Existence de solutions pour un problème biharmonique non homogène avec exposant critique de Sobolev

Samira Benmouloud

Résumé

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, borné régulier, $N \geq 5$ et $p = \frac{2N}{N-4}$. On montre que le problème biharmonique

$$\begin{cases} \Delta^2 u = |u|^{p-2}\, u + fu \text{ dans } \Omega \\ \Delta u = u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

admet au moins deux solutions dans $H = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ lorsque $f \in H^*$ est non nul et soumis à une certaine condition.

1 Introduction

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 5$, on pose$H = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ que l'on munit de la norme $\|u\|_H^2 = \int_\Omega |\Delta u|^2 \, dx$, équivalente à la norme usuelle sur l'espace de Sobolev $H^2(\Omega)$ .L'injection continue $H(\Omega) \to L^p(\Omega)$ n'est pas compacte pour l'exposant critique $p = \frac{2N}{N-4}$ et la constante de Sobolev S correspondant à cette injection est donnée par

$$(1.1) S = Inf \left\{ \int_\Omega |\Delta u|^2 ; u \in H; \int_\Omega |u|^p = 1 \right\}.$$

Ce minimum, indépendant du domaine Ω, n'est jamais atteint [12]. Suivant l'idée de Brezis et Nirenberg [3] concernant l'analogue de $(1,1)$ pour le Laplacien , on

Received by the editors September 2000.
Communicated by J. Mawhin.
1991 *Mathematics Subject Classification :* 35B05, 35J65, 49J45.

considère le problème biharmonique

$$(1.2)\qquad \begin{cases} \Delta^2 u = |u|^{p-2}\, u + fu \text{ dans } \Omega \\ \Delta u = u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ u \in H, 0 \neq f \in H^*. \end{cases}$$

Il est bien connu que les les solutions faibles de (1.2) sont les points critiques de la fonctionnelle F définie sur H par

$$(1.3)\ F(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\Delta u|^2 - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p - \int_\Omega fu.$$

Mais comme l'injection $H \to L^p(\Omega)$ n'est pas compacte, le minimum de F n'est pas nécessairement atteint. Différents résultats d'existence et de multiplicité de solutions non triviales d'équations de quatrième ordre avec exposant critique sur un domaine borné ont été établis, en particulier dans[8] , [9] , [13]et[2].

D'autre part Guedda et *al.* [10]ont récemment montré que le minimum(1.1) peut être atteint par une perturbation de la contrainte de la forme : $\|u + \varphi\|_p = 1, \varphi \neq 0$.

Dans ce travail on utilise les mêmes arguments que ceux de Tarantello pour l'équation du second ordre[11]. De manière analogue on considère la condition

$$(1.4)\begin{cases} \int_\Omega fu < C_N \left(\int_\Omega |\Delta u|^2\right)^{\frac{N+4}{4}} \\ \forall u \in H, \|u\|_p = 1, avec C_N = \frac{8}{N-4}\left(\frac{N-4}{N+4}\right)^{\frac{N+4}{8}}. \end{cases}$$

On montre alors le résultat principal suivant

Théorème 1-Soit $f \in H^*$,non identiquement nul et vérifiant la condition (1.4). *Alors le problème* (1.2) *admet au moins deux solutions distinctes.*

Pour démontrer notre résultat on procède en deux étapes : on commence par montrer l'existence d'une première solution u_0 du problème (1.3) au fait on montre *(Théorème 3.1)* que c_0, minimum de F est atteint en u_0 par application du principe variationnel d'Ekeland à la fonctionnelle F. On montre ensuite *(Théorème 4.1)* qu'un second minimum local $c_1\,(c_1 > c_0)$ est atteint en u_1, pour cela on trouve une majoration de $c_1$qui permet de vérifier une condition de Palais-Smale locale pour la fonctionnelle F.

Le plan de l'article est le suivant : dans la section 2 on montre que la fonctionnelle F vérifie la condition de Palais-Smale locale $(P.S)_c$ avec $c \in \left]0, \frac{2}{N}S^{\frac{N}{4}} + c_0\right[$.La section 3 est consacrée à la démonstration du Théorème 3.1, plusieurs lemmes sont nécessaires pour établir ce résultat. Dans la section 4 on donne la preuve du théorème 4.1 : on détermine c_{MP} à partir de la Proposition 4.2 puis on établit l'inégalité (4.2) reliant c_0, c_1 et c_{MP}.On termine cette section et la démonstration du Théorème 4.1 par l'application du principe variationnel d'Ekeland puis de $(PS)_{c_1}$.

2 Verification de la Condition de Palais-Smale locale

Soit $M = \{u \in H; \langle F'(u), u\rangle = 0\}$. F est bornée inférieurement sur M.En effet

$$(2.1)\, F(u) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) \int_\Omega |\Delta u|^2 + \left(\frac{1}{p} - 1\right) \int_\Omega fu . \forall u \in M$$

comme$f$ vérifie (1.4) alors

$$(2.2)\, F(u) \geq -\frac{1}{32} (N+4)^2 \|f\|^2_{H^*} .$$

On pose

$$(2.3)\, c_0 = Inf_{v \in M} F(v)$$

Proposition 2.1-*La fonctionnelle F vérifie la condition $(P.S)_c$ pour tout $c < c_0 + \frac{2}{N} S^{\frac{N}{4}}$ où S est la constante de Sobolev définie par* (1.1)

Preuve : Soit (u_n) une suite d'éléments de H telle que $F(u_n)$ converge vers c et $\|F'(u_n)\|$ tend vers 0. On vérifie q'une telle suite est bornée, elle admet alors une sous-suite, notée encore(u_n) ,qui converge faiblement vers un élément u de$H$. Ainsi u est une solution faible de (1.3) ,en particulier $u \in M$ et $u \neq 0$.

Posons $v_n = u_n - u$;$v_n \to 0$ faiblement dans H.Le reste de cette section consiste à montrer que $\|v_n\|_H \to 0$.

D'après Brézis-Lieb [5] on a : $\|u_n\|^p_p = \|v_n\|^p_p + \|u\|^p_p + o(1)$; ainsi pour n assez grand on peut écrire

$$c_0 + \frac{2}{N} S^{\frac{N}{4}} > F(u) + \frac{1}{2} \|v_n\|^2_H - \frac{1}{p} \|v_n\|^p_p + o(1) .$$

Mais comme $F(u) \geq c_0$, on déduit

$$(2.4)\, \frac{1}{2} \|v_n\|^2_H - \frac{1}{p} \|v_n\|^p_p < \frac{2}{N} S^{\frac{N}{4}} + o(1) .$$

D'autre part comme $F'(u_n) \to 0$ dans H^* on obtient pour n assez grand

$$\left\langle F'(u_n), u_n \right\rangle = o(1) = \langle F'(u), u\rangle + \|v_n\|^2_H - \|v_n\|^p_p + o(1)$$

et comme $u \in M$ on a

$$\|v_n\|^2_H = \|v_n\|^p_p + o(1) .$$

Soit $l = \overline{\lim} \|v_n\|^p_p$,de la relation précédente et de l'inégalité de Sobolev on voit que $l = 0$ ou $l > S^{\frac{N}{4}}$,en passant à la limite dans (2.4) on déduit que $l = 0$. Ainsi u_n converge fortement vers u.

3 Existence de la première solution

Théorème 3.1-Soit $f \in H^*$ *vérifiant la condition* (1.4) *.Alors l'infimum*(2.3) *est atteint par une fonction* $u_0 \in M$*.En particulier* u_0 *est un minimum local de* F*.*

Preuve : d'après (2.2) c_0 est minorée. On cherche ensuite une borne supérieure de c_0. Pour cela on considère la fonction

$$\Psi(t) = t\|u\|_H^2 - t^{p-1}\|u\|_p^p ; u \in M, u \neq 0.$$

Ψ est concave et atteint son maximum en $t_m = \left(\frac{\|u\|_H^2}{(p-1)\|u\|_p^p}\right)^{\frac{1}{p-2}}$, avec $\Psi(t_m) = c_N \frac{\|u\|_H^{\frac{N+4}{N}}}{\|u\|_p^{\frac{N}{2}}}$.

Comme$f$ vérifie (1.4) on a $\int_\Omega fu < \Psi(t_m)$. Deux cas se présentent alors :

3.a) Si $\int_\Omega fu \leq 0, \exists! t_{1=} t_1(u) ; 0 < t_1 < t_m$; tel que $\int_\Omega fu = \Psi(t_1)$ et $\Psi'(t_1) < 0$ de plus $F(t_1.u) = Sup_{t>t_m} F(t.u)$.

3.b) Si $\int_\Omega fu > 0, \exists! t_2 = t_2(u) ; 0 < t_2 < t_m < t_1$tel que $\int_\Omega fu = \Psi(t_1) = \Psi(t_2)$ et $\Psi'(t_2) > 0 > \Psi'(t_1)$,de plus $F(t_2.u) \leq F(t.u) \forall t \in [0, t_1]$.

Soit v dans H une solution du problème : $\Delta^2 u = f, f \neq 0$.Comme $\int_\Omega fv > 0$, d'après 3.b) $\exists t_2 > 0$ tel que $F(t_2.v) < -\frac{2t_2^2}{N}\|f\|_{H^*}^2$,par conséquent c_0 est majorée

$$(3.1) \qquad c_{0<} - \frac{2t_2^2}{N}\|f\|_{H*}^2.$$

Suite aux propriétés de F et $InfF$, le principe variationnel d'Ekeland [7] s'applique et assure l'existence d'une suite $(u_n) \subset M$ vérifiant

$$\begin{array}{llll} (3.i) & F(u_n) & < & c_0 + \dfrac{1}{n} \\ (3.ii) & F(w) & \geq & F(u_n) - \dfrac{1}{n}\|w - u_n\|_H^2 ; \forall w \in H. \end{array}$$

D'après $(3.i)$ et (3.1) on a pour n assez grand

$$F(u_n) < c_0 + \frac{1}{n} < -\frac{2t_2^2}{N}\|f\|_{H^*}^2$$

on en déduit

$$(3.2) \qquad \int_\Omega fu_n \geq t_2^2\|f\|_{H^*}^2 > 0$$

et

$$(3.3) \ \frac{4t_2^2}{N+4}\|f\|_{H^*} \leq \|u_n\|_H \leq \frac{N+4}{4}\|f\|_{H^*}.$$

Par conséquent (u_n) admet une sous-suite (notée (u_n)) qui converge faiblement vers u_0 dans H. Pour montrer que la suite (u_n) converge fortement vers u_0 et qu'ainsi la valeur c_0 est atteinte, on utilisera la proposition (2.1) .On démontre

Proposition 3.2- $\lim_{n\to\infty}\|F'(u_n)\| = 0$.

La démonstration de ce résultat repose sur 3 lemmes pour lesquels on suppose $f$non identiquement nulle et vérifiant la condition (1.4).

Lemme 3.3-Le minimum S_f défini par

$$S_f \ := Inf\left\{ C_N \|u\|_H^{\frac{N+4}{4}} - \int_\Omega fu; u \in H; \|u\|_p = 1 \right\}$$

est atteint et $S_f > 0$.

Preuve : ce problème de minimisation est une perturbation de (1.1), la démonstration se fait par la méthode de Brezis-Nirenberg [3].Pour plus de détails voir [6]

Lemme 3.4-Soit $u \in M, u \neq 0;$*alors* $\|u\|_H^2 - (p-1)\|u\|_p^p \neq 0$.

Preuve. On considère la fonction $\Phi(u) = C_N \frac{\|u\|_H^{\frac{N+4}{4}}}{\|u\|_p^{\frac{N}{4}}} - \int_\Omega fu$. Elle vérifie $\Phi(tu) = t\Phi(u)$ pour $t > 0$ et $\|u\|_p = 1$,de plus étant donné $\gamma > 0$ on a d'après le lemme 3.3

$$(3.4) \quad Inf_{\|u\|_p \geq \gamma} \Phi(u) \geq \gamma S_f > 0.$$

Supposons $\|u\|_H^2 - (p-1)\|u\|_p^p = 0$ pour un certain $u \neq 0$ dans M, on en déduit immédiatement que

$$\|u\|_p \geq \left(\frac{S}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}-2} \qquad \text{et} \qquad (p-2)\|u\|_p^p - \int_\Omega fu = 0.$$

En faisant $\gamma = \left(\frac{S}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}-2}$ dans (3.4), un calcul direct mène à la contradiction

$$0 < \gamma S_f \leq \Phi(u) = 0.$$

Lemme 3.5-Soit $u \in M, u \neq 0$; alors $\exists \varepsilon > 0$ et une fonction différentiable $g = g(w) > 0$ où $w \in H; \|w\|_H < \varepsilon$, vérifiant

$$\begin{aligned} i) g(0) &= 1 \qquad , \qquad ii) g(w)(u-w) \in M; \|w\|_H < \varepsilon \\ iii) \langle g'(0), w \rangle &= \frac{2\int_\Omega \Delta u \Delta w - p\int_\Omega |u|^{p-2} uw - \int_\Omega fw}{\|u\|_H^2 - (p-1)\|u\|_p^p}. \end{aligned}$$

Preuve : par application au point (1, 0) du théorème des fonctions implicites à la fonction $G(s,w) = s\|u-w\|_H^2 - \|u-w\|_p^p s^{p-1} - \int_\Omega f(u-w)$,définie sur $\mathbb{R} \times H$.

Démonstration de la Proposition 3.2 - Supposons que pour un certain n assez grand on ait $\|F'(u_n)\| > 0$ et prenons $u = u_n$ et $w = \delta \frac{F'(u_n)}{\|F'(u_n)\|}$ avec $\delta > 0$ assez petit. Soit g donné par le *Lemme 3.5*, posons $w_\delta = g(w)(u_n - w) \in M$;d'après (3.*ii*) du principe d'Ekeland on obtient

$$\begin{aligned} F(u_n) - F(w_\delta) &= \langle F'(w_\delta), u_n - w_\delta \rangle + o(\delta) \\ &= (1-g(w)) \langle F'(w), u_n \rangle + \delta g(w) \left\langle F'(w_\delta), \frac{F'(u_n)}{\|F'(u_n)\|} \right\rangle + o(\delta) \\ &\leq \frac{1}{n} \|w_\delta - u_n\|_H. \end{aligned}$$

Divisons par δ et passons à la limite lorsque $\delta \to 0$. On pose $g'_n(0) = \left\langle g'(0), \frac{F'(u_n)}{\|F'(u_n)\|} \right\rangle$, on a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n}\left(1 + |g'_n(0)| \, \|u_n\|_H\right) \\ \geq \; & -g'_n(0) \left\langle F'(u_n), u_n \right\rangle + \|F'(u_n)\| \\ = \; & \|F'(u_n)\| \, . \end{aligned}$$

Ainsi d'après (3.3) on obtient

$$\|F'(u_n)\| \leq \frac{C_1}{n}\left(1 + |g'_n(0)|\right), C_1 > 0.$$

De (3.3) et du *Lemme 3.5* (*iii*)) on obtient

$$|g'_n(0)| \leq \frac{C_2}{\left| \|u_n\|_H^2 - (p-1)\|u_n\|_p^p \right|}, C_2 > 0.$$

Pour aboutir à une contradiction avec l'hypothèse de départ, on montre que $|g'_n(0)|$ est bornée uniformément en établissant que

$$\left| \; \|u_n\|_H^2 - (p-1)\|u_n\|_p^p \right| \geq \alpha > 0 \qquad (3.5)$$

Preuve de (3.5) : supposons qu'il existe (u_n) tel que

$$\|u_n\|_H^2 - (p-1)\|u_n\|_p^p = o(1), \qquad (3.6)$$

alors (3.3) entraîne que $\|u_n\|_p \geq C_3$; d'où

$$\left(\frac{\|u_n\|_H^2}{p-1}\right)^{\frac{N}{4}} - \left(\|u_n\|_p^p\right)^{\frac{N}{4}} = o(1),$$

comme u_n est dans M,l'hypothèse (3.6) donne

$$\int_\Omega f u_n = (p-2)\|u_n\|_p^p + o(1).$$

Cette relation, (3.6) et (3.4) aboutissent à la contradiction suivante

$$0 < C_3^{\frac{N+4}{4}} S_f \leq \Phi(u_n) \|u_n\|_p^{\frac{N}{4}} = o(1).$$

Ainsi (3.5) a lieu et $|g'_n(0)|$ est uniformément bornée, d'où

$$\lim_{n \to \infty} \|F'(u_n)\| = 0.$$

Pour montrer que u_0 est un minimum local de F on remarque que pour $u \in H$ vérifiant $\int_\Omega fu > 0$,3.b) entraîne que $u \in M^+$ avec

$$M^+ = \left\{ u \in M; \|u\|_H^2 - (p-1)\|u\|_p^p > 0 \right\}$$

et aussi que $F(s.u) \geq F(t_2.u)$ pour tout $0 < s < t_m$, en particulier si $u = u_0 \in M^+$, on a

$$(3.7) \quad t_2 = 1 < \left(\frac{\|u_0\|_H^2}{(p-1)\|u_0\|_p^p} \right)^{\frac{1}{p-2}}.$$

Soit ε assez petit de sorte que(3.7) ait lieu pour $(u_0 - w)$ avec $\|w\|_H < \varepsilon$.Par le *Lemme 3.5* $\exists\ g > 0$ vérifiant $g(w)(u_0 - w) \in M$ et $\lim_{w \to 0} g(w) = 1$;ainsi $g(w)(u_0 - w) \in M^+$puisqu'on peut supposer que pour $w \in H$ tel que $\|w\|_H < \varepsilon$, on a : $g(w) < \left(\frac{\|u_0 - w\|_H^2}{(p-1)\|u_0 - w\|_p^p} \right)^{\frac{1}{p-2}}$.

Soit $0 < t < \left(\frac{\|u_0 - w\|_H^2}{(p-1)\|u_0 - w\|_p^p} \right)^{\frac{1}{p-2}}$, on a d'après 3.b)

$$F(u_0) \leq F(g(w)(u_0 - w)) \leq F(t(u_0 - w)).$$

En particulier pour $t = 1$ on a

$$F(u_0) \leq F(u_0 - w); \forall w \in H; \|w\| < \varepsilon.$$

4 Existence de la deuxième solution

Dans cette section on montre que F admet une seconde valeur critique $c_1$différente de c_0 ;notons par $M^- = \left\{ u \in M; \|u\|_H^2 - (p-1)\|u\|_p^p < 0 \right\}$.D'après le *lemme 3.4* on peut écrire $M = M^- \cup M^+ \cup \{0\}$.On pose

$$(4.1) \qquad c_1 = Inf_{M^-} F$$

Théorème 4.1-Soit $f \in H^*$ *non nul et vérifiant la condition* (1.4). *Alors le minimum* c_1*est atteint en* $u_1 \in M^-$. *De plus* $c_1 > c_0$.

La preuve de ce résultat repose essentiellement sur le principe *Inf-Max* d'Ambrosetti-Rabinowitz qui fournit une valeur critique c_{MP} telle que

$$(4.2) \quad c_1 \leq c_{MP} < c_0 + \frac{2}{N} S^{\frac{N}{4}}.$$

On déduit de(4.2) en particulier que F vérifie $(PS)_{c_1}$. On peut alors utiliser de nouveau le principe variationnel d'Ekeland pour conclure. Démontrer le *Théorème 4.1* revient donc à exhiber c_{MP} (à partir de la Proposition 4.2) puis établir les inégalités (4.2).

On considère les fonctions $u_{\varepsilon,a}$ définies par

$$u_{\varepsilon,a}(x) = \frac{\varepsilon^{\frac{N-4}{4}} \xi_a}{\left(\varepsilon + |x - a|^2 \right)^{\frac{N-4}{2}}}$$

où $a \in \Omega$ est tel que $u_0(a) > 0$ et $\xi_a \in C_0^\infty(\Omega)$; $0 \leq \xi_a \leq 1$ et $\xi_a \equiv 1$ dans un voisinage de a.

1re étape.

Proposition 4.2-$\forall t > 0$ *il existe* $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(t,a)$ *tel que* $\forall\ \varepsilon < \varepsilon_0$ *on a*

$$F\left(u_0 + tu_{\varepsilon,a}\right) < \frac{2}{N} S^{\frac{N}{4}} + c_0$$

La preuve est une adaptation de la méthode de Brézis-Nirenbreg [3] pour le problème harmonique et utilise aussi les estimations obtenues dans [8] sur les fonctions $u_{\varepsilon,a}$.Posons

$$\begin{aligned} I_\varepsilon \quad : &= \|u_0 + tu_{\varepsilon,a}\|_p^p - \|u_0\|_p^p - t^p \int_\Omega |u_{\varepsilon,a}|^p \\ &-pt \int_\Omega u_0 u_{\varepsilon,a} \left(|u_0|^{p-2} + t^{p-2} |u_{\varepsilon,a}|^{p-2}\right) \end{aligned}$$

On commence par établir l'estimation suivante

Lemme 4.3-$I_\varepsilon = o\left(\varepsilon^{\frac{N-4}{4}}\right)$

Preuve. i)$1 \le p \le 3$.D'après [4] (lemma 4)étant donnés $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\exists c = c\,(p)$ tel que

$$\left||\alpha+\beta|^q - |\alpha|^q - |\beta|^q - q\alpha\beta\left(|\alpha|^{q-2} + |\beta|^{q-2}\right)\right| \le \begin{cases} c\,|\alpha|\,|\beta|^{q-1}\,; si\,|\alpha| \ge |\beta| \\ c\,|\alpha|^{q-1}\,|\beta|\,; si\,|\alpha| \le |\beta| \end{cases}$$

Par conséquent il existe $C > 0$ tel que

$|I_\varepsilon| \le C\left(t \int_{|u_0| \le t|u_{\varepsilon,a}|} |u_0|^{p-1} |u_{\varepsilon,a}| + t^{p-1} \int_{|u_0| \geqslant t|u_{\varepsilon,a}|} |u_0|\, |u_{\varepsilon,a}|^{p-1}\right)$

$|I_\varepsilon| \le I_\varepsilon^1 + I_\varepsilon^2$.

On montre ensuite que les intégrales I_ε^i vérifient $I_\varepsilon^i = o\left(\varepsilon^{\frac{N-4}{4}}\right)$.En effet comme $\{|u_0| \le t\,|u_{\varepsilon,0}|\} \subset \left\{|x| \le k_1 \varepsilon^{\frac{1}{4}}\right\}$et $\{|u_0| \ge t\,|u_{\varepsilon,0}|\} \subset \left\{r_0 \ge |x| \ge k_2 \varepsilon^{\frac{1}{2}}\right\}$, on a

$$\begin{aligned} I_\varepsilon^1 &\le K_1 \varepsilon^{\frac{N-4}{4}} \int_0^{k_1 \varepsilon^{\frac{1}{4}}} \frac{r^{N-1}}{\left(\varepsilon + r^2\right)^{\frac{N-4}{2}}} dr \\ I_\varepsilon^2 &\le K_2 \varepsilon^{\frac{N+4}{4}} \int_{k_2 \varepsilon^{\frac{1}{2}}}^{r_0} \frac{r^{N-1}}{\left(\varepsilon + r^2\right)\frac{N+4}{4}} dr, \end{aligned}$$

le calcul des termes de droite donne

$$I_\varepsilon^i = o\left(\varepsilon^{\frac{N-4}{4}}\right), i = 1, 2.$$

ii) $p \ge 3$.On utilise dans ce cas l'inégalité [4] :

$\left||\alpha+\beta|^q - |\alpha|^q - |\beta|^q - q\alpha\beta\left(|\alpha|^{q-2} + |\beta|^{q-2}\right)\right| \le c\left(|\alpha|^{q-2}\beta^2 + \alpha^2 |\beta|^{q-2}\right)$.

Les calculs sont analogues à ceux du cas précédant.

*Preuve de la proposition 4.2.*Pour préciser les estimations des termes qui apparaissent dans le développement de $F\left(u_0 + tu_{\varepsilon,a}\right)$ posons $A = \|u_{1,0}\|_p^p$; et $B = \|u_{1,0}\|_H^2$ $\left(\text{on a } A^{\frac{2}{p}} = \frac{B}{S}, S \text{ définie par } (1.1)\right)$.On sait d'après [8] que

$$\begin{aligned} \|u_{\varepsilon,a}\|_H^2 &= B + o\left(\varepsilon^{\frac{N-4}{2}}\right) \\ (4.3)\ \|u_{\varepsilon,a}\|_p^2 &= \frac{B}{S} + o\left(\varepsilon^{\frac{N-4}{2}}\right) \\ \|u_{\varepsilon,a}\|_p^p &= \left(\frac{B}{S}\right)^{\frac{p}{2}} + o\left(\varepsilon^{\frac{N}{2}}\right) = A + o\left(\varepsilon^{\frac{N}{2}}\right). \end{aligned}$$

D'autre part comme u_0 est solution du problème (1.3) on peut écrire

$$\begin{aligned} F(u_0 + tu_{\varepsilon,a}) &= F(u_0) + \frac{t^2}{2}B - \frac{t^p}{p}A - t^{p-1}\int_\Omega |u_{\varepsilon,a}|^{p-1} u_0 + t\int_\Omega \Delta u_0 \Delta u_{\varepsilon,a} \\ &\quad -t\int_\Omega |u_0|^{p-2} u_0 u_{\varepsilon,a} - t\int_\Omega f u_{\varepsilon,a} + o\left(\varepsilon^{\frac{N-4}{4}}\right). \end{aligned}$$

un calcul simple donne

$$(4.4) \int_\Omega |u_{\varepsilon,a}|^{p-1} u_0 dx = D\varepsilon^{\frac{N-4}{4}} u_0(a) + o\left(\varepsilon^{\frac{N-4}{4}}\right)$$

où $D = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{dx}{\left(1+|x|^2\right)^{\frac{N+4}{4}}}$; de même on vérifie que les trois dernières intégrales de l'expression $F(u_0 + tu_{\varepsilon,a})$sont de l'ordre de $O\left(\varepsilon^{\frac{N-4}{4}}\right)$ d'où

$$F(u_0 + tu_{\varepsilon,a}) = F(u_0) + \frac{t^2}{2}B - \frac{t^p}{p}A - u_0(a) D\varepsilon^{\frac{N-4}{4}} t^{p-1} + o\left(\varepsilon^{\frac{N-4}{4}}\right).$$

Posons $\varphi(t) = B\frac{t^2}{2} - u_0(a) D\varepsilon^{\frac{N-4}{4}} t^{p-1} - A\frac{t^p}{p}$.Si φatteint son maximum en $t_\varepsilon > 0$ alors

$$(4.5) \qquad t_\varepsilon A\left(\frac{B}{A} - t_\varepsilon^{p-2}\right) = (p-1) u_0(a) D\varepsilon^{\frac{N-4}{4}} t_\varepsilon^{p-2} > 0.$$

Posons $T_0 = \left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{p-2}}$,alors nécessairement

$$(4.6) \begin{cases} T_0 > t_\varepsilon > 0 \\ t_\varepsilon \to T_0; \text{lorsque} \varepsilon \to 0 \end{cases}$$

Ecrivons $t_\varepsilon = T_0(1-\delta_\varepsilon)$;où $\delta_\varepsilon \to$0 lorsque$\varepsilon \to 0$, l'estimation $(1-\delta_\varepsilon)^p \sim 1 - p\delta_\varepsilon$ permet de transformer (4.5) en

$$(p-2)\left(\frac{B^{p-1}}{A}\right)^{\frac{1}{p-2}} \delta_\varepsilon = (p-1)\frac{B}{A} u_0(a) D\varepsilon^{\frac{N-4}{4}} + (p-2)\delta_\varepsilon \varepsilon^{\frac{N-4}{4}},$$

d'où

$$(4.7) \qquad \delta_\varepsilon = \frac{N+4}{8} T_0^{p-1} u_0(a) D\varepsilon^{\frac{N-4}{4}} + o\left(\varepsilon^{\frac{N-4}{4}}\right).$$

De (4.6) on déduit

$$\begin{aligned} F(u_0 + tu_{\varepsilon,a}) &= c_0 + \varphi(t) + o\left(\varepsilon^{\frac{N-4}{4}}\right) \\ &\leq c_0 + \varphi(t_\varepsilon) + o\left(\varepsilon^{\frac{N-4}{4}}\right) \\ &= c_0 + \frac{2}{N} S^{\frac{N}{4}} - T_0^{p-1} u_0(a) D\varepsilon^{\frac{N-4}{4}} + o\left(\varepsilon^{\frac{N-4}{4}}\right). \end{aligned}$$

Ainsi le choix d'un ε_0 assez petit permet d'écrire

$$F(u_0 + tu_{\varepsilon,a}) < c_0 + \frac{2}{N} S^{\frac{N}{4}}; \forall \varepsilon < \varepsilon_0$$

$$Sup_{t\geq 0}F\left(u_0+tu_{\varepsilon,a}\right)<c_0+\frac{2}{N}S^{\frac{N}{4}}.$$

2^e *étape.*

$$c_{1\leq}c_{MP}<c_0+\frac{2}{N}S^{\frac{N}{4}}$$

Preuve : Soit $u\in H$ tel que $\|u\|_H=\|u\|_p=1$, d'après 3.a) il existe $t_1=t_1\left(u\right)>0$ tel que $t_1u\in M^-$ et $Sup_{t\geq t_m}F\left(t.u\right)=F\left(t_1.u\right)$.En particulier pour $u\in M$ vérifiant $t_1\left(\frac{u}{\|u\|_H}\right)=\|u\|_H$,on a $u\in M^-$; ainsi la variétéM^- partage H en deux composantes connexes O_1 et O_2 telles que

$H-M^-=O_1\cup O_2$ où

$$O_1=\left\{u=0,\text{ou }\ \|u\|_H<t_1\left(\frac{u}{\|u\|_H}\right)\right\}$$

$$O_2=\left\{u;\|u\|_H>t_1\left(\frac{u}{\|u\|_H}\right)\right\}$$

On a $u_0\in O_1$ car $M^+\subset O_1$,on choisit ensuite $v_\varepsilon\in O_2$ de la forme $v_\varepsilon=u_0+t_0u_{\varepsilon,a}$ en prenant $t_0=\left(\frac{\left|c_4^2-\|u_0\|_H^2\right|}{B}\right)^{\frac{1}{2}}+1$, l'existence de la constante $c_4>0$ étant assurée par la maximalité de t_1 : $0<t_1\left(u\right)<c_{4,}\forall u;\|u\|_H=1$.

Considérons $c_{MP}=Inf_{h\in P}Max_tF\left(h\left(t\right)\right)$ où P désigne l'ensemble des chemins continus reliant u_0 et v_ε.On a $Im(h)\cap M^-\neq\emptyset$, ainsi $c_{MP}\geq c_{1.}$D'autre part la définition de F et l'inégalité de Sobolev montrent que F vérifie les hypothèses du théorème de *Mountain-Pass* [1] ;d'après la *Proposition 4.2* on a

$$c_{MP}\leq Sup_{t>0}F\left(u_0+tu_{\varepsilon,a}\right)<\frac{2}{N}S^{\frac{N}{4}}+c_0$$

De plus c_{MP} est une valeur critique puisque$F$ vérifie la condition $\left(PS\right)_{c_{MP}}$.

Fin de la demonstration du Théorème 4.1. les conditions d'application du principe variationnel d'Ekeland étant remplies, soit u_n une suite minimisante du problème 4.1, on montre de manière analogue à celle du *Théorème 3.1* que F vérifie $\left(PS\right)_{c_1}$, ainsi (u_n) admet une sous-suite qui converge fortement vers $u_1\in M^-$;par conséquent $u_1\neq u_0$, u_1 est un point critique de F et $F\left(u_1\right)=c_1$.

Remerciement.

L'auteur remercie M. GUEDDA de l'Université de Picardie Jules Verne pour son invitation au laboratoire LAMFA, CNRS UPRES-A 6119, Faculté de Mathématiques d'Amiens, où ce travail a été initié.

Références

[1] A. AMBROSETTI, P. RABINOWITZ, *Dual Methods in Critical point, Theory and Application,* J. Funct. Anal., vol 11, (1973), pp. 349-381.

[2] F. BERNIS, J. G. AZORERO, I. PERAL, *Existence and multiplicity of non trivial solution in semilinear critical problems of fourth order,* Advances in Dif. Equat., vol 1, $n^0 2$, (1996), pp. 219-240.

[3] H. BREZIS, L. NIRENBERG, *positive solutions of non linear elliptic equations involving critical Sobolev exponent,* Comm. Pur appl. vol 36, (1983), pp. 437-477.

[4] H. BREZIS, L. NIRENBERG, *A minimization problem with critical exponent and non zero data* (symmetry in nature, Scuola norm. sup. Pisa, (1989), pp. 129-140.

[5] H. BREZIS, E. LIEB, *A relation between pointwise convergence of fonctions and convergence of integrals,* Proc. Amer. Math. Soc., vol 88, (1983), pp. 486-490.

[6] S. BENMOULOUD, *Un problème de minimisation biharmonique avec exposant critique,* communication aux journées E. D. P-Analyse non linéaire, FES, MAROC, Mai 99. Soumis.

[7] I. EKELAND, *On the variational principle,* J. M. Appl, 47, (1974).

[8] D. E. EDMUNDS, D. FORTUNATO, E. JANNELLI, *Critical exponent critical dimensions and the biharmonic operator,* Arch. rational Mech. Anal., 112, (1990), pp. 269-289.

[9] Y. GU, Y. DENG, X. WANG, *Existence of nontrivial solutions for critical semilinear biharmonic equation,* Syst. Scien. and Math. Scien. vol 7, $n^0 2$, (1994), pp. 140-152.

[10] M. GUEDDA, R. HADIJI, C. PICARD, 25, Décembre 1998. *A biharmonic problems with constraint involving critical Sobolev exponent,* Publication de l'Université de Picardie Jules Verne. LAMFA UPRES A 6119, $n^0 25$. Soumis.

[11] G. TARANTELLO, *On non homogeneous elliptic equation involving critical Sobolev exponent,* Ann. inst. H. Poincaré, vol9, $n^0 3$, (1992), pp. 281-304.

[12] R. VAN DER VORST, *Best constant for the embedding of the space* $H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ *into* $L^{\frac{2N}{N-4}}(\Omega)$. Diff. and Integ. Eqs., vol 6, $n^0 2$, (1993), pp. 259-276.

[13] R. VAN DER VORST, *Fourth order elliptic equations with critical growth,* C. R. A. S, t. 320, Serie I, (1995), pp. 295-299.

"E.G.A.L". Equipe de Géometrie et d'Analyse non Linéaire.
Département de Mathématiques et d'Informatique
Faculté des sciences de Kenitra B. P : 133.
Université IBN
TOFAIL. Kenitra 14000. MAROC.
e-mail : ben.sam@netcourrier.com