 \bigcap H_0^1 \times H_0^1 \bigcap L^{2q}$ vérifiant

$$u_0 \neq 0, \tag{6}$$

$$\begin{array}{l} \{d_1 E(u_0,u_1)^{(\gamma-1)/2(\gamma+1)})^{\alpha-2} + (2\tau-1)^{\alpha-2} d_2 E(u_0,u_1)^{(\alpha+2-4\gamma)/2(\gamma+1)}\}^2 \\ \times \left\{ \dfrac{\|\nabla_x u_1\|_2^2}{\|\nabla_x u_0\|_2^{2\gamma}} + \|\Delta_x u_0\|_2^2 \right\}^{\alpha-2} < \frac{(2\tau-1)^{\alpha-2}}{2}. \end{array} \tag{7}$$

où

$$F(0) = \frac{\|\nabla_x u_1\|_2^2}{\|\nabla_x u_0\|_2^{2\gamma}} + \|\Delta_x u_0\|_2^2,$$

et avec certaines constantes d_1 et d_2 qui dépendent de α, γ, k_0, k_2, c_*, alors, le problème (P) admet une solution globale unique faible

$$u \in W^{2,\infty}([0,+\infty[; L^2) \bigcap W^{1,\infty}([0;+\infty[; H_0^1) \bigcap L^\infty([0;+\infty[; H^2 \bigcap H_0^1)$$

et on a :

$$\|\nabla_x u(t)\|_2^2 > 0 \ dans\ [0,+\infty[. \tag{8}$$

Théorème 3.2. *En plus des hypothèses du théorème 3.1, nous supposons que*

$$|g(x)| \leq c_2|x| \quad si\ |x| \leq 1 \quad (qui\ découle\ de\ (3)), \tag{9}$$

alors, l'energie de u :

$$E(t) = E(u(t), u'(t)) = \|u'(t)\|^2 + \frac{1}{\gamma+1}\|\nabla_x u(t)\|^{2(\gamma+1)} + \int_\Omega F(u)\,dx$$

vérifie l'estimation :

$$\forall t \geq 0, \qquad E(t) \leq C(1+t)^{-1-\frac{1}{\gamma}}.$$

Théorème 3.3. *Supposons que $N = 1, 2$, et que α et γ satisfaisant la relation*

$$\alpha + 1 - (n-1)\varepsilon > 2\gamma. \tag{10}$$

Supposons que les conditions (1), (2) et (3) sont satisfaites. Pour toute donnée initiale $(u_0, u_1) \in H^2 \bigcap H_0^1 \times H_0^1 \bigcap L^{2q}$ vérifiant

$$u_0 \neq 0, \tag{11}$$

$$\begin{aligned} &d_1 E(u_0,u_1)^{(\gamma-1)/2(\gamma+1)})\{F(0)^{(1-(n-1)\varepsilon)} + \\ &\tilde{d}_2 E(u_0,u_1)^{(\alpha+1-(n-1)\varepsilon-2\gamma)/(\gamma+1)}\}^{\frac{1}{(2(1-(n-1)\varepsilon))}} < \tfrac{2\tau-1}{2} \end{aligned} \tag{12}$$

et avec certaines constantes d_1 et d_2 qui dépendent de α, γ, k_0, k_2, c_*, alors, on a la même conclusion que les théorèmes 3.1 et 3.2

4 Démonstration des résultats

Preuve du théorème 3.1.

On va utiliser la méthode de Faedo-Galerkin. Soient (w_j) les fonctions propres de $-\Delta_x$. On cherche $u_m(t)$ solution approchée du problème sous la forme

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm} w_j$$

les g_{im} étant à déterminer par les conditions :

$$\begin{cases} (u''_m(t) - (m^{-1} + \|\nabla_x u_m(t)\|_2^{2\gamma})\Delta_x u_m(t) + g(u'_m(t)) + f(u_m(t)), w_j) = 0, \\ 1 \leq j \leq m, \end{cases} \tag{13}$$

$$u_m = u_{0m} = \sum_{j=1}^{m} (u_0, w_j) w_j \to u_0 \text{ dans } H_0^1 \bigcap H^2 \text{ lorsque } m \to +\infty, \tag{14}$$

$$u'_m = u_{1m} = \sum_{j=1}^{m} (u_1, w_j) w_j \to u_1 \text{ dans } H_0^1 \bigcap L^{2q} \text{ lorsque } m \to +\infty. \tag{15}$$

D'après les résultats généraux sur les systèmes d'équations différentielles, on est assuré de l'existence d'une solution locale de (13), (14) et (15) qui se prolonge en un intervalle maximal $[0, t_m[$ par le lemme de Zorn puisque les termes nonlinéaires dans (13) sont continus localement Lipschitziens. Les estimations a priori qui suivent montrerons que $t_m = T$.

i) Estimations a priori 1.

On multiplie l'équation (13) d'indice j par $2g'_{jm}$ et l'on somme en j. Il vient

$$\frac{d}{dt}\left(\|u'_m(t)\|_2^2+\frac{1}{m}\|\nabla_x u_m(t)\|_2^2+\frac{1}{\gamma+1}\|\nabla_x u_m(t)\|_2^{2(\gamma+1)}+2\int_\Omega\int_0^{u_m(t)}f(s)\,ds\,dx\right)+$$
$$2\int_\Omega g(u'_m(t))u'_m(t)\,dx=0,$$

d'où

$$\begin{aligned}&\|u'_m(t)\|_2^2+\tfrac{1}{\gamma+1}\|\nabla_x u_m(t)\|_2^{2(\gamma+1)}+2\int_\Omega\int_0^{u_m(t)}f(s)\,ds\,dx+2\int_0^t\int_\Omega g(u'_m)u'_m\,dsdx\\&\leq\|u_1\|_2^2+\frac{1}{\gamma+1}\|\nabla_x u_0\|_2^{2(\gamma+1)}+\|\nabla_x u_0\|_2^2+2\int_\Omega\int_0^{u_{0m}}f(s)\,ds\,dx,\end{aligned}\tag{16}$$

d'ici, on obtient

$$\|u'_m(t)\|_2,\quad \|\nabla_x u_m(t)\|_2\leq c.\tag{17}$$

où c est une constante indépendante de m. On en déduit que $t_m=T$. Utilisant (3) et (16), on en déduit :

$$u'_m g(u'_m)\text{ demeure dans un borné de }L^1(\Omega\times[0,T]),\tag{18}$$

$$g(u'_m)\text{ demeure dans un borné de }L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega\times[0,T]).\tag{19}$$

On définit l'énergie du problème (13)-(15) par

$$E_m(t)=\|u'_m(t)\|_2^2+\frac{1}{m}\|\nabla_x u_m(t)\|_2^2+\frac{1}{\gamma+1}\|\nabla_x u_m(t)\|_2^{2(\gamma+1)}+2\int_\Omega\int_0^{u_m(t)}f(s)\,ds\,dx\tag{20}$$

En utilisant (1) et (2), on en déduit que $E_m(t)$ est décroissante et on a

$$E_m(t)\leq E_m(0)$$

Ainsi, on obtient

$$\|\nabla_x u_m(t)\|_2\leq((\gamma+1)E_m(t))^{\frac{1}{2(\gamma+1)}}\leq((\gamma+1)E_m(0))^{\frac{1}{2(\gamma+1)}}\tag{21}$$

ii) Estimations a priori 2.

Lemme 4.1. *Soit $u_m(t)$ solution du problème (13)-(15) dans $[0,T[$. Alors on a*

$$E(u_m(t))\leq\left\{E_m(0)^{-\dfrac{\gamma}{\gamma+1}}+d_0(t-1)^+\right\}^{-\dfrac{\gamma+1}{\gamma}}\tag{22}$$

où $d_0^{-1}\equiv C^{-1}\dfrac{\gamma}{\gamma+1}\left(1+E_m^{\dfrac{2\gamma}{2\gamma+1}}(0)+E_m^{\dfrac{q-1}{q+1}\times\dfrac{2\gamma+2}{2\gamma+1}}(0)\right)^{-\dfrac{2\gamma+1}{\gamma+1}}$ *dans* $[0,T[$.

Preuve

On multiplie l'équation (13) d'indice j par $2g'_{jm}$ et l'on somme en j. Il vient

$$E'_m(t) + 2\int_\Omega u'_m g(u'_m)\,dx = 0. \tag{23}$$

En intégrant (23) dans $[t, t+1]$, on obtient

$$2\int_t^{t+1}\int_\Omega g(u'_m)u'_m\,dx = E_m(t) - E_m(t+1) \equiv D_m^2(t). \tag{24}$$

En appliquant le théorème des valeurs moyennes au terme qui se trouve à gauche de l'inégalité ci-dessus, alors il existe deux nombres $t_1 \in [t, t+\frac{1}{4}]$, $t_2 \in [t+\frac{3}{4}, t+1]$ telles que

$$\int_\Omega g(u'_m(t_i))u'_m(t_i)\,dx \le 4D_m^2(t) \quad \text{pour } i = 1, 2$$

Multipliant l'équation (13) d'indice j par $2g_{jm}$ et l'on somme en j, il vient après intégration sur $[t_1, t_2]$

$$\begin{aligned}
I_m &= \int_{t_1}^{t_2}\left(\|\nabla_x u_m\|_2^{2(\gamma+1)} + \int_\Omega f(u_m)u_m\,dx\right)ds + \frac{1}{m}\int_{t_1}^{t_2}\|\nabla_x u_m\|\,ds \\
&= \int_{t_1}^{t_2}\|u'_m\|_2^2\,ds + (u'_m(t_1), u_m(t_1)) - (u'_m(t_2), u_m(t_2)) - \int_{t_1}^{t_2}(g(u'_m(s)), u_m(s))\,ds \\
&\le CD_m^2(t) + 4D_m(t)\sup_{t_1\le s\le t_2}\|u_m(s)\| - \int_{t_1}^{t_2}(g(u'_m(s)), u_m(s))\,ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega g(u'_m)u_m\,dx\,ds &\le \int_{t_1}^{t_2}\int_{\{|u'_m|\le 1\}} g(u'_m)u_m\,dx\,ds + \int_{t_1}^{t_2}\int_{\{|u'_m|\ge 1\}} g(u'_m)u_m\,dx\,ds \\
&\le \int_{t_1}^{t_2}\int_{\{|u'_m|\le 1\}} C|u'_m||u_m|\,dx\,ds + \int_{t_1}^{t_2}\int_{\{|u'_m|\ge 1\}} |g(u'_m)||u_m|\,dx\,ds
\end{aligned}$$

on a aussi

$$\begin{aligned}
\int_{\{|u'_m|\ge 1\}} |u_m g(u'_m)|\,dx &\le \left(\int_{\{|u'_m|\ge 1\}} |u_m|^{q+1}\,dx\right)^{\frac{1}{q+1}}\left(\int_{\{|u'_m|\ge 1\}} |g(u'_m)|^{\frac{q+1}{q}}\,dx\right)^{\frac{q}{q+1}} \\
&\le \|u_m\|_{L^{q+1}}\left(\int_{\{|u'_m|\ge 1\}} |u'_m||g(u'_m)|\,dx\right)^{\frac{q}{q+1}}
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
&\int_{t_1}^{t_2}\|u_m\|_{L^{q+1}}\left(\int_{\{|u'_m|\ge 1\}} |u'_m||g(u'_m)|\,dx\right)^{\frac{q}{q+1}} ds \\
&\le \sup_{t\in[t_1,t_2]}\|u_m\|_{L^{q+1}}\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_{\{|u'_m|\ge 1\}} |u'_m||g(u'_m)|\,dx\right)^{\frac{q}{q+1}} ds \\
&\le (t_2 - t_1)^{\frac{1}{q+1}}\left(\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega u'_m g(u'_m)\,dx\,ds\right)^{\frac{q}{q+1}} \\
&\le C\sup_{t\in[t_1,t_2]}\|u_m\|_{L^{q+1}} D_m^{\frac{2q}{q+1}}
\end{aligned}$$

on obtient alors

$$\begin{aligned}
&I_m \le C\ D_m^2(t) + C'\ D_m(t)\sup_{t_1\le s\le t_2}\|u_m\|_2 \\
&+C\sup_{t_1\le s\le t_2}\|u_m(s)\|_{L^{q+1}} D_m^{\frac{2q}{q+1}}(t) \\
&\le C\ D_m^2(t) + C'\ D_m(t)E_m^{\frac{1}{2(\gamma+1)}} + C''\ D_m^{\frac{2q}{q+1}}(t)E_m^{\frac{1}{2(\gamma+1)}}(t)
\end{aligned} \tag{25}$$

on obtient alors à partir de (24) et (25) :

$$\begin{aligned}&\int_{t_1}^{t_2} E_m(t)\,ds = \int_{t_1}^{t_2} \|u'_m\|_2^2\,ds + m^{-1}\int_{t_1}^{t_2} \|\nabla_x u_m\|_2^2\,ds\\ &+\frac{1}{\gamma+1}\int_{t_1}^{t_2} \|\nabla_x u_m\|_2^{2(\gamma+1)}\,ds + 2\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega\int_0^{u_m} f(s)\,ds\,dx\,dt\\ &\le C\left(D_m^2(t) + D_m(t)E_m^{\frac{1}{2(\gamma+1)}} + D_m^{\frac{2q}{q+1}}(t)E_m^{\frac{1}{2(\gamma+1)}}\right).\end{aligned} \tag{26}$$

On multiplie l'équation (13) d'indice j par $2g'_{jm}$ et l'on somme en j. Il vient après intégration sur $[t_1, t_2]$

$$E_m(t) = E_m(t_2) + \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega g(u'_m)u'_m\,dx\,ds \tag{27}$$

Comme $t_2 - t_1 \ge \dfrac{1}{2}$, on obtient que

$$\int_{t_1}^{t_2} E_m(s)\,ds \ge \int_{t_1}^{t_2} E_m(t_2)\,ds = (t_2-t_1)E_m(t_2) \ge \frac{1}{2}E_m(t_2).$$

Ainsi on a

$$E_m(t_2) \le 2\int_{t_1}^{t_2} E_m(s)\,ds. \tag{28}$$

Il s'ensuit de (26), (27) et (28) que

$$\begin{aligned}E_m(t) &\le 2\int_{t_1}^{t_2} E_m(s)\,ds + \int_t^{t+1} g(u_m(s))u_m(s)\,ds\\ &\le C\left(D_m^2(t) + D_m(t)E_m^{\frac{1}{2(\gamma+1)}} + D_m^{\frac{2q}{q+1}}(t)E_m^{\frac{1}{2(\gamma+1)}}\right).\end{aligned}$$

Utilisant l'inégalité de Young, on obtient

$$\begin{aligned}&E_m(t) \le C\left(D_m^2(t) + D_m^{\frac{2\gamma+2}{2\gamma+1}}(t) + \left(D_m^{\frac{2q}{q+1}}(t)\right)^{\frac{2\gamma+2}{2\gamma+1}}\right)\\ &C\left(1 + E_m^{2-\frac{2\gamma+2}{2\gamma+1}}(0) + E_m^{\frac{q-1}{q+1}\frac{2\gamma+2}{2\gamma+1}}(0)\right)D_m^{\frac{2\gamma+2}{2\gamma+1}}(t)\end{aligned}$$

donc

$$E_m^{1+\frac{\gamma}{\gamma+1}}(t) \le C\left(1 + E_m^{\frac{2\gamma}{2\gamma+1}}(0) + E_m^{\frac{q-1}{q+1}\frac{2\gamma+2}{2\gamma+1}}(0)\right)^{\frac{2\gamma+1}{\gamma+1}}(E_m(t) - E_m(t+1)). \tag{29}$$

Alors, en appliquant le lemme 2.3 à (29), on a

$$E_m(t) \le \{E_m(0)^{-\dfrac{\gamma}{\gamma+1}} + d_0(t-1)^+\}^{-\dfrac{\gamma+1}{\gamma}}$$

où $d_0^{-1} \equiv C^{-1}\dfrac{\gamma}{\gamma+1}\left(1 + E_m^{\dfrac{2\gamma}{2\gamma+1}}(0) + E_m^{\dfrac{q-1}{q+1}\times\dfrac{2\gamma+2}{2\gamma+1}}(0)\right)^{-\dfrac{2\gamma+1}{\gamma+1}}$ dans $[0, T[$.

Posons

$$F_m(t) = \frac{\|\nabla_x u'_m(t)\|_2^2}{m^{-1} + \|\nabla_x u_m(t)\|_2^{2\gamma}} + \|\Delta_x u_m(t)\|_2^2 := f_m(t) + \|\Delta_x u_m(t)\|_2^2.$$

En dérivant $F_m(t)$ par rapport à t, nous obtenons

$$\begin{aligned} F_m'(t) &= \frac{2(-g(u_m'),-\Delta_x u_m')}{m^{-1}+\|\nabla_x u_m\|_2^{2\gamma}} - \frac{2\gamma(\nabla_x u_m,\nabla_x u_m')\|\nabla_x u_m'\|_2^2\|\nabla_x u_m\|_2^{2(\gamma-1)}}{(m^{-1}+\|\nabla_x u_m\|_2^{2\gamma})^2} \\ &-2\frac{(\nabla_x f(u_m(t)),\nabla_x u_m'(t))}{m^{-1}+\|\nabla_x u_m\|_2^{2\gamma}} \\ &= I_1(t)+I_2(t). \end{aligned} \tag{30}$$

On suppose que $N=3$, alors

$$\begin{aligned} I_1(t) &\leq k_2\||u_m(t)|^\alpha\nabla_x u_m(t)\|_2\|\nabla_x u_m'(t)\|_2 \\ &\leq k_2\|u_m(t)\|_{N\alpha}^\alpha\|\nabla_x u_m(t)\|_{2N/(N-2)}\|\nabla_x u_m'(t)\| \\ &\leq c_*^{\alpha+1}k_2\|\nabla_x u_m(t)\|^{\alpha(1-\theta)}\|\Delta_x u_m(t)\|^{\alpha\theta+1}\|\nabla_x u_m'(t)\| \end{aligned} \tag{31}$$

avec $\theta\equiv[(N-2)\alpha-2]^+/(2\alpha)$ $(0\leq\theta<1$ si $\alpha<2/[N-4]^+)$.
Puisque

$$f_m(t)=\frac{\|\nabla_x u_m'(t)\|_2^2}{m^{-1}+\|\nabla_x u_m(t)\|_2^{2\gamma}} \tag{32}$$

alors par (31) on a :

$$\begin{aligned} I_2(t) &\leq 2c_*^{\alpha+1}k_2\|\nabla_x u_m(t)\|^{\alpha(1-\theta)}\|\Delta_x u_m(t)\|^{\alpha\theta+1}\frac{\|\nabla_x u_m'(t)\|}{m^{-1}+\|\nabla_x u_m(t)\|^{2\gamma}} \\ &\leq 2c_*^{\alpha+1}k_2\|\nabla_x u_m(t)\|^{\alpha(1-\theta)-\gamma}\|\Delta_x u_m(t)\|^{\alpha\theta+1}f_m^{\frac12}(t) \\ &\leq (c_*^{\alpha}k_2)^2\|\nabla_x u_m(t)\|^{2(\alpha(1-\theta)-\gamma)}\|\Delta_x u_m(t)\|^{2(\alpha\theta+1)}+f_m(t) \end{aligned}$$

aussi, on a par (21)

$$I_1(t)\leq 2\gamma\|\nabla_x u_m(t)\|^{\gamma-1}f_m^{\frac32}(t)\leq 2\gamma\{(\gamma+1)E(0)\}^{(\gamma-1)/(2(\gamma+1))}f_m^{\frac32}(t).$$

Donc par (30) on obtient

$$\begin{aligned} &F_m'(t)+[(2\tau-1)-d_1E(0)^{(\gamma-1)/(2(\gamma+1))}f_m^{\frac12}(t)]f_m(t) \\ &\leq (c_*^{\alpha+1}k_2)^2\|\nabla_x u_m(t)\|^{2(\alpha(1-\theta)-\gamma)}\|\Delta_x u_m(t)\|^{2(\alpha\theta+1)} \end{aligned} \tag{33}$$

où $d_1=2\gamma(\gamma+1)^{(\gamma-1)/(2(\gamma+1))}$.
On va montrer que

$$(2\tau-1)-d_1E_m(0)^{(\gamma-1)/2(\gamma+1)}f_m^{\frac12}(t)>0 \text{ dans } [0,t_m[\tag{34}$$

Supposons que (34) n'est pas vérifiée sur $[0,t_m[$, donc il existe $t^*>0$ tel que

$$(2\tau-1)-d_1E_m(0)^{(\gamma-1)/2(\gamma+1)}f_m^{\frac12}(t^*)=0. \tag{35}$$

Alors, il s'ensuit de (33) que

$$\frac{d}{dt}F_m(t)\leq (c_*^{\alpha+1}k_2)^2\|\nabla_x u_m\|^{2(\alpha(1-\theta)-\gamma)}F_m(t)^{(\alpha\theta+1)}.$$

Ainsi, nous obtenons :

$$F_m(t)^{\frac12}\leq\left\{F_m(0)^{-\alpha\theta}-\alpha\theta(c_*^{\alpha+1}k_2)^2\int_0^t\|\nabla_x u_m\|^{2(\alpha(1-\theta)-\gamma)}\,ds\right\}. \tag{36}$$

Ici, nous supposons que $N \geq 3$ et $\alpha(1-\theta) > 2\gamma$, alors on remarque par (21) et (22) que

$$\begin{aligned} & \int_0^t \|\nabla_x u_m\|^{2(\alpha(1-\theta)-\gamma)}\, ds \leq \int_0^t \{(\gamma+1)E_m(s)\}^{(\alpha(1-\theta)-\gamma)/(\gamma+1)}\, ds \\ \leq\ & \int_0^t [(\gamma+1)\{E_m(0)^{-\gamma/(\gamma+1)} + d_0^{-1}[s-1]^+\}^{-(\gamma+1)/\gamma}]^{(\alpha(1-\theta)-\gamma)/(\gamma+1)}\, ds \\ =\ & \int_0^1 + \int_1^t \\ \leq\ & (\gamma+1)^{(\alpha(1-\theta)-\gamma)/(\gamma+1)} \Big\{ E_m(0)^{(\alpha(1-\theta)-\gamma)/(\gamma+1)} + \\ & \qquad \frac{\gamma}{\alpha(1-\theta)-2\gamma} d_0 E_m(0)^{(\alpha(1-\theta)-2\gamma)/(\gamma+1)} \Big\} \\ \leq\ & 2(\gamma+1)^{(\alpha(1-\theta)-\gamma)/(\gamma+1)} d_0 E_m(0)^{(\alpha(1-\theta)-2\gamma)/(\gamma+1)}. \end{aligned} \tag{37}$$

Puisque $\gamma \geq 1$ et $\alpha > 2$, on a $\theta = ((N-2)\alpha - 2)/(2\alpha) > 0$, et la relation $\alpha(1-\theta) > 2\gamma$ est équivalente à $(4-N)\alpha + 2 > 4\gamma$, et ainsi on peut prendre $N = 3$ et $\theta = (\alpha-2)/(2\alpha)$. Donc, si $N = 3$ et $\alpha + 2 > 4\gamma$ avec $\gamma \geq 1$, on obtient de (36) et (37) que

$$F_m(t)^{\frac{1}{2}} \leq \{F_m(0)^{-\frac{(\alpha-2)}{2}} - d_2 E_m(0)^{(\alpha+2-4\gamma)/(2(\gamma+1))}\}^{-1/(\alpha-2)}. \tag{38}$$

Si $d_2 E_m(0)^{(\alpha+2-4\gamma)/(2(\gamma+1))} < F_m(0)^{-\frac{(\alpha-2)}{2}}$ où $d_2 \equiv (\alpha-2)(c_*^{\alpha+1}k_2)^2 \times (\gamma+1)^{(\alpha+2-2\gamma)/(2(\gamma+1))} d_0$. Si (7) est vraie, alors on a

$$\begin{aligned} & \{(d_1 E_m(0)^{(\gamma-1)/(2(\gamma+1))})^{\alpha-2} + (2\tau-1)^{\alpha-2} d_2 E_m(0)^{(\alpha+2-4\gamma)/(2(\gamma+1))}\} F_m(0)^{\frac{\alpha-2}{2}} < \\ & \qquad < (2\tau-1)^{\alpha-2}. \end{aligned} \tag{39}$$

et

$$d_1 E_m(0)^{(\gamma-1)/(2(\gamma+1))} \{F_m(0)^{-\frac{(\alpha-2)}{2}} - d_2 E_m(0)^{(\alpha+2-4\gamma)/(2(\gamma+1))}\}^{-1/(\alpha-2)} < (2\tau-1). \tag{40}$$

Donc, si la donnée initiale (u_0, u_1) vérifie la condition (7), donc par (38) et (40) on tire que

$$d_1 E_m(0)^{(\gamma-1)/(2(\gamma+1))} f_m(t)^{\frac{1}{2}} \leq d_1 E_m(0)^{(\gamma-1)/(2(\gamma+1))} F_m(t)^{\frac{1}{2}} < (2\tau-1)$$

pour $0 \leq t \leq t^*$, ce qui contredit (35), et d'ici on a

$$F_m(t) \equiv \frac{\|\nabla_x u_m'(t)\|_2^2}{m^{-1} + \|\nabla_x u_m(t)\|_2^{2\gamma}} + \|\Delta_x u_m(t)\|_2^2 < (d_1 E_m(0)^{(\gamma-1)/(2(\gamma+1))})^{-2} \tag{41}$$

pour $0 \leq t \leq +\infty$.

ii) Estimations a priori 3.

On déduit de (13) :

$$\begin{aligned} \|u_m''(0)\|_2 \ &\leq\ \left(\frac{1}{m} + \|\nabla_x u_{0m}\|_2^{2\gamma}\right) \|\Delta_x u_{0m}\|_2 + \|g(u_{1m})\|_2 \\ &\leq\ (1 + \|\nabla_x u_{0m}\|_2^{2\gamma}) \|\Delta_x u_{0m}\|_2 + \|g(u_{1m})\|_2. \\ &\quad\ + k_1 \|u_{0m}\|_\infty^\alpha \|u_{0m}\| \\ &\leq\ (1 + \|\nabla_x u_{0m}\|_2^{2\gamma}) \|\Delta_x u_{0m}\|_2 + \|g(u_{1m})\|_2 + k_1 \|\Delta_x u_{0m}\|^\alpha \|\nabla_x u_{0m}\| \end{aligned}$$

D'après (3), $g(u_{1m})$ est borné dans $L^2(\Omega)$, et donc grâce à (14) et (15) :

$$\|u''_m(0)\|_2 \le C.$$

Dérivons (13) en t, il vient :

$$\begin{array}{c}(u'''_m(t) - 2\gamma\|\nabla_x u_m\|_2^{2(\gamma-1)}(\nabla_m u'_m(t), \nabla_x u_m(t))\Delta_x u_m(t) - \left(\frac{1}{m} + \right. \\ \left. \|\nabla_x u_m\|_2^{2\gamma}\right)\Delta_x u'_m(t) + u''_m(t) g'(u'_m) + u'_m f'(u_m), w_j).\end{array} \tag{42}$$

Multipliant par $2g''_{jm}(t)$ et sommant en j, on en déduit :

$$\begin{array}{l}\dfrac{d}{dt}\left(\|u''_m(t)\|_2^2 + \left(\dfrac{1}{m} + \|\nabla_x u_m(t)\|_2^{2\gamma}\right)\|\nabla_x u'_m(t)\|_2^2\right) + 2\displaystyle\int_\Omega u''^2_m g'(u'_m(t))\,dx \\ +2\displaystyle\int_\Omega u''_m u'_m f'(u_m) = 2\ \gamma\|\nabla_x u_m\|_2^{2(\gamma-1)}(\nabla_x u'_m(t), \nabla_x u_m(t))\|\nabla_x u'_m(t)\|_2^2 \\ +4\gamma\|\nabla_x u_m\|_2^{2(\gamma-1)}(\nabla_x u'_m(t), \nabla_x u_m(t))(\Delta_x u_m(t), u''_m(t)) \\ \le 2\gamma\|\nabla_x u_m\|_2^{2(\gamma-1)}\|\nabla_x u'_m(t)\|_2^3\|\nabla_x u_m(t)\|_2 + \\ 4\gamma\|\nabla_x u_m\|_2^{2(\gamma-1)}\|\nabla_x u'_m(t)\|_2\|\nabla_x u_m(t)\|_2\|\Delta_x u_m(t)\|_2\|u''_m(t)\|_2 \\ \le 2\gamma\|\nabla_x u_m\|_2^{2(\gamma-1)}\|\nabla_x u'_m(t)\|_2^3\|\nabla_x u_m(t)\|_2 \\ +8\ \gamma\|\nabla_x u_m\|_2^{4(\gamma-1)}\|\nabla_x u'_m(t)\|_2^2\|\nabla_x u_m(t)\|_2^2\|\Delta_x u_m(t)\|_2^2 + \dfrac{1}{2}\|u''_m(t)\|_2^2\end{array} \tag{43}$$

Utilisant l'inégalité suivante :

$$x\ y \le x^2 + \frac{1}{4}y^2 \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

donc, on obtient

$$\begin{array}{rcl}2\displaystyle\int_\Omega u''_m u'_m f'(u_m)\,dx & \le & \dfrac{1}{4}\|u''_m\|_2^2 + 4\|u''_m\|_\infty^{2\alpha}\|u'_m\|_2^2 \\ & \le & \dfrac{1}{4}\|u''_m\|_2^2 + 4\|\Delta_x u_m\|_2^{2\alpha}\|u'_m\|_2^2\end{array}$$

et alors

$$\begin{array}{l}\dfrac{d}{dt}\left(\|u''_m(t)\|_2^2 + \dfrac{1}{m}\|\nabla_x u'_m(t)\|_2^2 + \|\nabla_x u_m\|_2^{2\gamma}\|\nabla_x u'_m(t)\|_2^2\right) + \\ +2\displaystyle\int_\Omega u''^2_m g'(u'_m)\,dx \le g_m(t) + \|u''_m(t)\|_2^2,\end{array}$$

où

$$\begin{array}{rcl}g_m(t) & = & 2\ \gamma\|\nabla_x u_m\|_2^{2(\gamma-1)}\|\nabla_x u'_m(t)\|_2^3\|\nabla_x u_m(t)\|_2 \\ & & +8\ \gamma\|\nabla_x u_m\|_2^{4(\gamma-1)}\|\nabla_x u'_m(t)\|_2^2\|\nabla_x u_m(t)\|_2^2. \\ & & +4\|\Delta_x u_m\|_2^{2\alpha}\|u'_m\|_2^2.\end{array}$$

Grâce au lemme de Gronwall, on déduit alors :

$$\begin{array}{l}\|u''_m(t)\|_2^2 + \frac{1}{m}\|\nabla_x u_m(t)\|_2^2 + \|\nabla_x u_m\|_2^{2\gamma}\|\nabla_x u'_m(t)\|_2^2 \le \\ e^T\left(\|u''_m(0)\|_2^2 + \frac{1}{m}\|\nabla_x u_m(0)\|_2^2 + \|\nabla_x u_m(0)\|_2^{2\gamma}\|\nabla_x u'_m(0)\|_2^2\right) + e^T\int_0^T g_m(s)\,ds\end{array}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, et on obtient

$$u''_m(t) \text{ demeure dans un borné de } L^\infty_{loc}(0, +\infty; L^2(\Omega)). \tag{44}$$

iv) Passage à la limite.

D'après le théorème de Dunford-Pettis et des informations (17), (19), (41) et (44) on déduit que l'on peut extraire de u_m une suite que l'on note aussi u_m telle que

$$u_m \to u \quad \text{dans} \quad L^\infty_{loc}(0,\infty; H_0^1 \cap H^2) \text{ faible } * \tag{45}$$

$$u'_m \to u' \quad \text{dans} \quad L^\infty_{loc}(0,\infty; H_0^1) \text{ faible } * \tag{46}$$

$$u''_m \to u'' \quad \text{dans} \quad L^\infty_{loc}(0,\infty; L^2) \text{ faible } * \tag{47}$$

$$u'_m \to u' \quad \text{a.e. dans} \quad \Omega \times [0,T], \tag{48}$$

$$g(u'_m) \to \chi \quad \text{dans} \quad L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega \times (0,T)) \text{ faible } * \tag{49}$$

$$\|\nabla_x u_m\|_2^{2\gamma} \Delta_x u_m \to \psi \quad \text{dans} \quad L^\infty_{loc}(0,\infty; L^2) \text{ faible } * \tag{50}$$

pour des fonctions convenables $u \in L^\infty(0,T; H_0^1 \cap H^2)$, $\psi \in L^\infty(0,T; L^2)$ et $\chi \in L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega \times (0,T))$ pour tout $T \geq 0$. On va montrer que u est une solution du problème (P). Par (45)-(47), on déduit que

$$\int_\Omega u_m(0) w_j \, dx \to \int_\Omega u(0) w_j \, dx \quad \text{et} \quad \int_\Omega u'_m(0) w_j \, dx \to \int_\Omega u'(0) w_j \, dx$$

pour tout $j \geq 1$ fixé. Par (14)-(15) on déduit que $u(0) = u_0$ et $u'(0) = u_1$. Prouvons que $\psi = \|\nabla_x u\|_2^{2\gamma} \Delta_x u$ i.e.,

$$\|\nabla_x u_m\|_2^{2\gamma} \Delta_x u_m \to \|\nabla_x u\|_2^{2\gamma} \Delta_x u \quad \text{dans} \quad L^\infty_{loc}(0,+\infty; L^2) \text{ faible } * \,.$$

Pour $v \in L^2(0,T; L^2)$, on a :

$$\begin{aligned} &\int_0^T (\psi - \|\nabla_x u\|_2^{2\gamma} \Delta_x u, v) \, dt = \int_0^T (\psi - \|\nabla_x u_m\|_2^{2\gamma} \Delta_x u_m, v) \, dt \\ &+ \int_0^T \|\nabla_x u\|_2^{2\gamma} (\Delta_x u_m - \Delta_x u, v) \, dt \\ &+ \int_0^T (\|\nabla_x u_m\|_2^{2\gamma} - \|\nabla_x u\|_2^{2\gamma}) (\Delta_x u_m, v) \, dt, \end{aligned} \tag{51}$$

le premier et le deuxième terme dans (51) tendent vers zéro lorsque $m \to +\infty$, et pour le troisième terme on a

$$\begin{aligned} &\int_0^T (\|\nabla_x u_m\|_2^{2\gamma} - \|\nabla_x u\|_2^{2\gamma}) (\Delta_x u_m, v) \, dt \leq \\ &c \int_0^T (\|\nabla_x u_m - \nabla_x u\|_2)(\|\nabla_x u_m\|_2 + \|\nabla_x u\|_2) \|\Delta_x u_m\|_2 \|v\|_2 \, dt, \end{aligned}$$

comme (u_m) est bornée dans $L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega))$ et l'injection $H_0^1 \hookrightarrow L^2$ est compacte, on a

$$u_m \to u \quad \text{dans} \quad L^2(0,T; L^2) \text{ fortement },$$

de là

$$\int_0^T \int_\Omega (u''_m - \|\nabla_x u_m\|_2^{2\gamma} \Delta_x u_m) \; v \, dx \, dt \to \int_0^T \int_\Omega (u'' - \|\nabla_x u\|_2^{2\gamma} \Delta_x u) v \, dx \, dt$$

lorsque $m \to +\infty$ pour tout $v \in L^{q+1}(0,T;H_0^1)$. Montrons que

$$\int_0^T \int_\Omega v\ g(u'_m)\,dx\,dt \to \int_0^T \int_\Omega v\ g(u')\,dx\,dt \quad \text{lorsque} \quad m \to +\infty. \tag{52}$$

Il vient de (18) et le lemme de Fatou que $u'g(u') \in L^1(\Omega \times (0,T))$, ceci donne $g(u') \in L^1(\Omega \times (0,T))$. D'autre part, $g(u'_m) \to g(u')$ presque partout dans $\Omega \times [0,T]$. Soit $E \subset \Omega \times [0,T]$ et posons

$$E_1 = \left\{(x,t) \in E;\ g(u'_m(x,t)) \leq \frac{1}{\sqrt{|E|}}\right\}, \quad E_2 = E \setminus E_1,$$

où $|E|$ est la mesure de E. Si $M(r) := \inf\{|x|;\ x \in \mathbb{R} \ \text{ et } \ |g(x)| \geq r\}$,

$$\int_E |g(u'_m)|\,dxdt \leq \sqrt{|E|} + \left(M\Big(\frac{1}{\sqrt{|E|}}\Big)\right)^{-1} \int_{E_2} |u'_m g(u'_m)|\,dxdt.$$

Appliquant (18) on déduit que $\sup\limits_m \int_E |g(u'_m)|\,dxdt \to 0$ lorsque $|E| \to 0$. Par le théorème de convergence de Vitali on déduit que $g(u'_m) \to g(u')$ dans $L^1(\Omega \times (0,T))$, de là

$$g(u'_m) \to g(u') \quad \text{dans} \quad L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega \times [0,T])$$

ce qui implique (52).
Il reste à montrer que

$$f(u_m) \to f(u) \ \text{ dans } \ L^\infty_{loc}(0,\infty;L^2) \text{ faible } * .$$

Pourvu que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (f(u_m(t)) - f(u(t)))^2\,dx &\leq C\int_\Omega (|u_m(t)|^\alpha + |u(t)|^\alpha)^2 |u_m(t) - u(t)|^2\,dx \\
&\leq C(\|\Delta_x u_m(t)\|_2^\alpha + \|\Delta_x u(t)\|_2^\alpha \|\nabla_x u_m(t) - \nabla_x u(t)\|_2^2.
\end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^T (f(u_m) - f(u), v)\,dt &\leq \int_0^T \|f(u_m) - f(u)\|\|v\|\,dt \\
&\leq \left(\int_0^T \|f(u_m) - f(u)\|^2\,dt\right)^{\frac12} \left(\int_0^T \|v\|^2\,dt\right)^{\frac12}.
\end{aligned}$$

On a utilisé le fait que l'injection de $H_0^1 \bigcap H^2$ (resp H_0^1) dans H_0^1 (resp L^2) est compacte.

v) $\|\nabla_x u(t)\|_2 > 0$ pour $0 \leq t < +\infty$:

Lemme 4.2. *Si $v : [-T,T] \to H_0^1 \cap H^2$ une solution faible*

$$\begin{cases} v''(t) - \|\nabla v(t)\|_2^{2\gamma} \Delta v(t) + g(v'(t)) + f(v(t)) = 0 & -T \leq t \leq T, \\ v(0) = 0, \quad v'(0) = 0, \end{cases}$$

alors $v(t) = 0$ pour $t \in [-T,T]$.

Preuve. multipliant avec $2v'(t)$ nous obtenons

$$\frac{d}{dt}\left[\|v'(t)\|_2^2+\frac{1}{\gamma+1}\|\nabla v(t)\|_2^{2(\gamma+1)}+2\int_\Omega\int_0^v f(\eta)\,d\eta\,dx\right]+2\int_\Omega g(v')v'\,dx=0,$$

et une intégration de l'identité au dessus avec (2) donne alors :

$$\|v'(t)\|_2^2+\frac{1}{\gamma+1}\|\nabla v(t)\|_2^{2(\gamma+1)}+2\int_\Omega\int_0^v f(\eta)\,d\eta\,dx\le 2|\tau|\int_0^{|t|}\|v'(s)\|_2^2\,ds.$$

Grâce au lemme de Gronwall, on déduit alors $v'(t)=0$ et $v(t)=0$ pour $t\in[-T,T]$.■

Montrons que $\|\nabla_x u(t)\|_2>0$, $\forall t\ge 0$. Soit T un point tel que $\nabla_x u(T)=0$, l'estimation (41) implique que $\frac{\|\nabla_x u'(t)\|_2^2}{\|\nabla_x u(t)\|_2^{2\gamma}}$ est borné, donc on déduit que $\nabla u'(T)=0$. Ainsi le lemme au dessus implique que $u(t)=0$ $(0\le t\le T)$, ce qui contredit $u_0\ne 0$. Ainsi, on obtient $\|\nabla_x u(t)\|_2>0$ pour tout $t\ge 0$.

vi) Unicité

L'unicité est assurée par un procédé classique en utilisant le fait que $\|\nabla_x u\|_2^{2\gamma}$ est localement Lipschitzienne et g est monotone.

Preuve du théorème 3.2.

On déduit la décroissance de l'énergie par l'estimation (22), aussi puisque $F(t)$ est bornée, alors on a

$$\begin{aligned}\|\nabla_x u'(t)\|_2^2 &\le C\|\nabla_x u(t)\|_2^{2\gamma}\\ &\le C(1+t)^{-1}.\end{aligned}$$

Preuve du théorème 3.3.

La démonstration du théorème se fait de la même manière que les théorèmes 3.1 et 3.2. On va estimer seulement le terme $I_2(t)$. En appliquant le lemme 2.1, on obtient

$$\begin{aligned}|(\nabla_x f(u_m),\nabla_x u_m')| &\le k_2\|u_m\|_\infty^\alpha\|\nabla_x u_m\|_2\|\nabla_x u_m'\|_2\\ &\le c_*^\alpha k_2\|\nabla_x u_m\|_2^{\alpha+1-(n-1)\varepsilon}\|\Delta_x u_m\|_2^{(n-1)\varepsilon}\|\nabla_x u_m'\|_2\end{aligned}$$

pour ε assez petit. Ainsi on obtient

$$I_2(t)\le(c_*^\alpha k_2)^2\|\nabla_x u_m(t)\|_2^{2(\alpha+1-(n-1)\varepsilon-\gamma)}\|\Delta_x u_m\|_2^{(n-1)\varepsilon}\|\nabla_x u_m'(t)\|_2+f_m(t).$$

Donc, il s'ensuit que

$$\begin{aligned}F_m^{\frac12} \le &\Big\{H_m(0)^{(1-(n-1)\varepsilon)}\\ &+(1-(n-1)\varepsilon)(c_*^\alpha k_2)^2\int_0^t\|\nabla_x u_m(s)\|_2^{2(\alpha+1-(n-1)\varepsilon-\gamma)}\,ds\Big\}^{\frac{1}{2(2(1-(n-1)\varepsilon))}}.\end{aligned}$$

Si $\alpha + 1 - (n-1)\varepsilon > 2\gamma$, on remarque par (21) et (22) que

$$F_m^{\frac{1}{2}}(t) \leq \{F_m^{\frac{1}{2}}(0)^{2(1-(n-1)\varepsilon)} + \tilde{d}_2 E_m(0)^{(\alpha+1-(n-1)\varepsilon-\frac{2\gamma}{(\gamma+1)})}\}^{\frac{1}{(2(1-(n-1)\varepsilon))}}.$$

avec $\tilde{d}_2 \equiv 2(1-(n-1)\varepsilon)(c_*^\alpha k_2)^2(\gamma+1)^{(\alpha+1-(n-1)\varepsilon-\gamma)/(\gamma+1)} d_0$. Ainsi, si on suppose qu'on a (12), alors on obtient les mêmes conclusions que les théorèmes 3.1 et 3.3.

Remerciements : *L'auteur remercie les professeurs M. Aassila de l'université de Strasbourg (IRMA) et M. Mechab de l'université de Sidi Bel Abbès pour leur première lecture et leur encouragement pour l'accomplissement de ce travail.*

Références

[1] M. Aassila, *Global existence and decay properties of solutions to degenerate wave equations with dissipative terms,* Bulletin of the Australian Math. Soc. **60** (1999), 1-10.

[2] M. Aassila, *Asymptotic behavior of solutions to a quasilinear hyperbolic equation with nonlinear damping.* EJQTDE, (1998)-7, P. 1-12.

[3] M. Aassila & A. Benaissa, *Existence globale et comportement asymptotique des solutions des équations de Kirchhoff moyennement dégénérées avec un terme nonlinear dissipatif.* Funkcialag Ekvacioj (A paraître).

[4] A. Benaissa, *The Cauchy problem for Kirchhoff equation type.* Workshop on qualitative properties for nonlinear hyperbolic operators- Degeneracies, Nonlocal terms and Global solvability, 29 march to 04 april 1998, Freiberg(Germany).

[5] A. Arosio, *Averaged evolution equations. The Kirchhoff string and its treatment in scales of Banach spaces.* Proceeding of the "2^{nd} workshop on functional-analytic methods in complex analysis"(Trieste, 1993), World Scientific, Singapore.

[6] A. Arosio & S. Garavaldi, *On the mildly degenerate Kirchhoff String .* Mathematical Methods in the Applied Sciences, **14**, (1991), p. 177-195

[7] A. Arosio, S. Spagnolo, *Global solutions to the Cauchy problem for a nonlinear hyperbolic equation*, in 'Nonlinear P.D.E.'and Their Application'. Vol. VI, Collège de France, Seminar, Research Notes Math. Vol. 109, Eds H. Brezis and J. L. Lions, Pitman, Boston, (1984) p. 1-26.

[8] H. R. Crippa, *On local solutions of some mildly degenerate hyperbolic equations.* Nonlinear Analysis, **21**, (1993)- 8, p. 565-574.

[9] P. D'Ancona, S. Spagnolo , *Global solvability for the degenerate Kirchhoff equation with real analytic data.* Invent. Math., **108**, (1992)- 2, p. 247-262.

[10] Y. Ebihara, L. A. Medeiros, & M. M. Miranda *Local solutions for nonlinear degenerate hyperbolic equation.* Nonlinear Analysis, **10**, (1986)- 1, p. 27-40.

[11] D. Gourdin, M. Mechab , *Problème de Goursat non linéaire dans les classes de Gevrey, pour des équations de Kirchhoff généralisées.* J. Math. Pures Appl., 75, (1996) p. 569-593.

[12] D. Gourdin & M. Mechab, *Problème de Cauchy pour des équations de Kirchhoff généralisées.* Comm. P. D. E., **23**(5& 6), (1998), p. 761-776.

[13] M. Hosoya & Y. Yamada, *On some nonlinear wave equations II : global existence and energy decay of solutions.* J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **38** (1991), p. 239-250.

[14] G. Kirchhoff, Vorlesungen *ü*ber Mechanik. Leipzig, Teubner, (1883).

[15] J. L. Lions, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non-linéaires. Dunod, Paris, 1969.

[16] J. L. Lions, *On some questions in boundary value problem of mathematical physics.* in Contemporary Developments in Cont. Mech. and P. D. E, G. M. de la Penha, L. A. Medeiros eds, (1978), p. 284-346.

[17] L. A. Medeiros, *On a new class of nonlinear wave equations.* J. Math. Anal. Appl., **69**, (1979)- 1, p. 252-262.

[18] G. P. Menzala, *On classical solutions of a quasilinear hyperbolic equation.* Nonlinear Analysis, **3**, (1979)- 5, p. 613-627.

[19] L. A. Meideiros & M. Miranda, *Solutions for the equations of nonlinear vibrations in Sobolev spaces of fractionary order.* Computational Applied Math., **6**, (1987), p. 257-26

[20] M. Nakao, *A difference inequality and its applications to nonlinear evolution equations.* J. Math. Soc. Japan **30**, (1978), p. 747-762.

[21] K. Nishihara & Y. Yamada, *On global solutions of some degenerate quasilinear hyperbolic equations with dissipative terms.* Funkcialaj Ekvacioj, **33**, (1990), p. 151-159.

[22] K. Ono, *Global existence and decay properties of solutions of some mildly degenerate nonlinear dissipative Kirchhoff strings.* Funkcialag Ekvacioj **40**, (1997), p. 255-270.

[23] S. I. Pohozaev , *On a classe of quasilinear hyperbolic equations.* Math. Sbornik, T. **96**, (1975)- 1, p.145-158.

[24] P. H. Riviera Rodriguez, *On local strong solution of a non linear partial differential equation.* Appl. Anal., **10**, (1980)- 2, p. 93-104.

[25] Y. Yamada, *Some nonlinear degenerate wave equations.* Nonlinear Anal. **11** (1987), P. 1155-1168.

[26] T. Yamazaki, *On local solution of some quasilinear degenerate hyperbolic equations .* Funkcialaj Ekvacioj, **31**, (1988), p. 439-457.

Université Djillali Liabès,
Institut des Sciences Exactes,

B. P 89 Sidi Bel Abbès 22000, Algérie.
E-mail address : benaissa_abbes@yahoo.com
http ://www-ldm.univ-sba.dz