Nombre de singularités de la fonction croissance en dimension 2

Renata Grimaldi   Pierre Pansu

Résumé

On montre que la fonction croissance sur une variété riemannienne de dimension 2 autre que le plan projectif réel possède au moins autant de singularités qu'une fonction a de valeurs critiques. Cette borne est optimale.

Abstract

On a Riemannian 2-manifold (except for the real projective plane), the growth function has at least as many singularities as a function has critical values. This is a sharp bound.

Introduction.

Soient (M, g) une variété riemannienne C^∞ complète, de dimension deux, et $B(x, r)$ la boule géodésique fermée de centre $x \in M$ et de rayon $r > 0$; on appelle *fonction croissance* de M au point x la fonction réelle

$$v(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \leq 0, \\ vol_g B(x, r) & \text{si } r > 0. \end{cases}$$

Dans les articles [2] et [3], les auteurs ont montré que la dérivée $v'(r)$ peut être discontinue, et que, si le rayon d'injectivité de (M, g) est *fini*, alors la fonction $v(r)$ ne peut être plus que $C^{2+\alpha}$, avec $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$.

Received by the editors April 1999.
Communicated by L. Van Hecke.
1991 *Mathematics Subject Classification :* 53C22.
Key words and phrases : Riemannian metric, volume, geodesic, Morse theory.

Nous rappelons ici qu'on dit qu'une fonction réelle de variable réelle $v(r)$ est *de classe* C^α, avec $0 < \alpha < 1$, s'il existe une constante $A > 0$ telle que, pour tout r, r' on a :

$$|v(r) - v(r')| \le A|r - r'|^\alpha;$$

par conséquent, $v(r)$ sera de classe $C^{k+\alpha}$, avec $k \in \mathbb{N}$ et $0 < \alpha < 1$ si $v(r) \in C^k$ et si $\dfrac{d^k v}{dr^k} \in C^\alpha$.

Pour une métrique générique en dimension 2, la fonction croissance est C^∞ en dehors d'un ensemble localement fini $\Sigma \subset \mathbb{R}$. De chaque côté d'un point r_0 de Σ, la dérivée de la fonction croissance peut s'écrire sous la forme $v'(r) = F(\sqrt{|r - r_0|})$, où F est de classe C^∞ au voisinage de zéro. En particulier, la fonction croissance est (génériquement) de classe $C^{1+\frac{1}{2}}$ partout (voir [5]).

En certains points, $v(r)$ ne sera pas mieux que $C^{1+\frac{1}{2}}$, en d'autres $v(r)$ peut être plus régulière, comme on le constate sur l'exemple suivant.

Soit M le tore T^2 quotient de $\mathbb{R}^2$ par $\mathbb{Z}^2$ (muni de la métrique naturelle $dx^2 + dy^2$). On calcule aisément

$$v(r) = \begin{cases} 0 & r \le 0 \\ \pi r^2 & 0 \le r \le \dfrac{1}{2} \\ 2\sqrt{r^2 \dfrac{1}{4}} + 2r^2 Arcsin\ (-1 + \dfrac{1}{2r^2}\ ) & \dfrac{1}{2} \le r \le \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \le r. \end{cases}$$

Dans cet exemple, $\Sigma = \left\{0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}$, la fonction $v(r)$ n'est pas mieux que $C^{1+\frac{1}{2}}$ en $\dfrac{1}{2}$. Au voisinage de 0 et $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $v(r)$ est C^2 par morceaux, mais n'est pas de classe C^2.

Pour une métrique quelconque sur M, la fonction croissance peut être beaucoup plus singulière, mains la topologie de M impose un minimum de singularités.

Notons $R_1(g) = \{r \in \mathbb{R} / \exists \alpha > \dfrac{1}{2}$ tel que $v(r)$ soit de classe $C^{1+\alpha}$ au voisinage de $r\}$, $R_2(g) = \{r \in \mathbb{R} / v(r)$ est de classe C^2 au voisinage de $r\}$, $\Sigma_1(g) =$le complémentaire de $R_1(g)$, $\Sigma_2(g) =$le complémentaire de $R_2(g)$.

Pour chaque variété M de dimension 2, nous donnons une minoration $s(M)$ (resp. $S(M)$) du nombre d'éléments de $\Sigma_1(g)$ (resp. de $\Sigma_2(g)$).

Théorème 1. *Soit M une variété différentiable de dimension 2. Pour toute métrique g sur M on a*

$$\#\Sigma_1(g) \ge s(M)$$

$$\#\Sigma_2(g) \ge S(M)$$

où $s(M)$ et $S(M)$ sont donnés par le tableau suivant.

M	$s(M)$	$S(M)$
$\mathbb{R}^2$	0	1
S^2	0	2
$\mathbb{R}P^2$	1	2
surf. compactes $\neq S^2, \mathbb{R}P^2$	1	3
surf. non compactes de type fini $\neq\mathbb{R}^2$	1	2
surfaces de type infini	$+\infty$	$+\infty$

On constate que lorsque $M \neq \mathbb{R}P^2$, le nombre $S(M)$ (resp. $s(M)$) coïncide avec le nombre minimum de valeurs critiques (resp. d'indice 1) d'une fonction de Morse propre sur M. Ce n'est pas surprenant : on peut généraliser à la fonction distance à x la notion de valeur critique de sorte que la fonction croissance soit lisse en dehors des valeurs critiques, voir [4].

Au voisinage d'un point critique isolé, la fonction distance peut être approchée par une fonction de Morse. Sur $\mathbb{R}P^2$, il existe une petite famille de métriques (incluant les métriques à courbure constante) pour lesquelles la distance a un cercle de points critiques, et possède donc une valeur critique de moins qu'une fonction de Morse.

Le théorème est optimal : pour chaque variété M de dimension 2 et chaque $x \in M$, nous construisons une métrique riemannienne *à courbure constante* dont la fonction croissance en x a exactement le nombre de singularités indiqué dans le tableau.

Dans le premier paragraphe, on donne la preuve du théorème. Dans les suivants, les exemples qui prouvent que le théorème est optimal : après des généralités sur les surfaces à courbure constante 0 ou -1, on construit au paragraphe 3 des surfaces à courbure constante ayant les propriétés requises en identifiant deux à deux les cotés de polygones réguliers.

1 Preuve du théorème 1.

a) *Rappel des résultats antérieurs.*

Le théorème suivant est démontré dans [3], mais formulé un peu différemment :

Théorème 2. *Soit M une variété riemannienne de dimension 2 et $x \in M$. Soit ℓ le rayon d'injectivité en x, λ la longueur du plus petit lacet en x non homotope à zéro et $L = \sup_{y \in M} d(x,y)$. Alors, au voisinage de ℓ, $v(r)$ n'est pas C^α pour $\alpha > 2 + \frac{1}{2}$,* *au voisinage de* $\frac{\lambda}{2}$, $v(r)$ *n'est pas* C^α *pour* $\alpha > 1 + \frac{1}{2}$.

Nous utiliserons aussi l'énoncé suivant.

Théorème 3 (Proposition 7 de [3]). *Si* $\pi_1 M$ *n'est pas de type fini, alors il y a une suite* $r_1 < r_2 < \ldots$ *de réels positifs tels que* $\lim r_k = +\infty$ *et* $v(r)$ *n'est pas mieux que* $C^{1+\frac{1}{2}}$ *au voisinage de* r_k.

Une variété de dimension 2 est dite *de type fini* si elle est difféomorphe au complémentaire d'un nombre fini de points dans une variété compacte sans bord de dimension 2 ; sinon, elle est dite *de type infini*.

Il résulte de la classification des surfaces qu'une variété de dimension 2 de type infini a un groupe fondamental qui n'est pas de type fini. Par conséquent, pour une surface M de type infini, $s(M) = +\infty$.

On a alors la première colonne du tableau :

$$s(M) \geq 1 \text{ si } M \neq S^2, \mathbb{R}^2$$

$$s(M) = +\infty \text{ si } M$$

est une surface de type infini.

b) *Singularité en 0 et en L.*

Théorème 4. *Soit* M *une variété compacte de dimension* n *et soit* x *un point de* M. *On pose* $L = \sup_{y \in M} d(x, y)$.

Alors la fonction croissance en x *n'est pas de classe* C^n *au voisinage de* L.

Preuve. Soit $y \in M$ un point tel que $d(x, y) = L$. Soit $r < L$.

D'après l'inégalité triangulaire,

$$d(x, z) < r \Rightarrow d(y, z) > L - r,$$

i.e. les boules $B(x, r)$ et $B(y, L - r)$ sont disjointes. Par conséquent,

$$vol(M) - v(r) \geq vol B(y, L - r) \geq (L - r)^n.$$

Comme $vol(M) - v(r) \equiv 0$ pour $r \geq L$, le Lemme 3 de [3] entraîne que $v(r)$ n'est pas de classe C^n au voisinage de L. ∎

Ce résultat donne la deuxième colonne du tableau.

En effet, si M est *non compacte* et *simplement connexe*, alors $M = \mathbb{R}^2$, la fonction $v(r)$ n'est pas C^2 en 0, donc $S(M) \geq 1$.

Si M est *non compacte* et *non simplement connexe*, alors $\lambda > 0$; $v(r)$ n'est pas C^2 en 0 et n'est pas $C^{1+\frac{1}{2}}$ en $\frac{\lambda}{2}$, donc $S(M) \geq 2$.

Si M est *compacte* et *simplement connexe*, alors $M = S^2$, $v(r)$ n'est pas C^2 en 0 et en $L > 0$, donc $S(M) \geq 2$.

Cas où M est *compacte non simplement connexe.*

Lemme 1. *Si* $M \neq \mathbb{R}P^2$, *alors* $0 < \dfrac{\lambda}{2} < L$.

Preuve. Supposons, au contraire, que $\dfrac{\lambda}{2} = L$. Considérons, dans le cercle unité $S^1 \subset T_xM$, le sous-ensemble suivant : $W = \{\theta \in S^1/$la géodésique issue de x dans la direction θ est un lacet non homotope à 0, de longueur $\lambda\}$.

Cet ensemble W est *fermé*. En effet, si une suite de lacets géodésiques γ_j de longueur constante converge vers γ, alors pour j assez grand, γ_j est homotope à γ. Si les γ_j ne sont pas homotopes à 0, il en est de même de γ.

Mais W est *ouvert* aussi. On utilise un résultat de [3, § 6]. Dans la preuve du théorème 2 de cet article, on montre que si $\theta_0 \in S^1$ est la vitesse initiale d'un lacet géodésique γ_0 de longueur ℓ, alors :

– 1) le lieu de coupure de x, *Cutlocus* (x), est, au voisinage de $y = \exp_x \left(\dfrac{\lambda}{2}\theta_0\right)$, une hypersurface lisse ;
– 2) tout point z de *Cutlocus* (x) voisin de y est relié à x par exactement deux segments géodésiques minimisants, qui dépendent différentiablement de z, ainsi que leur longueur $r(z)$ et leur vitesse initiale $\theta(z)$ en x ;
– 3) la fonction $z \mapsto r(z)$ sur *Cutlocus* (x) atteint un minimum local en y ;
– 4) l'application $z \mapsto \theta(z)$ est un difféomorphisme au voisinage de y.

Par définition de L, $\forall z$, $r(z) \leq L$. Nous avons supposé que $\dfrac{\lambda}{2} = L$. Il en résulte que $r(z) \equiv L$ au voisinage de y. Par conséquent, les deux segments minimisants de x à z sont orthogonaux à *Cutlocus* (x), et mis bout à bout ; ils forment un lacet géodésique γ_z de longueur λ homotope à γ_0. On conclut que $\theta(z) \in W$ pour $z \in$ *Cutlocus* (x) voisin de y, donc W contient un voisinage de θ_0 dans S^1.

Par connexité de S^1, on conclut que $W = S^1$, i.e. toute géodésique issue de x est un lacet minimisant γ_θ et tous ces lacets sont dans la même classe d'homotopie $c \in \pi_1(M, x)$.

Or toute classe d'homotopie $c' \in \pi_1(M, x)$ est représentée par un lacet géodésique γ en x de vitesse initiale θ et de longueur $\geq \lambda$. Nécessairement, $\gamma = \gamma_\theta$ ou bien γ est un itéré de γ_θ.

On conclut que c' est un multiple de c, donc c engendre $\pi_1(M, x)$.

La seule surface compacte dont le groupe fondamental est cyclique non trivial est le plan projectif $\mathbb{R}P^2$. ∎

Fin de la preuve du théorème 1.

Si M est compacte non simplement connexe et si $M \neq \mathbb{R}P^2$, alors d'après le lemme, $0 < \dfrac{\lambda}{2} < L$ et $v(r)$ n'est pas de classe C^2 en $0, \dfrac{\lambda}{2}, L$ donc $S(M) \geq 3$.

Enfin, si $M = \mathbb{R}P^2$, $v(r)$ n'est pas C^2 en 0 et L, donc $S(\mathbb{R}P^2) \geq 2$. Comme $\mathbb{R}P^2$ n'est pas simplement connexe, $s(\mathbb{R}P^2) \geq 1$.

2 Surfaces à courbure constante zéro ou -1

Soit M une variété de dimension 2 complète à courbure constante -1 (resp. 0) et $x \in M$. Dans le revêtement universel $\tilde{M}$, isométrique au plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$ (resp. au plan euclidien $\mathbb{R}^2$), choisissons un relèvement $\tilde{x}$ de x, et soit Δ l'ensemble des points de $\tilde{M}$ qui sont plus proches de $\tilde{x}$ que de tout autre relèvement de x. Δ est un polygone convexe ayant un nombre localement fini de cotés.

Comme Δ est un domaine fondamental, le volume des boules de M est donné par

$$v(r) = vol B^M(x,r) = vol(B^{\tilde{M}}(\tilde{x},r) \cap \Delta).$$

Par conséquent, c'est une fonction C^∞ de r en r_0 sauf dans les cas suivants (non exclusifs) :

– (i) la sphère $\partial B^{\tilde{M}}(\tilde{x},r_0)$ contient un sommet de Δ ;

– (ii) la sphère $\partial B^{\tilde{M}}(\tilde{x},r_0)$ est tangente à un coté de Δ.

S'il y a tangence, alors $v'(r)$ est une fonction C^∞ de $\sqrt{r-r_0}$ et $v(r)$ est $C^{1+\frac{1}{2}}$ mais pas mieux, pour $r > r_0$ voisin de r_0.

S'il n'y a pas tangence dans le cas (i), alors $v'(r)$ est C^∞ à droite et à gauche de r_0, avec des dérivées à droite et à gauche distinctes, donc $v(r)$ est C^∞ à droite et à gauche de r_0 mais n'est pas de classe C^2 au voisinage de r_0.

3 Surfaces de type fini.

Il est classique que toute surface de type fini s'obtient à partir d'un polygone régulier par identification des cotés.

a) *Polygones réguliers et identifications.*

Rappel : Classification des variétés compactes sans bord de dimension 2.

On note T_0 la sphère S^2, T_1 le tore $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, et on définit par récurrence $T_{n+1} = T_n \# T_1$ (somme connexe orientable). T_n est la surface orientable de genre n. Sa caractéristique d'Euler est $2-2n$.

On note U_1 le plan projectif réel et on définit par récurrence $U_{n+1} = U_n \# U_1$ (somme connexe, il n'y a pas lieu de préciser les orientations car U_n est non orientable).

Sa caractéristique d'Euler est $2-n$.

Théorème de classification (voir [1], par exemple) *Toute variété compacte sans bord de dimension 2 est difféomorphe à une et une seule des T_n, $n \geq 0$, si elle est orientable, des U_n, $n \geq 1$, sinon.*

Corollaire 1. *Notons $T_{n,m}$ (resp. $U_{n,m}$) la surface T_n (resp. U_n) privée de m points. Alors toute surface de type fini est difféomorphe à une et une seule des $T_{n,m}$ $(n \geq 0, m \geq 0)$ ou des $U_{n,m}$ $(n \geq 1, m \geq 0)$.*

La caractéristique d'Euler $\chi(T_{n,m}) = 2-2n-m$ et $\chi(U_{n,m}) = 2-n-m$.

Objectif : On va montrer que, dès que leur caractéristique d'Euler est strictement négative, $T_{n,m}$ et $U_{n,m}$ s'obtiennent à partir d'un polygone régulier du plan hyperbolique par identification des côtés deux à deux.

Notons P_N le polygone régulier à N côtés du plan hyperbolique dont l'angle intérieur en un sommet est $\dfrac{2\pi}{N}$.

P_N existe dès que $N \geq 5$.

Soit Q_N le polygone idéal régulier à N côtés (i.e., ses sommets sont sur le cercle à l'infini). Il existe si $N \geq 3$.

Q_N est d'aire finie. En effet, comme ses angles sont nuls, son aire est donnée par la formule de Gauss-Bonnet :

$$\text{aire } (Q_N) = (N-2)\pi.$$

Chaque côté de Q_N porte un point remarquable appelé *milieu* : c'est celui qui est le plus proche du centre de symétrie.

Une isométrie entre côtés de Q_N est dite *admissible* si elle préserve les milieux des côtés.

Le bord de P_N (resp. Q_N) est orienté dans le sens trigonométrique. On numérote une fois pour toutes les côtés $c_1, ..., c_N$.

Il existe exactement deux isométries de c_i sur c_j (admissibles dans le cas de Q_N).

On note p_{ij} celle qui préserve l'orientation et r_{ij} celle qui la renverse.

Un système d'identifications des côtés de P_N (resp. Q_N) consiste à regrouper les côtés par paires (c_i, c_j) et choisir l'une des deux isométries admissibles p_{ij} ou r_{ij}. On code un tel système par une suite de N symboles $a\,b\,\bar{a}\,b\,c\,d\,\bar{c}\dots$ où $a, b, c, d, \dots \in \left\{1, \dots, \dfrac{N}{2}\right\}$ apparaissent exactement deux fois, et la barre au dessus d'un nombre (qui n'apparaît qu'une fois) signifie qu'on choisit r_{ij} et non p_{ij} pour identifier les côtés correspondants.

Lemme 2. *Le tableau suivant indique, pour chaque surface X de type fini de caractéristique d'Euler strictement négative, un système d'identifications qui produit une surface à courbure -1 complète et d'aire finie, difféomorphe à X.*

Surface	Polygone de départ	Système d'identifications
$T_n, n \geq 2$	P_{4n}	$12\bar{1}\bar{2}\dots(2n-1)2n\overline{(2n-1)}\,\overline{2n}$
$T_{n,1}, n \geq 1$	Q_{4n}	$12\bar{1}\bar{2}\dots(2n-1)2n\overline{(2n-1)}\,\overline{2n}$
$T_{n,m}, \begin{cases} n \geq 1 \\ m \geq 2 \end{cases}$	$Q_{4n+2m-2}$	$12\bar{1}\bar{2}\dots(2n-3)(2n-2)\overline{(2n-3)}$ $\overline{(2n-2)}(2n-1)2n\dots(2n+m-1)$ $\overline{(2n-1)}\,\overline{(2n+m-1)}$ $\overline{(2n+m-2)}\dots\overline{2n}$
$T_{0,m}, m \geq 3$	Q_{2m-2}	$12...(m-1)\overline{(m-1)}\,\overline{(m-2)}...\bar{2}\bar{1}$
$U_n, n \geq 3$	P_{2n}	$112233\dots nn$

$U_{n,1}, n \geq 2$	Q_{2n}	$1122\dots nn$
$U_{n,m}, \begin{cases} n \geq 2 \\ m \geq 2 \end{cases}$	$Q_{2n+2m-2}$	$1122\dots(n-1)(n-1)n(n+1)\dots$ $\dots(n+m-1)n(n+1)\dots(n+m-1)$
$U_{1,m}, m \geq 2$	Q_{2m}	$12\dots m12\dots m$

Preuve. Notons Y l'espace quotient de P_N (resp. Q_N) par le système d'identifications indiqué.

1. Y est une variété de dimension 2 localement isométrique au plan hyperbolique.

Les points de Y se divisent en 3 catégories suivant leur origine dans P_N (resp. Q_N) : point intérieur, point sur une arête, sommet.

Aux points intérieurs, il n'y a rien à vérifier.

Un voisinage d'un point sur une arête est la réunion de deux demi disques hyperboliques recollés le long de leur bord rectiligne au moyen d'une isométrie, il est isométrique à un disque hyperbolique.

Un voisinage d'un sommet est la réunion de $2N$ secteurs hyperboliques d'angle $\frac{\pi}{N}$ recollés bord à bord par des isométries.

Il suffit de vérifier que le link est connexe. C'est immédiat et bien connu (ce cas ne se rencontre que pour les surfaces compactes).

2. Si Y est non compacte, Y est difféomorphe à une surface compacte privée de m points.

En effet, il y a un difféomorphisme évident de Q_N sur P_N privé de ses sommets, qui préserve les symétries de Q_N et P_N, dont la restriction aux côtés commute aux isométries entre côtés. On obtient, en passant au quotient, un difféomorphisme de Y sur une surface compacte $\tilde{Y}$ (voir **1**) privée de ses sommets. Comptons le nombre de sommets de $\tilde{Y}$. Le système d'identification a été obtenu à partir de celui d'une surface compacte en subdivisant 2 des côtés.

Les nouveaux sommets introduits donnent naissance dans $\tilde{Y}$ à $m-1$ sommets distincts et distinct de l'unique sommet qu'on obtient classiquement sur une surface compacte.

Il y a donc m sommets dans $\tilde{Y}$.

3. On calcule immédiatement $\chi(Y) = \chi(X)$ dans chacun des cas. Aussi Y est orientable $\Leftrightarrow$ tout nombre est barré.

4. *Complétude.* Coupons Q_N par les N horocycles centrés aux sommets passant par les milieux des côtés. Dans le quotient, ces secteurs horocycliques se réunissent en m trompettes isométriques au quotient d'une horoboule par une isométrie parabolique, qui est complet et d'aire finie. Comme ces trompettes constituent un voisinage de l'infini dans Y, Y est complète et d'aire finie.

– *Cas des surfaces à caractéristique d'Euler nulle.*

On utilise les polygones réguliers euclidiens P_4 =carré et Q_2 =bande infinie, avec les identifications suivantes :

Surface	Polygone de départ	code d'identifications
T_1	P_4	$1\,2\,\bar{1}\,\bar{2}$
$T_{0,2}$	Q_2	$1\,\bar{1}$
U_2	P_4	$1\,2\,\bar{1}\,2$
$U_{1,1}$	Q_2	$1\,1$

– *Cas des surfaces à caractéristique d'Euler positive.*

Pour $T_0 = S^2$ et $T_{0,1} = \mathbb{R}^2$, on choisit le polygone qui est toute la sphère P_0 et tout le plan Q_0. Pour $U_1 = \mathbb{R}P^2$, une demisphère vue comme polygone P_2 à 2 côtés et identification 1 1.

b. Etude de la fonction croissance.

Lemme 3. *Soit Y le quotient de P_N (resp. Q_N) pour l'un des systèmes d'identifications du lemme 2. Soit G le centre de symétrie de P_N (resp. de Q_N), $\bar{G}$ son image dans Y.*

Etant donné $x \in P_N$ (resp. Q_N), soit $r(x) = |x - G|$, distance dans le plan hyperbolique, euclidien, ou la sphère, soit $\bar{r}(x) = |\bar{x} - \bar{G}|$ distance pour la métrique de Y. Alors $\bar{r} \equiv r$.

Preuve. Par définition, $\bar{r} \leq r$. Montrons l'inégalité inverse. Soit $\bar{\gamma}$ une géodésique minimisante de $\bar{G}$ à $\bar{x}$ dans Y. Son image réciproque dans P_N (resp. Q_N) est une réunion de segments géodésiques $\gamma_i = [P_i, P'_i]$ avec $P_0 = G$, $P'_k = x$ et, pour tout i, P_i et P'_i sont sur des côtés c_{j_i} et $c_{j_{i'}}$ de P_N (resp Q_N) et images l'un de l'autre par l'isométrie $p_{j_i j_{i'}}$ ou $r_{j_i j_{i'}}$.

Ces isométries conservent la distance au centre de symétrie G, donc $r(P_i) = r(P'_i)$.

Comme r est lisse et $|dr| \leq 1$,

$$r(P'_i) - r(P_i) \leq |P'_i - P_i| = longueur(\gamma_i).$$

Il vient

$$\begin{aligned} r(x) = \sum_{i=0}^{k} r(P'_i) - r(P_i) \leq \\ \leq \sum_{i=0}^{k} longueur(\gamma_i) = longueur(\gamma) = \bar{r}(x). \end{aligned}$$

Corollaire 2. *Soit Y le quotient de P_N (resp. Q_N) par l'un des systèmes d'identifications étudiés. Soit $\bar{G} \in Y$ la projection du centre de symétrie, soit $v(r)$ la fonction croissance pour Y au point $\bar{G}$, i.e.*

$$v(r) = vol B^Y(\bar{G}, r).$$

Alors $v(r) = vol(B(G,r) \cap P_N)$ *(resp.* $v(r) = vol(B(G,r) \cap Q_N)$*).*

Corollaire 3. $v(r)$ *est analytique réelle sauf en 3 points si* Y *est compacte* $\neq \mathbb{R}P^2$*, et on les note 0,* $\ell = \frac{\lambda}{2}$*,* L *; en 2 points si* Y *est non compacte ou* $Y = \mathbb{R}P^2$*, et on les note 0,* $\ell = \frac{\lambda}{2}$*.*

De plus, si $Y \neq U_1 = \mathbb{R}P^2$*,* $v(r)$ *est* $C^{1,1}$ *mais non* C^2 *en 0 et* L*,* $v(r)$ *est* $C^{1+\frac{1}{2}}$ *mais pas* $C^{1+\alpha}$ *pour* $\alpha > \frac{1}{2}$ *en* ℓ*. Si* $Y = \mathbb{R}P^2$*,* $v(r)$ *n'est pas* C^1 *en* $\ell = L$*.*

Preuve. Soit ℓ le rayon du cercle inscrit à P_N (resp. Q_N), soit L le rayon du cercle circonscrit à P_N.

Pour $r \neq 0, \ell, L$ le cercle de centre G et de rayon r est transverse aux côtés de P_N (resp. Q_N) donc $v(r)$ est analytique réelle au voisinage de r. Si $\ell \neq L$, pour la même raison, $v(r)$ est analytique réelle sur un intervalle $]L-\varepsilon, L[$, mais $v''(L) \neq 0$. Comme $v(r)$ est constante sur $[L, +\infty[$, $v(r)$ est $C^{1,1}$ mais pas C^2 au voisinage de L.

Si $\ell \neq L$, la fonction r restreinte aux côtés est de Morse au voisinage des milieux des côtés, donc $v(r)$ est $C^{1+\frac{1}{2}}$ mais pas mieux au voisinage de ℓ.

Reste le cas où $\ell = L$, i.e. le bord du polygone P_N est un cercle.

Cela ne se produit que pour P_2, i.e. $Y = \mathbb{R}P^2$ muni de sa métrique canonique. ∎

Références

[1] Gramain A., *Topologie des surfaces*, P.U.F. Paris (1970).

[2] Grimaldi R., Pansu P., *Sur la régularité de la fonction croissance d'une variété riemannienne,* Geometriae Dedicata, **50**, (1994), 3-301-307.

[3] Grimaldi R., Pansu P., *Sur le degré de différentiabilité de la fonction croissance en dimension deux*, Boll. U.M.I. (Tricerri) (7) 11-B, (1997), Suppl. fasc. 2, 25-38.

[4] Grove K., Shiohama K., *A generalized sphere theorem*, Ann. of Math. **106** (1977), 201-211.

[5] Pansu P., *Differentiability of volume growth*, Rend. Circ. Mat. Palermo, Ser. II, Suppl. **49**, (1997), 159-176.

R. Grimaldi
Università di Palermo
Dipartimento di Matematica ed Appl.
Fac. di Ingegneria
Viale delle Scienze - 90128 Palermo (Italy)
e-mail : Grimaldi@dipmat.math.unipa.it

P. Pansu
Université de Paris - Sud
Laboratoire de Mathématique d'Orsay, UMR 8628 du CNRS
Bât. 425 - F 91405 Orsay (France)
e-mail : Pierre.Pansu@math.u-psud.fr